

Olivier HALGAND

Problème 1.

Etude de courbes paramétrées

1. Si $a = b$, alors : $\forall t \in [0, +\infty[$, $x(t) = f_a(t) = f_b(t) = y(t)$, donc : $F(t)$ appartient à la droite Δ d'équation : $y = x$.

De plus : $t \geq 0 \Rightarrow t^a \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{1+t^a} \in]0, 1]$. Ainsi :

le support de $\Gamma_{a,b}$ est le "segment" $]OA]$ avec $A(1, 1)$.

2. D'une manière générale, les points de coordonnées (x, y) et (y, x) sont symétriques par rapport à la droite Δ . Donc :

les supports de $\Gamma_{a,b}$ et $\Gamma_{b,a}$ sont symétriques par rapport à Δ d'équation : $y = x$.

3. Puisque $a \geq 1$, on en déduit que : $t \mapsto 1 + t^a$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $[1, +\infty]$. Donc,

f_a est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ avec : $f_a(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_a(t) = 0$.

4. Soit $t > 0$. Alors :

$$f_a(t) + f_a\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{1+t^a} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^a} = \frac{1}{1+t^a} + \frac{t^a}{t^a+1},$$

donc :

$$\forall t > 0, \quad f_a(t) + f_a\left(\frac{1}{t}\right) = 1.$$

5. On en déduit donc que : $\forall t > 0$,

$$F\left(\frac{1}{t}\right) = \left(x\left(\frac{1}{t}\right), y\left(\frac{1}{t}\right)\right) = (1 - x(t), 1 - y(t)) = (1, 1) - (x(t), y(t)) = (1, 1) - F(t).$$

On en déduit donc que les points $F\left(\frac{1}{t}\right)$ et $F(t)$ sont symétriques par rapport au point $S = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
Or : $t \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{t} \in]0, 1]$. On en déduit donc que :

le support de $\Gamma_{a,b}$ privé de $(1, 1)$ est symétrique par rapport au point $S = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

6. Le tableau de variations de F sur I est :

t	0	1	$+\infty$
x	1	$\frac{1}{2}$	0
y	1	$\frac{1}{2}$	0

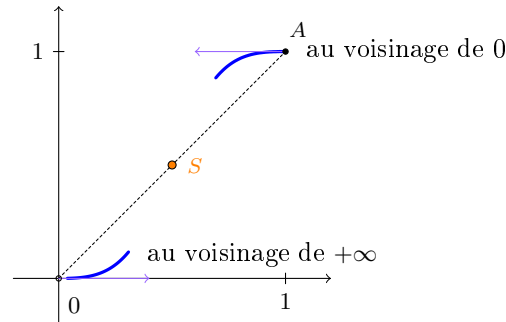
7. • Au voisinage de 0, on a : $(x(t), y(t)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} (1, 1)$.

De plus, pour $a \geq 1$, f_a est dérivable et : $f'_a(t) = \frac{-at^{a-1}}{(1+t^a)^2} \underset{0}{\sim} -at^{a-1}$. On en déduit donc qu'au voisinage de 0 on a :

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} \underset{0}{\sim} \frac{-bt^{b-1}}{-at^{a-1}} = \frac{b}{a} t^{b-a} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi, le support de $\Gamma_{a,b}$ admet une demi-tangente horizontale au point $A = (1, 1)$.

• Au voisinage de $+\infty$, on a : $(x(t), y(t)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} (0, 0)$. Donc, par symétrie par rapport au point $S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, le support de $\Gamma_{a,b}$ admet aussi une demi-tangente horizontale au point $(0, 0)$.



