ECOLE POLYTECHNIQUE
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES B (X)
Session 2024 - Filières MP - MPI

m.laamoum2@gmail.com [1]

Première partie

On note S l'ensemble des solutions de (1) sur $\mathbb{R}$.

1 ▷

(1a) D'après le théorème de Cauchy linéaire, les deux problèmes de Cauchy

$$(P_1)\begin{cases} y''+qy=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \quad \text{et } (P_2)\begin{cases} y''+qy=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

admettent respectivement une unique solution y_1 et y_2 dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
Le Wronskien de la famille (y_1,y_2) en 0 vaut $W(0)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$ ainsi (y_1,y_2) est un système fondamental de solutions de (1), donc c'est une base de l'ensemble S, qui est de dimension 2.
Par suite $\boxed{S=\operatorname{Vect}(y_1,y_2) \text{ est l'ensemble des solutions de (1) dans } \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})}$.

(1b) Posons pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\quad \varphi(t)=y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)$, on a

$$\varphi'(t)=y_1(t)y_2''(t)-y_1''(t)y_2(t)=y_1(t)(q(t)y_2(t))-y_1''(t)(q(t)y_1(t))=0$$

donc φ est constante sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(t)=\varphi(0)=W(0)=1$, d'où $\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\quad y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)=1}$.

2 ▷ L'application $\varphi_T : t\mapsto y(t+T)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_T''(t)=y''(t+T)=-q(t+T)y(t+T)$$

Or q est T-périodique, donc:

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \varphi_T''(t)=-q(t)y(t+T)=-q(t)\varphi_T(t)$$

ce qui démontre que φ_T est solution de (1) sur $\mathbb{R}$.
D'après la question 1.a, l'application φ_T est donc combinaison linéaire de y_1 et y_2, soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\varphi_T=\alpha y_1+\beta y_2.$$

En évaluant en 0 cette égalité, ainsi que celle obtenue par dérivation $\varphi_T'=\alpha y_1'+\beta y_2'$, on obtient: $\begin{cases} \varphi_T(0)=y(T)=\alpha \\ \varphi_T'(0)=y'(T)=\beta \end{cases}$.
D'où le résultat : $\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\quad y(t+T)=y(T)y_1(t)+y'(T)y_2(t).}$

3 ▷ On note Φ_T l'endomorphisme définit par

$$\Phi_T : \begin{cases} S & \to & S \\ y & \mapsto & (\varphi_T : t\mapsto y(t+T)) \end{cases}$$

[1] https://tinyurl.com/2qyzzrbd

i) $\Leftrightarrow$**ii)** L'existence d'une application non nulle y vérifiant (i) est équivalent à μ est valeur propre de Φ_T .
D'après la question 2) on a

$$\mathrm{Mat}_{(y_1,y_2)}(\Phi_T)=\begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T)\\ y_1'(T) & y_2'(T)\end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\chi_{\Phi_T}(X)=X^2-(y_1(T)+y_2'(T))X+(y_1(T)y_2'(T)-y_1'(T)y_2(T)).$$

D'après la question 1.b) on a $y_1(T)y_2'(T)-y_1'(T)y_2(T)=1$, donc

$$\chi_{\Phi_T}(X)=X^2-(y_1(T)+y_2'(T))X+1.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\textbf{i)} \quad &\Leftrightarrow \quad \mu\in \mathrm{Sp}(\Phi_T)\\ &\Leftrightarrow \quad \chi_{\Phi_T}(\mu)=0\\ &\Leftrightarrow \quad \mu^2-(y_1(T)+y_2'(T))\mu+1=0\\ &\Leftrightarrow \quad \textbf{ii)}\end{aligned}$$

i) $\Leftrightarrow$**iii)**
Supposons **i)**. Soit $y\in S$ non nulle telle que: $\forall t\in\mathbb{R},\ y(t+T)=\mu y(t)$, et posons pour tout $t\in\mathbb{R}$, $u(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}y(t)$.
Donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $y(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}u(t)$ et

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad u(t+T)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{-\lambda T}y(t+T)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{1}{\mu}.\mu y(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}y(t)=u(t),$$

u est donc T-périodique, ainsi **i)** implique **iii)**.

