

Mines-Ponts 2000

PSI 1

Partie préliminaire

M est un sous-ensemble non vide de $M_2(\mathbb{C})$ qui est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ donc sur $\mathbb{R}$. Si $m = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ et $m' = \begin{pmatrix} a' & ib' \\ i\bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, $m + \lambda m' = \begin{pmatrix} a + \lambda a' & i(b + \lambda b') \\ i(\bar{b} + \lambda \bar{b}') & \bar{a} + \lambda \bar{a}' \end{pmatrix}$ est un élément de M . Donc M est un sous-espace vectoriel réel de $M_2(\mathbb{C})$.

Notons $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$ les décompositions de a et b en partie réelle et imaginaire. Alors $m = a_1 I + a_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui montre que M est engendré (sur $\mathbb{R}$) par les 4 matrices I, v_1, v_2, u_1 où $v_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $u_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. De plus, ces 4 matrices sont indépendantes puisque $m = 0$ implique $a = b = 0$. Donc $\dim_{\mathbb{R}} M = 4$.

On remarque que $\begin{cases} v_1^2 = v_2^2 = u_1^2 = -I \\ v_1 v_2 = -v_2 v_1 = u_1 \\ u_1 v_1 = -v_1 u_1 = v_2 \\ v_2 u_1 = -u_1 v_2 = v_1 \end{cases}$. Il en résulte que la multiplication est une opération interne dans M .

M .

Première partie

I. 1. Si $m = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, $m + {}^t \bar{m} = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{a} & -ib \\ -i\bar{b} & a \end{pmatrix} = (Tr m) I$ et $m \cdot {}^t \bar{m} = \begin{pmatrix} a\bar{a} + b\bar{b} & 0 \\ 0 & a\bar{a} + b\bar{b} \end{pmatrix} = (\det m) I$.

Une matrice g de M est donc dans G ssi $g {}^t \bar{g} = I$, c'est à dire ssi ${}^t \bar{g} = g^{-1}$.

Si $Tr m = 0$, $m + {}^t \bar{m} = 0$ d'où $m^2 = -m \cdot {}^t \bar{m} = -(\det m) I = {}^t m^2$.

I. 2. Par unicité de la décomposition d'une matrice en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, une matrice m de M antisymétrique ssi elle est multiple de u_1 . Donc $U = \{u_1, -u_1\}$.

D'après les calculs de la fin de la partie préliminaire, la relation $m \cdot u_1 = u_1 \cdot \bar{m}$ est satisfaite pour $m = I, m = v_1, m = v_2$ et bien sûr pour $m = u_1$ puisque u_1 est réelle. Par linéarité, elle est donc satisfaite pour toute matrice m de M . On peut évidemment remplacer u_1 par $-u_1$, d'où $m \cdot u = u \cdot \bar{m}$ pour tout m dans M et tout u dans U .

Si $Tr m = 0$, m est combinaison linéaire de v_1, v_2 et u_1 . Le produit de chacune de ces matrices (à droite ou à gauche) par u_1 est dans V . Donc $m \cdot u_1$ et $u_1 \cdot m$ sont dans V ; on peut bien sûr remplacer u_1 par $-u_1$.

I. 3. $(m|m) = \frac{1}{2} Tr(m {}^t \bar{m}) = \det m$ d'après **1.**, d'où $\|m\| = \sqrt{\det m}$.

Par suite, $\|m \cdot w\| = \sqrt{\det m \cdot w} = \sqrt{\det m} \sqrt{\det w} = \|m\| \|w\|$.

I. 4. a. Si $g = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in G$, $|a|^2 + |b|^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$ (avec $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$ comme dans

la partie préliminaire). Il existe alors un unique $\vartheta \in [0, \pi]$ tel que $a_1 = \cos \vartheta$ et

$$g = \cos \vartheta I + a_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \cos \vartheta I + m$$

où m est une matrice de trace nulle de M .

$I = g \cdot {}^t \bar{g} = (\cos \vartheta I + m) \cdot (\cos \vartheta I + {}^t \bar{m}) = \cos^2 \vartheta I + \cos \vartheta (m + {}^t \bar{m}) + m \cdot {}^t \bar{m} = (\cos^2 \vartheta + \det m) I$. On en tire $\det m = \sin^2 \vartheta$, d'où, d'après **1.**, $m^2 = -(\sin^2 \vartheta) I$.

b. Soit $m = \begin{pmatrix} a & ib \\ ib & a \end{pmatrix} \in M$ non nulle ; l'un au moins des coefficients a ou b est non nul et par conséquent,

$\det m = |a|^2 + |b|^2 \neq 0$. On peut donc définir $g_1 = \frac{1}{\sqrt{\det m}} m$ qui est aussi dans l'espace vectoriel M . De plus,

comme les matrices sont de taille 2, $\det g_1 = \frac{1}{\det m} \det m = 1$. Donc g_1 est bien une matrice de G .

