Concours Commun des écoles des Mines d'Albi, Alès, Douai et Nantes 2003

Corrigé du sujet de Mathématiques, commun à toutes les filières.

Problème I.

Partie I.

1) $\boxed{\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = 0}$, par simple produit, car il ne s'agit pas d'une forme indéterminée.

2) Nous en déduisons que C_f possède en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

3) • $f(t)$ est <u>négligeable</u> devant e^t lorsque t tend vers $+\infty$ (« est dominé par » convient également, mais est moins précis), car $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{e^t} = 0$.

• $f(t)$ est <u>négligeable</u> devant $\dfrac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ (« est dominé par » convient également, mais est moins précis), car $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t.f(t)}{e^t} = 0$.

• $f(t)$ est <u>équivalent</u> à $\dfrac{e^t}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$ (« est dominé par » convient également, mais est moins précis), car $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^2.f(t)}{e^t} = 1$.

4) En $+\infty$, $f(t)$ est équivalent à $\dfrac{e^t}{t^2}$. Donc $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty}$, selon le théorème de comparaison des fonctions exponentielles et puissances en $+\infty$.

5) f est de classe C^∞ sur comme quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur restant strictement positif. On obtient $\boxed{f'(t) = \dfrac{e^t (t-1)^2}{(1+t^2)^2}}$.

6) $f'(t)$ étant positive sur , f <u>est croissante sur</u> .

7) Nous obtenons, en prenant soin de factoriser quand cela est possible :
$\boxed{f''(t) = \dfrac{e^t (t-1)(t^3 - 3t^2 + 5t + 1)}{(1+t^2)^3}}$.

8) Cherchons les valeurs d'annulation de f'' :

$$f''(t) = 0 \iff \begin{cases} t = 1 \\ ou \\ t^3 - 3t^2 + 5t + 1 = 0 \end{cases}.$$

Posons pour tout réel t : $\varphi(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$. φ est de classe C^∞ sur car polynomiale et $\varphi'(t) = 3t^2 - 6t + 5$. Or $\varphi'(t)$ est un polynôme de degré 2 en t, de discriminant strictement négatif. Donc φ' est de signe constant, donc strictement positif (signe du coefficient dominant). Ceci implique que la fonction φ est strictement croissante sur .

$\lim\limits_{t\to -\infty} \varphi(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to +\infty} \varphi(t) = +\infty$, or φ est continue sur , donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule au moins une fois sur .

De plus, φ étant strictement monotone, elle s'annule au plus une fois sur .

Donc φ <u>s'annule exactement une fois sur , en une valeur notée α.</u>

Nous obtenons donc finalement l'équivalence $f''(t) = 0 \iff \begin{cases} t = 1 \\ ou \\ t = \alpha \end{cases}$.

9) $f''\left(-\frac{1}{5}\right) = \dfrac{e^{-0.2} \times (-1.2) \times \left(\frac{-16}{125}\right)}{\left(\frac{26}{25}\right)^3}$ >0 et $f''(0) = -1$. Comme φ'' est continue sur $\left[\frac{-1}{5};0\right]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, φ'' s'annule sur cet intervalle. Or φ'' ne possède pour valeurs d'annulation que 1 et α. C'est donc α qui se trouve dans cet intervalle. Donc $\boxed{\frac{-1}{5} < \alpha < 0}$.

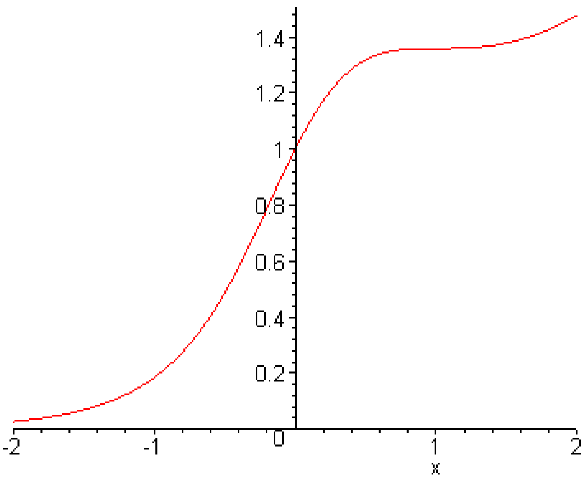
10) Au voisinage de 0, nous avons :

$$f(t) = \frac{e^t}{1+t^2} = \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \circ(t^3)\right)\left(1 - t^2 + \circ(t^3)\right) = 1 + t - \frac{t^2}{2} - \frac{5t^3}{6} + \circ(t^3).$$