8. Posons $u = t - 1$. Alors : $f_a(1+u) = \frac{1}{1+(1+u)^a}$ avec :

$$(1+u)^a = 1 + au + \frac{a(a-1)}{2}u^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}u^3 + o(u^3),$$

donc :

$$1 + (1+u)^a = 2 \left(1 + \frac{a}{2}u + \frac{a(a-1)}{4}u^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{12}u^3 + o(u^3) \right),$$

d'où :

$$\begin{aligned} f_a(1+u) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{a}{2}u + \frac{a(a-1)}{4}u^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{12}u^3 + o(u^3)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{a}{2}u + \frac{a(a-1)}{4}u^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{12}u^3 \right) + \left(\frac{a}{2}u + \frac{a(a-1)}{4}u^2 \right)^2 - \left(\frac{a}{2}u \right)^3 \right] + o(u^3) \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{a}{2}u - \frac{a(a-1)}{4}u^2 - \frac{a(a-1)(a-2)}{12}u^3 + \frac{a^2}{4}u^2 + \frac{a^2(a-1)}{4}u^3 - \frac{a^3}{8}u^3 \right] + o(u^3) \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{a}{2}u + \frac{a}{4}u^2 + \frac{-2a(a^2 - 3a + 2) + (6a^3 - 6a^2) - 3a^3}{24}u^3 \right] + o(u^3) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{a}{4}u + \frac{a}{8}u^2 + \frac{a^3 - 4a}{48}u^3 + o(u^3). \end{aligned}$$

On en tire :

$$f_a(t) \underset{1}{\sim} \frac{1}{2} - \frac{a}{4}(t-1) + \frac{a}{8}(t-1)^2 + \frac{a(a^2-4)}{48}(t-1)^3 + o((t-1)^3).$$

9. On en déduit qu'avec $a = 1$ et $b = 2$ on obtient :

$$x(t) = f_1(t) \underset{1}{\sim} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(t-1) + o(t-1) \quad \text{donc :} \quad x'(1) = -\frac{1}{4},$$

$$y(t) = f_2(t) \underset{1}{\sim} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t-1) + o(t-1) \quad \text{donc :} \quad y'(1) = -\frac{1}{2}.$$

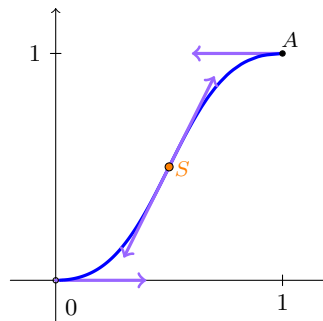
Donc : $\frac{y'(1)}{x'(1)} = 2$, c'est-à-dire que :

le support de $\Gamma_{1,2}$ admet au point $S = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ une tangente de vecteur directeur $\vec{u} = (1, 2)$.

On a donc : $F'(1) = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$, $F''(1) = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}F'(1)$ et $F'''(1) = (-\frac{1}{16}, 0)$. Ainsi, $F'(1)$ et $F'''(1)$ ne sont pas colinéaires, donc les entiers caractéristiques de $\Gamma_{1,2}$ au point $S = F(1)$ sont : $p = 1$ et $q = 3$. On en déduit donc que :

le point S est un point d'inflexion du support de $\Gamma_{1,2}$.

10. Le support de $\Gamma_{1,2}$ a donc pour allure :



Fonction définie par une intégrale

11. On a :

$$\varphi(0) = \int_0^1 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2},$$

$$\varphi(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln|1+t|]_0^1 = \ln 2,$$

$$\varphi(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan } t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

12. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que : $x < y$ et soit $t \in]0, 1]$.

Alors : $\ln t < 0$ et donc : $0 \geq x \ln t > y \ln t$, d'où (avec l'exponentielle) : $1 \geq t^x > t^y > 0$.