I. 5. D'après **1.**, $g_1^2 = -I$. On en déduit que $m_{\vartheta} \cdot m_{\vartheta'} = I \cos(\vartheta + \vartheta') + g_1 \sin(\vartheta + \vartheta') = m_{\vartheta + \vartheta'}$, où $\vartheta + \vartheta'$ représente l'addition dans le groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ des réels modulo 2π . Il en résulte que $G(g_1)$ est un sous-ensemble non vide de G , stable par composition et passage à l'inverse (car $m_{\vartheta}^{-1} = m_{2\pi - \vartheta}$), c'est à dire un sous-groupe de G . De plus, ce sous-groupe est isomorphe à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, c'est à dire au groupe des rotations du plan euclidien, et en particulier est commutatif.

Deuxième partie

II. 1. a. Le sous-espace de M engendré par les matrices I, v_1 et v_2 (notation de la partie préliminaire) est contenu dans V qui est donc au moins de dimension 3. Comme M contient la matrice u_1 qui n'est pas symétrique, V est exactement de dimension 3 et admet le système $\{I, v_1 \text{ et } v_2\}$ comme base.

b. L'application l_g est manifestement linéaire. Par ailleurs, ${}^t l_g(w) = {}^t w \cdot {}^t g + g \cdot {}^t w = l_g(w)$ puisque w est symétrique. Donc l_g est bien un endomorphisme de V .

$l_g(I) = g + {}^t g$. Si l_g était le morphisme nul, on en déduirait que $g = -{}^t g$, mais comme $\text{Tr } g = 0$, on a aussi $g = -{}^t \bar{g}$ et par conséquent $g = \bar{g}$. Or g est dans le noyau de la forme linéaire Tr qui est l'hyperplan engendré par v_1, v_2 et u_1 et les seules matrices réelles de cet hyperplan sont des multiples de u_1 . Enfin, comme $g \in G$, $g = \pm u_1$. Mais dans ce cas, $l_g(v_1) = -2v_1 \neq 0$ ce qui contredit l'hypothèse initiale. Donc l_g n'est pas le morphisme nul.

II. 2. a. Il résulte de **I. 1.** que pour tout g dans G de trace nulle, $g^2 = {}^t g^2 = -I$. On en déduit

$$l_g \circ l_g(w) = g \cdot (g \cdot w + w \cdot {}^t g) + (g \cdot w + w \cdot {}^t g) \cdot {}^t g = g^2 \cdot w + 2g \cdot w \cdot {}^t g + w \cdot {}^t g^2 = 2g^2 \cdot w + 2g \cdot w \cdot {}^t g = 2g \cdot l_g(w).$$

En composant par l_g , $l_g(g \cdot l_g(w)) = \frac{1}{2} l_g \circ l_g \circ l_g(w) = g \cdot l_g \circ l_g(w) = 2g^2 \cdot l_g(w) = -2l_g(w)$.

En utilisant **I. 3.**, $\|g \cdot l_g(w)\| = \|g\| \|l_g(w)\| = \sqrt{\det g} \|l_g(w)\| = \|l_g(w)\|$.

Enfin, puisque $g^{-1} = {}^t \bar{g}$ (**I. 1.**), et, pour u dans U , $g \cdot u = u \cdot \bar{g}$ (**I. 2.**), $l_g(g \cdot u) = g^2 \cdot u + g \cdot u \cdot {}^t g = -u + u \cdot \bar{g} \cdot {}^t g = 0$.

b. Pour v et w dans V , en sachant que $\text{Tr}(v \cdot v') = \text{Tr}(v' \cdot v)$ et en utilisant la propriété ${}^t \bar{g} = g^{-1} = -g$,

$$(l_g(v) | w) = \frac{1}{2} \text{Tr}((g \cdot v + v \cdot {}^t g) \cdot {}^t \bar{w}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(v \cdot {}^t \bar{w} \cdot g + v \cdot {}^t g \cdot {}^t \bar{w}) = (v | {}^t \bar{g} \cdot w + w \cdot \bar{g}) = (v | l_{g^{-1}}(w)) = -(v | l_g(v)).$$

Donc $l_g^* = -l_g$; autrement dit, l_g est antisymétrique.

c. Alors, pour tout w dans V , $(l_g(w) | g \cdot l_g(w)) = -(w | l_g(g \cdot l_g(w))) = -(w | -2l_g(w)) = 2(w | l_g(w)) = 0$ puisque l_g est antisymétrique. Les matrices $l_g(w)$ et $g \cdot l_g(w)$ sont donc perpendiculaires.