Nous en déduisons que la tangente à C_f en zéro est la droite d'équation $y = 1 + x$ et que C_f se situe sous cette tangente.

11) Au point d'abscisse 1, f' et f'' s'annulent, tandis que f''' ne s'annule pas (calcul à vérifier par dérivation ou par les développements limités) Donc C_f admet en x=1 un point d'inflexion.

La courbe :



Partie II

12) On a donc :

n	$P_n(t)$
0	1
1	$(t-1)^2$
2	$(t-1)(t^3-3t^2+5t)+1$

13) Supposons $A(n)$ vraie, i.e. $f^{(n)}(t)=\dfrac{P_n(t).e^t}{(1+t^2)^{n+1}}$.

Alors, $f^{(n+1)}=f^{(n)}{}'$ et donc

$$f^{(n+1)}(t)=\frac{(P_n{}'(t).e^t+P_n(t).e^t)((1+t^2)^{n+1})-P_n(t).e^t(n+1)(2t)((1+t^2)^n)}{(1+t^2)^{2n+2}},$$

Soit $f^{(n+1)}(t)=\dfrac{[(P_n{}'(t)+P_n(t))((1+t^2))-P_n(t)(n+1)(2t)]e^t}{(1+t^2)^{n+2}}$.

A(n+1)est donc vérifiéeavec $\boxed{P_{n+1}(t)=(1+t^2)P_n{}'(t)+(t^2-2(n+1)t+1)P_n(t)}$.

14) Montrons par récurrence la propriété H(n) : « P_n est à coefficients dans Z».
H(0), H(1) et H(2) sont vraies d'après le tableau donné à la question 12.

Supposons H(n) vraie. Alors pour tout réel t
$P_{n+1}(t)=(1+t^2)P_n{}'(t)+(t^2-2(n+1)t+1)P_n(t)$. Donc P_{n+1} est obtenu à partir de P_n et de $P_n{}'$ par produit avec des polynômes à coefficients dans Z. Or si P_n est à coefficients dans Z, il en va de même pour $P_n{}'$ car chaque coefficient est multiplié par un entier naturel lors de la dérivation. Comme $Z[t]$ est canoniquement muni d'une structure d'anneau, P_{n+1} est à coefficients dans Z .

Donc H(n+1) est vraie et d'après le principe de récurrence H(n) est vraie pur tout entier n.

15) Soit p le degré de P_n et a son coefficient dominant. Alors, en utilisant la relation obtenue à la question 13, nous constatons que les termes de plus haut degré dans P_{n+1} seront de degré p+2, avec pour coefficient a.
Ceci induit donc par récurrence directe que P_n est un polynôme unitaire de degré 2n.

16) En spécialisant l'égalité de la question 13 en t=i, nous obtenons :
$P_{n+1}(i)=(-2(n+1)i)P_n(i)$.
Ceci implique donc, par récurrence, que $\boxed{P_n(i)=(-i)^n.2^n.n!}$.

Partie III

17) F est dérivable sur , comme primitive de fonction continue, et $F'(x) = f(x)$. Or f est positive sur , donc F y est croissante.

18) Soit x un réel négatif. Pour t compris entre x et 0, $f(t) \leq e^t$. Donc $\int_x^0 f(t)dt \leq \int_x^0 e^t dt$. Donc

$$\int_0^x f(t)dt \geq \int_0^x e^t dt = e^x - 1 \geq -1.$$

Donc, comme F est croissante sur est minorée en $-\infty$, elle admet une imite finie lorsque x tend vers $-\infty$. Notons l cette limite.