On en tire donc : $2 \geq 1 + t^x > 1 + t^y > 1$ et donc : $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^x} < \frac{1}{1+t^y} < 1$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit donc :

$$0 \leq x < y \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) < \varphi(y),$$

c'est-à-dire :

la fonction φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

13. Soient x, y tels que : $0 \leq x \leq y$. Alors, φ étant croissante :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \varphi(y) - \varphi(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+ty} - \frac{1}{1+tx} \right) dt = \int_0^1 \frac{t^x - t^y}{(1+tx)(1+ty)} dt,$$

donc :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \int_0^1 (t^x - t^y) dt.$$

Or :

$$\int_0^1 t^x dt = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{x+1},$$

donc :

$$\int_0^1 (t^x - t^y) dt = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{(y+1) - (x+1)}{(x+1)(y+1)} \leq y - x.$$

On a donc bien :

$$\forall 0 \leq x \leq y, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \int_0^1 (t^x - t^y) dt \leq y - x.$$

14. D'après la question précédente, φ est 1-lipschitzienne sur tout segment inclus dans \mathbb{R}_+ , donc :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.$$

15. Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$1 - \varphi(x) = \int_0^1 1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^x} \right) dt,$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, \quad 1 - \varphi(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt.}$$

16. Or, on a :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt \leq \int_0^1 t^x dt = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{x+1}.$$

On en déduit donc l'encadrement :

$$0 \leq 1 - \varphi(x) \leq \frac{1}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1.}$$

17. La fonction : $t \mapsto \frac{1}{1+t^x}$ n'est pas de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de 0 ; on ne peut donc effectuer une intégration par parties. Posons $u : t \mapsto t \times \frac{1}{1+t^x}$. Alors u est dérivable sur $[0, 1]$ et :

$$u'(t) = \frac{1}{1+t^x} + t \frac{-xt^{x-1}}{(1+t^x)^2} = \frac{1}{1+t^x} - \frac{xt^x}{(1+t^x)^2}.$$

Puisque u' est continue sur $[0, 1]$, on peut intégrer cette égalité, ce qui donne :

$$\int_0^1 u'(t) dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^x} - \frac{xt^x}{(1+t^x)^2} \right) dt,$$

soit :

$$\left[u(t) \right]_0^1 = \varphi(x) - x \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt,$$

et donc :

$$\varphi(x) = \boxed{\frac{1}{2} + x \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt.}$$

18. La pente de la demi-tangente au point d'abscisse 0 de la courbe représentative de φ est :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\left(\frac{1}{2} + x \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt\right) - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt.$$

Soit $x \in [0, 1[$, et considérons l'application $u : t \mapsto \frac{t^x}{(1+t^x)^2} - \frac{1}{4}$; elle est continue sur le segment $[0, x]$ donc, d'après le théorème de la moyenne :

$$\exists c \in [0, x], \quad \int_0^1 \left(\frac{t^x}{(1+t^x)^2} - \frac{1}{4}\right) dt = u(c) = \frac{c^x}{(1+c^x)^2} - \frac{1}{4}.$$

On en déduit donc, grâce à la continuité de u que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_0^1 \left(\frac{t^x}{(1+t^x)^2} - \frac{1}{4}\right) dt = 0,$$

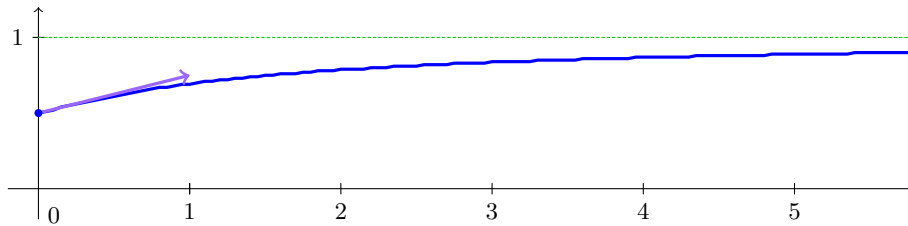
et donc que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt = \frac{1}{4}.$$

Finalement :

la pente de la demi-tangente au point d'abscisse 0 de la courbe représentative de φ est $\frac{1}{4}$.