Réciproquement si **iii)** est vraie, alors u est T-périodique et

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad y(t+T)=\mathrm{e}^{\lambda T}\mathrm{e}^{\lambda t}u(t+T)=\mathrm{e}^{\lambda T}\mathrm{e}^{\lambda t}u(t)=\mu y(t),$$

et y est une solution non nulle de (1) par hypothèse: d'où **i)**.

Ce qui donne l'équivalence des trois assertions.

4 $\triangleright$

(4a) On a $\mathrm{Sp}(\Phi_T)=\{\mu_1,\mu_2\}$ avec $\mu_1\neq\mu_2$. Φ_T est diagonalisable et S admet une base $(y_1,\,y_2)$ formée de vecteurs propres de Φ_T .
La question 3. assure l'existence de deux fonctions w_1 , w_2 de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et T-périodiques telles que $y_1:t\mapsto \mathrm{e}^{\lambda_1 t}w_1(t)$ et $y_2:t\mapsto \mathrm{e}^{\lambda_2 t}w_2(t)$.
La forme de χ_{Φ_T} donne $\mu_1.\mu_2=1$ et on a $\mu_1=\mathrm{e}^{\lambda T}$, donc $\mu_2=\mathrm{e}^{-\lambda T}$, par suite $\lambda_1=\lambda$ et $\lambda_2=-\lambda$.
Par conséquent, pour toute solution y de (1) il existe α et β tels que :
$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\quad y(t)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)=\alpha\mathrm{e}^{\lambda t}w_1(t)+\beta\mathrm{e}^{-\lambda t}w_2(t)}$.

(4b) Si $\mu_1=\mu_2$, alors par les relations coefficients-racines on a: $\mu_1^2=1$, donc: $\mu_1\in\{1,-1\}$.
Soit y vecteur propre de Φ_T associé à μ_1, donc y vecteur propre de Φ_T^2 associé à 1, alors $\forall t\in\mathbb{R}$, $y(t+2T)=y(t)$, donc y une solution non nulle et $2T$-périodique de (1) $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Deuxième partie

5 ▷

(5a) On suppose qu'il existe un réel $C \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in V, \|dh(x)\| \leqslant C$.

Soit γ l'application définie sur $[0,1]$ par $t \mapsto x_1 + t(x_2 - x_1)$. V est convexe donc $\gamma(\,[x_1, x_2]) \subset V$ et γ est de classe $\mathscr{C}^1$donc $h \circ \gamma$ est une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, et par la formule de la différentielle de la composée de deux fonctions on a

$$(h \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}h\left(\gamma(t)\right) \circ \gamma'(t) = \left(\mathrm{d}h\left(\gamma(t)\right)\right)(x_2 - x_1)$$

donc

$$h(x_2) - h(x_1) = \int_0^1 (h \circ \gamma)'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\mathrm{d}h\left(\gamma(t)\right)\right)(x_2 - x_1)\mathrm{d}t,$$

et par l'inégalité des normes :

$$\|h(x_2) - h(x_1)\| \leqslant \int_0^1 \|\left(\mathrm{d}h\left(\gamma(t)\right)\right)(x_2 - x_1)\|\mathrm{d}t$$

l'application linéaire $\mathrm{d}h\left(\gamma(t)\right)$ est continue donc

$$\|\left(\mathrm{d}h\left(\gamma(t)\right)\right)(x_2 - x_1)\| \leq \|\mathrm{d}h(\gamma(t))\| . \|x_1 - x_2\| \leq C.\|x_1 - x_2\|$$

d'où $\boxed{\|h(x_2) - h(x_1)\| \leqslant C.\|x_1 - x_2\|}$.