19) Comme $0 \geq F(x) \geq -1$, pour x négatif, nous en déduisons par passage à la limite dans cette égalité que $\boxed{0 \geq l \geq -1}$.

20) En 0, comme F est de classe C^1, l'équation de la tangente à sa courbe représentative est donnée par : $y = F'(0)(x-0) + F(0)$, soit $\boxed{y = x}$ la première bissectrice.

21) Nous avons le développement limité de f en 0, aussi pour obtenir celui de F, il nous suffit donc d'intégrer : $\boxed{F(x) = F(0) + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} - \frac{5x^4}{18} + \circ(x^4) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} - \frac{5x^4}{18} + \circ(x^4)}$.

22) La fonction J est dérivable sur et $J'(x) = \dfrac{xe^x}{(1+x^2)^2}$. La fonction

$g : x \to f(x) + 2J(x) - F(x)$ est dérivable et $g'(x) = \dfrac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2} + \dfrac{2xe^x}{(1+x^2)^2} - \dfrac{e^x}{1+x^2} = 0$.

Donc la fonction g est égale à une constante, notée A, sur .

Donc, pour tout réel x, $\boxed{F(x) = f(x) + A + 2J(x)}$.

23) Pour tout réel t supérieur à un, considérons la quantité $h(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2} - \dfrac{1}{t^3}$.

Nous avons donc $h(t) = \dfrac{t^4 - (1+t^2)^2}{t^3(1+t^2)^2} = \dfrac{-2t^2 - 1}{t^3(1+t^2)^2} \leq 0$.

Par intégration, comme en outre J est positive, nous obtenons pour x supérieur à un : $\boxed{0 \leq J(x) \leq K(x)}$.

24) Procédons à une intégration par parties dans L(x), en intégrant le terme $\dfrac{1}{t^4}$. Cette intégration par parties est possible car la fonction $t \to e^t$ est de classe C^1 sur $[1;x]$ et $t \to \dfrac{1}{t^4}$ est continue sur $[1;x]$. Nous obtenons : $L(x) = \left[\dfrac{-e^t}{t^3}\right]_1^x + \int_1^x \dfrac{e^t}{3t^3} dt$.

Donc, $K(x)-3L(x)=\frac{-e^x}{x^3}+e$, d'où $\frac{x^2\left(K(x)-3L(x)\right)}{e^x}=-\frac{1}{x}+x^2e^{1-x}$.

Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(K(x)-3L(x)\right)}{e^x}=0}$. Donc en $+\infty$, $K(x)-3L(x)$ est négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$.

25) L'indication de l'énoncé me semble obscure pour les étudiants.

La fonction $t\to\frac{e^t}{t^4}$ est décroissante sur $[1;4]$ et croissante sur $[4;+\infty[$ (étude basique !).

Comme $\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^4}=+\infty$, nous en déduisons que pour x « assez grand », la fonction $t\to\frac{e^t}{t^4}$ atteint sur $[1;x]$ son maximum en x. Donc, pour x « assez grand », nous avons $L(x)\leq(x-1)\frac{e^x}{x^4}$, qui est équivalent en $+\infty$ à $\frac{e^x}{x^3}$, donc négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$.

Donc L(x), est en $+\infty$ négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$.

26)Comme $K(x)-3L(x)=\circ\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$, nous en déduisons (en $+\infty$), que $\boxed{K(x)=\circ\left(\frac{e^x}{x^2}\right)}$.

En outre, $0\leq J(x)\leq K(x)$, donc $\boxed{J(x)=\circ\left(\frac{e^x}{x^2}\right)}$ en $+\infty$.

Finalement, comme $F(x)=f(x)+A+2J(x)$, et que $f(x)$ est en $+\infty$ équivalent à $\frac{e^x}{x^2}$, nous obtenons que $F(x)$ est en $+\infty$ équivalent à $\frac{e^x}{x^2}$.

27) La question 17 nous donne les variation de F, la question 19 une asymptote, la question 20 une tangente, et la question 26 le comportement en $+\infty$.

Problème II.

Partie I

1) Toute fonction de classe C^∞ sur est la dérivée de sa primitive qui s'annule en zéro. Donc D est surjective.