19. L'allure de la courbe de φ est donc :



20. D'après 15., on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) - 1 = - \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt$. On effectue une intégration par parties en posant :

$$u(t) = \frac{1}{x} \ln(1+t^x) \text{ et } v(t) = t, \quad \text{d'où : } u'(t) = \frac{t^{x-1}}{1+t^x} \text{ et } v'(t) = 1,$$

ce qui donne :

$$\varphi(x) - 1 = - \left(\left[\frac{1}{x} \ln(1+t^x) \cdot t \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{1}{x} \ln(1+t^x) dt \right) = -\frac{\ln 2}{x} + \frac{1}{x} \int_0^1 \ln(1+t^x) dt.$$

Or : $\forall t \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+t^x) \leq t^x$ donc, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \ln(1+t^x) dt \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}.$$

On en déduit que :

$$\varphi(x) - 1 = -\frac{\ln 2}{x} + o(x),$$

et donc :

$$\varphi(x) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln 2}{x}.$$

Problème 2.

Théorème de Fermat

21. Soit p un nombre premier et $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Alors :

$$k \binom{p}{k} = \frac{k \times p!}{(p-k)! k!} = \frac{p!}{(p-k)! (k-1)!} = \frac{p \times (p-1)!}{((p-1) - (k-1))! (k-1)!},$$

donc :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}.}$$

Or : p divise $p \binom{p-1}{k-1}$ (car les coefficients binomiaux sont entiers), donc p divise $k \binom{p}{k}$. Comme p est premier et $> k$, p est premier avec k donc, d'après le théorème de Gauss :

$$\boxed{p \text{ divise } \binom{p}{k}.}$$

22. On raisonne par récurrence sur a :

• **Initialisation** : Pour $a = 0$, on a : $a^p - a = 0$ et p divise 0, donc p divise $a^p - a$: la propriété est initialisée.

• **Hérédité** : On suppose que p divise $a^p - a$ pour un entier n donné quelconque. Alors, d'après la formule du binôme de Newton :

$$(a+1)^p - (a+1) = \left(\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k \right) - a - 1 = \left(\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k \right) + (a^p - a).$$

Or, d'après 21., p divise $\binom{p}{k}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, donc p divise $\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k$. De plus, d'après l'hypothèse de récurrence, p divise aussi $a^p - a$. Donc, on en déduit que p divise $(a+1)^p - (a+1)$.

• **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathcal{P}, \quad p \mid (a^p - a).}$$

23. • Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall p \in \mathcal{P}, p \mid \det(M^p) = (\det M)^p$.

Or, d'après la question précédente, p divise $(\det M)^p - \det M$, donc p divise leur différence, c'est-à-dire que : p divise $\det M$.

Si $\det M \neq 0$, alors il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que : $p > \det M$ et alors : p ne divise pas $\det M$, et donc p ne divise pas $(\det M)^p$. Donc M ne vérifie pas l'hypothèse.

On en déduit donc que nécessairement, $\det M = 0$, c'est-à-dire que M n'est pas inversible.

• Réciproquement, si $\det M = 0$, alors tout nombre premier divise $0 = \det(M^p)$.

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{les matrices de } \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}) \text{ qui vérifient : } \forall p \in \mathcal{P}, p \mid \det(M^p) \text{ sont les matrices non inversibles.}}$$

Remarque : si $\det M$ est divisible par p , pour n'importe quel nombre premier p , alors cela signifie que $\det M$ possède une infinité de diviseurs, et donc que $\det M = 0$.

Etude d'un ensemble de matrices

24. D'après la définition :

$$M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, que : $\mathcal{A} = Vect(J, K, L)$.

Ces trois matrices formant une famille libre (évident d'après la position des coefficients non nuls), on en déduit :

l'ensemble \mathcal{A} est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3, dont une base est (J, K, L) .