(5b) Considérons l'application $h = \mathrm{Id}_E - f$.

On a $h \in \mathscr{C}^1(U, E)$ et

$$\mathrm{d}h = \mathrm{d}f - \mathrm{d}\left(\mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{d}f - \mathrm{Id}_E = \mathrm{d}f - \mathrm{d}f(a)$$

par suite $\mathrm{d}h(a) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Comme $\mathrm{d}h$ est continue en a, alors il existe $r_1 > 0$ tel que:

$$\forall x \in U \cap B(a, r_1), \|\mathrm{d}h(x) - \mathrm{d}h(0)\| = \|\mathrm{d}h(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$$

U est ouvert donc il existe $r_2 > 0$ tel que $B(a, r_2) \subset U$. Soit $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$, on a $\overline{B(a,r)} \subset U \cap B(a, r_1)$ et donc

$$\forall x \in \overline{B(a,r)}, \|\mathrm{d}h(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$$

la question précédente appliquée au convexe $\overline{B(a,r)}$ donne :

$$\forall (x_1, x_2) \in \overline{B(a,r)}^2, \quad \|h(x_1) - h(x_2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Par l'inégalité triangulaire (bis) on a

$$\begin{aligned}\forall (x_1, x_2) \in \overline{B(a,r)}^2, \quad \|h(x_1) - h(x_2)\| &= \|(x_1 - x_2) - (f(x_1) - f(x_2))\| \\ &\geqslant \|x_1 - x_2\| - \|f(x_1) - f(x_2)\|\end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall (x_1, x_2) \in \overline{B(a,r)}^2, \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \geqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|}$.

(5c) Soit $x \in B(a, r)$ et $h \in \ker(\mathrm{d}f(x))$ donc $\mathrm{d}f(x)(h) = 0_E$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $\|\varepsilon h\| \leq r - \|x - a\|$.

Pour tout $t \in]0, \varepsilon]$ on a

$$\|x + th - a\| \leq \|x - a\| + \|th\| \leq \|x - a\| + \|\varepsilon h\| \leq r$$

donc $x + th \in \overline{B(a,r)}$ et par la question précédente on a

$$\left\|\frac{1}{t}\left(f\left(x + th\right) - f(x)\right)\right\| \geqslant \frac{\|x + th - x\|}{2t} = \frac{\|h\|}{2}$$

comme $\dfrac{1}{t}\left(f\left(x + th\right) - f(x)\right) \underset{t \to 0}{\to} \mathrm{d}f(x)(h) = 0_E$, donc $\|h\| = 0$ et $h = 0_E$.

Ainsi $\boxed{\ker(\mathrm{d}f(x)) = \{0_E\} \text{ et } \mathrm{d}f(x) \text{ est injective}}$.

6 $\triangleright$ Soit $y_0 \in E$ tel que $\|y_0 - f(a)\| \leqslant \dfrac{r}{4}$

(6a) Les fonctions f et $\|\cdot\|$sont continues donc g est continue sur le compact $\overline{B(a,r)}$ (*car fermé et borné en dimension finie*) donc admet un minimum et l'atteint en un x_0 sur $\overline{B(a,r)}$.

Montrons que ce minimum est atteint sur $B(a,r)$. Soit x vérifiant $\|x-a\| = r$, alors

$$\|y_0 - f(x)\| = \|y_0 - f(a) + f(a) - f(x)\| \geqslant \|f(a) - f(x)\| - \|y_0 - f(a)\|$$

comme $\|y_0 - f(a)\| \leqslant \dfrac{r}{4}$ et $\|f(a) - f(x)\| \geqslant \frac{1}{2}\|a - x\|$donc

$$\|y_0 - f(x)\| \geqslant \frac{1}{2}\|x - a\| - \frac{r}{4} = \frac{r}{4}$$

par suite

$$\|y_0 - f(a)\| \leqslant \frac{r}{4} \leqslant \|y_0 - f(x)\|$$

donc $g(x) \geqslant g(a)$.