Si f' est nulle sur alors f est constante sur . Donc le noyau de D est constitué des fonctions constantes sur .

2) En choisissant les valeurs $0, \frac{\pi}{\sqrt{3}}, -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ pour t, nous obtenons que les hypothèses

impliquent : $\begin{cases} a+b=0 \\ a.e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}+b.e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}=0 \\ a.e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}-b.e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}=0 \end{cases}$. Ceci implique a=b=c=0. La famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est donc libre.

3) Si la fonction $af_1+bf_2+cf_3$ est nulle, il en va de même de son développement limité à tout ordre (Cette fonction est de classe C^∞). Donc :

$$a\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\circ(t^2)\right)+b\left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}+\circ(t^2)\right)\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}+\circ(t^2)\right)+c\left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}+\circ(t^2)\right)\left(1-\frac{3t^2}{8}+\circ(t^2)\right)=0$$

soit $(a+c)+\left(a-\frac{b\sqrt{3}}{2}-\frac{c}{2}\right)t+\left(\frac{a}{2}-\frac{b\sqrt{3}}{4}-\frac{c}{4}\right)t^2+\circ(t^2)=0$.

Or un développement limité est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Donc :

$\begin{cases} a+c=0 \\ a-\frac{b\sqrt{3}}{2}-\frac{c}{2}=0 \\ \frac{a}{2}-\frac{b\sqrt{3}}{4}-\frac{c}{4}=0 \end{cases}$. Ce seul système ne permet de conclure car la seconde et la troisième ligne sont proportionnelles. Il faut donc par exemple ajouter l'équation $a+b=0$ obtenue en prenant t=0, pour aboutir au système $\begin{cases} a+c=0 \\ a-\frac{b\sqrt{3}}{2}-\frac{c}{2}=0 \\ a+b=0 \end{cases}$, qui permet par simple résolution d'obtenir a=b=c=0.

4) Si nous considérons le comportement en $+\infty$ des fonctions, nous remarquons que f_2 et f_3 sont produits d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0. Donc ces deux fonctions tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Par contre f_1 tend vers $+\infty$, donc l'équation $af_1+bf_2+cf_3=0$ impose en $+\infty$ que a soit nul. On obtient ensuite b=c=0 par choix de valeurs de x.

5) Comme (f_1, f_2, f_3) est une base de G, pour montrer que G est stable par D, il suffit de

montrer que les images de f_1, f_2, f_3 par D appartiennent à G. Nous trouvons :

$D(f_1)=f_1$, $D(f_2)=-\frac{1}{2}.f_2+\frac{\sqrt{3}}{2}f_3$ et $D(f_3)=-\frac{1}{2}.f_3-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2$.

Ceci répond donc à la question.

6) La matrice de $\hat{D}$ est donc donnée par $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.

7) Nous obtenons $\boxed{M^3 = I_3}$, soit par calcul, soit en remarquant qu'il s'agit de la matrice orthogonale d'une rotation autour de l'axe engendré par f_1 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

8) Comme $M.M^2 = I_3$, nous en déduisons que M est inversible d'une part, et que $\boxed{M^{-1} = M^2}$ d'autre part. Donc $\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.

9) Comme M est inversible, l'endomorphisme associé, $\hat{D}$, est donc un automorphisme de G.

10) Et de plus $\boxed{\hat{D}^{-1} = \hat{D}^2}$.

Partie II

11) Pour cette question, il ne reste plus qu'à calculer les dérivées secondes, soit directement, soit en utilisant la matrice M^2 associée à $\hat{D}^2$. Nous obtenons :

	$f_i(0)$	$f_i'(0)$	$f_i''(0)$
f_1	1	1	1
f_2	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
f_3	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

12) φ est bien une application de G^2 dans .
φ est symétrique (vérification immédiate)
φ est linéaire par rapport à g : $\forall f, g, h \in G$, $\forall \lambda, \mu \in$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + \mu h, g) &= (\lambda f + \mu h)(0).g(0) + (\lambda f + \mu h)'(0).g'(0) + (\lambda f + \mu h)''(0).g''(0) \\ &= (\lambda f(0) + \mu h(0)).g(0) + (\lambda f'(0) + \mu h'(0)).g'(0) + (\lambda f''(0) + \mu h''(0)).g''(0) \\ &= \lambda.\varphi(f, g) + \mu.\varphi(h, g).\end{aligned}$$

Ceci implique donc que φ est une forme bilinéaire sur G.