25. Il faut vérifier que \mathcal{A} est stable par multiplication, et que la multiplication est commutative. Il suffit donc de le vérifier sur la base (J, K, L) , ce qui donne :

$$J^2 = J, \quad K^2 = K, \quad L^2 = -K;$$

$$JK = KJ = O, \quad JL = LJ = O, \quad KL = LK = L.$$

On peut donc conclure que :

l'ensemble \mathcal{A} est un anneau commutatif.

26. Calculons $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et vérifions que (I_3, M, M^2) est une famille libre (maximale) puisqu'elle compte trois matrices de \mathcal{A} . Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda J + \mu K + \nu L = O &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda - 2\mu + 4\nu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + \mu & \mu + 2\nu \\ 0 & -\mu - 2\nu & \lambda + \mu \end{pmatrix} = O \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 2\mu + 4\nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ \mu + 2\nu = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 2\mu + 4\nu = 0 \\ 3\mu - 4\nu = 0 \\ \mu + 2\nu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0. \end{aligned}$$

La famille (I_3, M, M^2) est donc libre et maximale :

(I_3, M, M^2) est une base de \mathcal{A} .

27. On a : $M^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Donc :

$$M^3 = -4I_3 + 2M.$$

Etude d'une suite

28. On sait que $M^0 = I_3$ et M appartiennent à \mathcal{A} . Or, \mathcal{A} est un anneau donc il est stable par multiplication. On en déduit donc que $\forall k \in \mathbb{N}, M^k \in \mathcal{A} = Vect(J, K, L)$, c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}, \quad M^k = a_k J + b_k K + c_k L = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k \\ 0 & -c_k & b_k \end{pmatrix}.$$

29. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$M^{k+1} = M^k \cdot M = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k \\ 0 & -c_k & b_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k - c_k & b_k + c_k \\ 0 & -b_k - c_k & b_k + c_k \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc les formules de récurrences suivantes :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = -2a_k \quad \text{et} : \quad b_{k+1} = b_k - c_k, \quad c_{k+1} = b_k + c_k.}$$

30. D'après la formule de récurrence obtenue, on en déduit que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -2 et de premier terme : $a_0 = 1$ (car $M^0 = I_3$), et donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = (-2)^k.}$$

31. On peut donc écrire, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$z_{k+1} = b_{k+1} + ic_{k+1} = (b_k - c_k) + i(b_k + c_k) = b_k(1+i) + ic_k(1+i) = (1+i)(b_k + ic_k),$$

donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad z_{k+1} = (1+i)z_k,}$$

c'est-à-dire que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1+i$ et de premier terme $z_0 = b_0 + ic_0 = 1$.
Donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad z_k = (1+i)^k.}$$

Or, $b_k = \operatorname{Re}(z_k)$ et $c_k = \operatorname{Im}(z_k)$, donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = \operatorname{Re}\left((1+i)^k\right).}$$

32. On peut aussi écrire, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$b_{k+2} = b_{k+1} - c_{k+1} = b_{k+1} - (b_k + c_k) = b_{k+1} - (b_k + b_k - b_{k+1}) = 2b_{k+1} - 2b_k \quad \text{donc} : \quad b_{k+2} - 2b_{k+1} + 2b_k = 0.$$

Ainsi, la suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique est : $X^2 - 2X + 2$. Son discriminant est : $\Delta = -4$ et ses deux racines complexes conjuguées sont : $1+i$ et $1-i$. On en déduit donc que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = \lambda(1+i)^k + \mu(1-i)^k.$$

En particulier pour $k=0$ on obtient : $\lambda + \mu = b_0 = 1$ et pour $k=1$: $\lambda(1+i) + \mu(1-i) = b_1 = 1$.
On obtient donc : $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, et donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = \frac{(1+i)^k + (1-i)^k}{2} = \frac{(1+i)^k + \overline{(1+i)^k}}{2},$$

donc on obtient donc bien :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = \operatorname{Re}\left((1+i)^k\right).}$$

33. Pour vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \operatorname{tr}(M^n)$, il suffit de vérifier que les deux suites vérifient la même relation de récurrence, et que les termes initiaux sont égaux.