Si $\|x_0 - a\| = r$ alors $g(a) = g(x_0)$ et le minimum est aussi atteint en a. On en déduit que g atteint son minimum en un point de $B(a,r)$.

(6b) Par l'absurde, supposons que $y_0 \neq f(x_0)$.

D'apres la question 5.c $\mathrm{d}f(x_0)$ est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie, il est donc bijectif.

Soit $h \in E\setminus\{0\}$ tel que $\mathrm{d}f(x_0)\,(h) = (y_0 - f(x_0))$.

Pour tout $0 < t < \dfrac{r - \|x_0 - a\|}{\|h\|}$ (car $x_0 \in B(a,r)$) on a $x_0 + th \in \overline{B(a,r)}$, la différentiabilité de f donne

$$f(x_0 + th) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0).th + \|th\|\varepsilon(th)$$

avec $\varepsilon(th) \underset{t\to 0}{\to} 0$. Donc

$$\begin{aligned}\|y_0 - f(x_0 + th)\| &= \|y_0 - f(x_0) - t\mathrm{d}f(x_0)(h) - t\varepsilon(t)\| \\ &= \|(1-t)(y_0 - f(x_0)) - t\varepsilon(t)\| \\ &\leqslant (1-t)\|y_0 - f(x_0)\| + t\|\varepsilon(t)\|\end{aligned}$$

on a $\|y_0 - f(x_0)\| > 0$, alors pour t suffisamment proche de 0 on a $\|\varepsilon(t)\| < \|y_0 - f(x_0)\|$ et donc

$$\|y_0 - f(x_0 + th)\| < \|y_0 - f(x_0)\|$$

donc $g(x_0 + th) < g(x_0)$, ce qui est contredit le fait que g admet un minimum en $x_0$sur $\overline{B(a,r)}$.

D'où $\boxed{y_0 = f(x_0)}$.

7 $\triangleright$

(7a) On a $W = B(f(a), \frac{r}{4})$ est une boule ouverte donc c'est un ouvert de E .

Comme f est continue de U vers E alors $f^{-1}(W)$ est un ouvert de U , il existe donc un ouvert A de E tel que $f^{-1}(W) = U \cap A$, par suite $V = U \cap A \cap B(a,r)$. Ainsi V est un ouvert de E.

(7b) $f_{|V} : \begin{cases} V & \longrightarrow & W \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$

- On a $V = f^{-1}(W) \cap B(a,r)$ donc $f(V) \subset W$ et $f_{|V}$ est bien définie de V vers W.
- $f_{|V}$ est continue car f l'est .
- Surjectivité :

Soit $y_0 \in W$, alors $\|y_0 - f(a)\| \leqslant \dfrac{r}{4}$ et par la question 6 il existe $x_0 \in B(a,r)$ tel que $y_0 = f(x_0) \in W$, donc $x_0 \in V = f^{-1}(W) \cap B(a,r)$ et $y = f_{|V}(x_0)$ ainsi $\boxed{f_{|V} \text{ est surjective.}}$

- Injectivité :

Soit $x_1, x_2 \in V \subset \overline{B(a,r)}$, d'après 5.b on a $\|f(x_1)-f(x_2)\| \geqslant \dfrac{1}{2}\|x_1-x_2\|$ donc $f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1=x_2$, ainsi $\boxed{f_{|V} \text{ est injective}}$.

Par conséquent $\boxed{f_{|V} \text{ est bijective}}$.

- Continuité de $\left(f_{|V}\right)^{-1}$:

Soit $y_1, y_2 \in W$ et $x_1 = \left(f_{|V}\right)^{-1}(y_1),\ x_2 = \left(f_{|V}\right)^{-1}(y_2) \in V \subset \overline{B(a,r)}$.