φ est positive car $\varphi(f,f) = (f(0))^2 + (f'(0))^2 + (f''(0))^2$.

Montrons que φ est définie : Supposons que pour f appartenant à G, nous ayons $\varphi(f,f)$ =0. Alors, en décomposant f dans la base (f_1, f_2, f_3), et en notant $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$, nous avons $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i a_j \varphi(f_i, f_j) = 0$.

Ceci s'écrit : $\sum_{i=1}^{3} a_i^2 \varphi(f_i, f_i) = 0$. car la famille (f_1, f_2, f_3) est orthogonale (simple calcul).

Donc $3a_1^2 + \frac{3}{2}a_2^2 + \frac{1}{2}a_3^2 = 0$. Ceci implique donc la nullité des coefficients et f=0.

Donc φ est bien un produit scalaire sur G.

13) D'après la question précédente, la famille (f_1, f_2, f_3) est orthogonale.

14) Toujours d'après la question 12), la famille (f_1, f_2, f_3) n'est pas orthonormée car $\varphi(f_i, f_i)$ n'est pas égal à un, mais respectivement à 3, $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$ pour les valeurs 1,2 et 3 de i.

Partie III

15) Si f est solution de (E), on a $f''' = f$. Donc, f''' est de classe C^3, donc f est de classe C^6. Par récurrence directe, ce raisonnement permet de conclure que f est de classe C^∞.

16) Si P est une solution polynomiale de (E), l'égalité $P''' = P$ implique que ces deux polynômes ont même degré. Or le fait de dériver un polynôme diminue son degré, sauf si il s'agit du polynôme nul. Donc la seule solution polynomiale de (E) est le polynôme nul.

17) Sur G, l'égalité $M^3 = I_3$ implique que $D^3 = Id$, soit que $D^3 - Id = 0$ sur G. Donc G est inclus dans le noyau de $T = D^3 - Id$.

18) $g' = f''' + f'' + f' = f + f' + f'' = g$ car $f''' = f$. Donc g est solution de $y' = y$.

19) L'équation différentielle $y' - y = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre (en outre à coefficients constants). Les solution sont donc de la forme $\boxed{t \to \alpha e^t}$, avec $\alpha \in$.

20) L'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ est une équation différentiel linéaire du second ordre à coefficients constants. Le discriminant du polynôme caractéristique associé $(X^2 + X + 1)$ est égal à –3. L'espace des solutions et de dimension 2 et le résultat du cours correspondant nous dit que la famille $\boxed{(f_2, f_3)}$ en forme une base.

21) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $y'' + y' + y = \lambda . e^t$ $(\lambda \in \Re)$, est un sous-espace affine de E de dimension 2, passant par une solution particulière, et dirigé, d'après la question précédente, par Vect(f_2, f_3). On

remarque que $t \to \frac{\lambda}{3}e^t$ est solution particulière. Donc toute solution est de la forme $\boxed{t \to \frac{\lambda}{3}e^t + \alpha f_2(t) + \beta f_3(t)}$, où α, β sont des réels.

22) Donc finalement, si f est solution de (E), $g = f'' + f' + f$ est de la forme $t \to \lambda.e^t$ $(\lambda \in \Re)$, et donc f vérifie $f'' + f' + f = \lambda.e^t$ et par conséquent est de la forme $t \to \frac{\lambda}{3}e^t + \alpha f_2(t) + \beta f_3(t)$, où α, β sont des réels. Donc $f \in Vect(f_1, f_2, f_3)$, ce qui signifie exactement que toute solution de (E) appartient à G. Ceci permet donc de conclure que l'espace vectoriel G est exactement l'ensemble des solutions de (E).