• D'après ce qui précède : $\operatorname{tr}(M^0) = \operatorname{tr}(I_3) = 3 = u_0$, $\operatorname{tr}(M) = 0 = u_1$ et $\operatorname{tr}(M^2) = 4 = u_2$. Les trois premiers termes sont donc bien égaux.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors (en utilisant **27.**) :

$$\text{tr}(M^{n+3}) = \text{tr}(M^n M^3) = \text{tr}\left(M^n(-4I_3 + 2M)\right) = \text{tr}(-4M^n + 2M^{n+1}) = -4\text{tr}(M^n) + 2\text{tr}(M^{n+1}).$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \text{tr}(M^n).}$$

34. Pour $p = 2$, on a $u_2 = 4$ qui est bien divisible par 2. Sinon, p est impair et on pose alors : $p = 2n + 1$. On a alors, d'après la formule du binôme de Newton :

$$b_p = \mathcal{R}e\left((1+i)^{2n+1}\right) = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k\right) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n+1 \\ k \text{ pair}}} \binom{2n+1}{k} i^k \stackrel{k=2\ell}{=} \sum_{\ell=0}^n \binom{2n+1}{2\ell} (-1)^\ell.$$

On en déduit donc, d'après la question précédente :

$$u_p = \text{tr}(M^p) = a_p + 2b_p = (-2)^p + 2 \sum_{\ell=0}^n \binom{p}{2\ell} (-1)^\ell = -(2^p - 2) + 2 \sum_{\ell=1}^n \binom{p}{2\ell} (-1)^\ell.$$

Or, d'après **22.**, $p = 2n + 1$ divise $2^p - 2$ et, d'après **21.**, p divise aussi $\binom{p}{2\ell}$. On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall p \in \mathcal{P}, \quad p \text{ divise } u_p.}$$

Etude d'un coefficient

35. Pour montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 , on peut vérifier que c'est une famille libre (maximale), par exemple en vérifiant que son déterminant (relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3) est non nul :

$$\det(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9.$$

On a donc bien : $\det(e_1, e_2, e_3) \neq 0$, ce qui signifie que :

$$\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

36. On a donc :

$$c(u) = (u(e_1)|e_1) + (u(e_2)|e_2) + (u(e_3)|e_3) = (\lambda_1 e_1|e_1) + (\lambda_2 e_2|e_2) + (\lambda_3 e_3|e_3) = \lambda_1 (e_1|e_1) + \lambda_2 (e_2|e_2) + \lambda_3 (e_3|e_3),$$

d'où :

$$\boxed{c(u) = 6\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3.}$$

De plus, la matrice de u^k dans la base \mathcal{B} est : $\text{Diag}((1, \dots, (n) \lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k))$, et donc on en tire :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad c(u^k) = 6\lambda_1^k + 5\lambda_2^k + 6\lambda_3^k.}$$

37. Supposons que : $\forall p \in \mathcal{P}, \quad p \mid c(u^p)$, c'est-à-dire que p divise $6\lambda_1^p + 5\lambda_2^p + 6\lambda_3^p$. D'après **22.**, on sait que p divise aussi $\lambda_1^p - \lambda_1$, $\lambda_2^p - \lambda_2$ et $\lambda_3^p - \lambda_3$. Donc :

$$p \text{ divise } 6\lambda_1^p + 5\lambda_2^p + 6\lambda_3^p - 6(\lambda_1^p - \lambda_1) - 5(\lambda_2^p - \lambda_2) - 6(\lambda_3^p - \lambda_3) = 6\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3.$$

Comme en **23.**, cela signifie : $6\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0$. Or, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des entiers naturels (conc positifs), cela implique que : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, et donc :

$$\boxed{u \text{ est l'endomorphisme nul de } \mathbb{R}^3.}$$