II. 3. a. Une matrice u de U est égale à u_1 ou à $-u_1$. Elle est donc de déterminant 1, d'où $u \cdot {}^t \bar{u} = I$ et $(u | h_0) = \frac{1}{2} \text{Tr}(u \cdot {}^t \bar{u} \cdot \bar{g}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(-g) = 0$.

Remarquons que $l_g(u) = g \cdot u + u \cdot {}^t g = g \cdot u - u \cdot \bar{g} = 0$ d'après **I. 2.**, d'où

$$(u | h_1) = (u | l_g(v)) = -(l_g(u) | v) = 0$$

$$(u | h_2) = (u | g \cdot l_g(v)) = \frac{1}{2} (u | l_g \circ l_g(v)) = \frac{1}{2} (l_g \circ l_g(u) | v) = 0.$$

Dans le dernier calcul de **2. a.**, on a vu que $l_g(g \cdot u) = 0$, d'où

$$(h_0 | h_1) = (g \cdot u | l_g(v)) = -(l_g(g \cdot u) | v) = 0$$

$$(h_0 | h_2) = (g.u | g.l_g(v)) = \frac{1}{2}(g.u | l_g \circ l_g(v)) = -\frac{1}{2}(l_g(g.u) | l_g(v)) = 0.$$

Enfin $(h_1 | h_2) = (l_g(v) | g.l_g(v)) = 0$ d'après 2. c.

b. On vérifie aisément que V est l'hyperplan orthogonal à u_1 . En effet, V est engendré par les trois matrices

$$I, v_1 \text{ et } v_2 \text{ et } \begin{cases} (u_1 | I) = \text{Tr } u_1 = 0 \\ (u_1 | v_1) = \text{Tr}(u_1 \cdot {}^t \bar{v}_1) = \text{Tr}(-v_2) = 0. \\ (u_1 | v_2) = \text{Tr}(u_1 \cdot {}^t \bar{v}_2) = \text{Tr}(v_1) = 0 \end{cases}$$

symétriques) et en constituent un système orthogonal. De plus $h_0 = g.u \neq 0$ car g et u sont inversibles, $h_1 = l_g(v) \neq 0$ par hypothèse et $h_2 = g.h_1 \neq 0$ car g est inversible. Donc ces trois matrices constituent bien une base orthogonale de V .

Pour obtenir une base orthonormée, il suffit alors de normaliser les vecteurs. On remarque

$$\text{d'une part que } \|h_0\| = \|g\| \|u\| = \sqrt{\det g} \sqrt{\det u} = 1,$$

$$\text{d'autre part que } \|h_2\|^2 = (g.l_g(v) | g.l_g(v)) = \frac{1}{2}(l_g \circ l_g(v) | g.l_g(v)) = (l_g(v) | l_g(v)) = \|h_1\|^2.$$

On prendra donc comme base orthonormée le système $\left\{ h_0, \frac{h_1}{\|l_g(v)\|}, \frac{h_2}{\|l_g(v)\|} \right\}$.

Pour trouver la matrice de l_g dans cette base, on remarque que $l_g(h_0) = l_g(g.u) = 0$ (2. a.) et en utilisant 2. b. puis 2. a., on calcule

$$\left(l_g \left(\frac{h_1}{\|l_g(v)\|} \right) \middle| \frac{h_2}{\|l_g(v)\|} \right) = \frac{1}{\|l_g(v)\|^2} (l_g \circ l_g(v) | g.l_g(v)) = -\frac{1}{\|l_g(v)\|^2} (l_g(v) | l_g(g.l_g(v))) = \frac{2(l_g(v) | l_g(v))}{\|l_g(v)\|^2} = 2.$$

Comme la matrice de l_g dans une base orthonormée est antisymétrique, elle s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$\frac{1}{2}l_g$ est donc la projection orthogonale sur le plan engendré par h_1 et h_2 composée avec la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans ce plan orienté.

II. 4. En utilisant l'égalité $g^2 = -I$, $\begin{cases} m_\vartheta . u = (I \cos \vartheta + g \sin \vartheta).u = u \cos \vartheta + h_0 \sin \vartheta \\ m_\vartheta . h_0 = (I \cos \vartheta + g \sin \vartheta).h_0 = h_0 \cos \vartheta - u \sin \vartheta \\ m_\vartheta . h_1 = (I \cos \vartheta + g \sin \vartheta).h_1 = h_1 \cos \vartheta + h_2 \sin \vartheta \\ m_\vartheta . h_2 = (I \cos \vartheta + g \sin \vartheta).h_2 = h_2 \cos \vartheta - h_1 \sin \vartheta \end{cases}$. On en déduit que la

matrice de s_ϑ dans la base $\{u, h_0, h_1, h_2\}$ s'écrit $\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$. On peut remarquer que cette

base n'est pas orthonormée mais qu'elle est orthogonale, que u et h_0 sont normés et que si on normalise h_1 et h_2 , la matrice ne changera pas.