La question 5.b donne

$$\left\|\left(f_{|V}\right)^{-1}(y_1) - \left(f_{|V}\right)^{-1}(y_2)\right\| = \|x_1-x_2\| \leqslant 2\|f(x_1)-f(x_2)\| = 2\|y_1-y_2\|.$$

$\left(f_{|V}\right)^{-1}$est 2-lipchitzienne donc elle est continue.

Ainsi $\boxed{f_{|V} \text{ un homéomorphisme de } V \text{ sur } W.}$

Troisième partie

Rappels sur l'exponentielle de matrices :

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

- $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. En particulier $\exp(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}) = I_n$.
- $\det(\exp(A)) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(A)}$.
- $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$
- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(A)) = \left\{\mathrm{e}^{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\right\}$.
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $V \in E_\lambda(A)$ alors $\exp(A)V = \mathrm{e}^{\lambda}V$
- Si $B = PAP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ alors $\exp(B) = P\exp(A)P^{-1}$.
- $\exp(\mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)) = \mathrm{Diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, ..., \mathrm{e}^{\lambda_n})$.
- si $A.B = B.A$ alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ et $A.\exp(B) = \exp(B).A$
- L'application $t \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\dfrac{d}{dt}(\exp(tA)) = A.\exp(tA) = \exp(tA).A$.

8 ▷

(8a) On sait que $\mathbb{C}[A]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathscr{L}_n(\mathbb{C})$ et $(\mathbb{C}[A], +, \times)$ est un anneau commutatif, par suite $(\mathbb{C}[A])^*$ est le groupe des unités de cette anneau. Donc $(\mathbb{C}[A])^*$ est un sous-groupe abélien de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

(8b)
- Par définition de $(\mathbb{C}[A])^*$ on a l'inclusion $(\mathbb{C}[A])^* \subset \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- Soit $M \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$\chi_M(M) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})} \text{ avec } \chi_M(0) = a_0 = (-1)^n \det(M) \neq 0$$

On écrit $\chi_M = XP + a_0$, avec $P \in \mathbb{C}[X]$. L'égalité $\chi_M(M) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$ donne $\mathrm{I}_n = -\frac{1}{a_0}P(M).M$.

On en déduit $\boxed{M^{-1} = -\frac{1}{a_0}P(M)}$, donc $M^{-1} \in \mathbb{C}[M] \subset \mathbb{C}[A]$ et $M \in (\mathbb{C}[A])^*$.

D'où l'égalité $\boxed{\mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}[A])^*}$.

9 ▷ Soit $M \in \mathbb{C}[A]$. On sait que $\exp(M) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}M^n$ est une matrice inversible et $(\exp(M))^{-1} = \exp(-M)$, donc $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

On a $\exp(M) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} M^n$, ce qui montre que $\exp(M)$ est limite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{C}[A]$. Or $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, donc c'est un fermé (*il est donc stable par passage à la limite*), on en déduit que $\exp(M) \in \mathbb{C}[A]$.

Ainsi: $\exp(M) \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}[A])^*$, d'où $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*}$.

10 ▷

(10a) Posons $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ (t,a) & \mapsto & Z_a(t) \end{array} \right.$. Soient (t,a) et (t',a') dans $]0,1[\times\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} (\Phi(t,a) = \Phi(t',a')) &\Leftrightarrow (Z_a(t) = Z_{a'}(t')) \\ &\Leftrightarrow (t + iat(1-t) = t' + iat'(1-t')) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} t = t' \\ at(1-t) = a't'(1-t') \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = t' \\ a = a' \end{array} \right. \quad ((t(1-t) = t'(1-t') \neq 0 \text{ car } t \in]0,1[) \\ &\Leftrightarrow (t,a) = (t',a') \end{aligned}$$

Ce qui prouve que l'application Φ est injective .

(10b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $t \in [0,1]$, $M(t) = Z_a(t)M_1 + (1 - Z_a(t))\, M_2$. C'est un élément de $\mathbb{C}[A]$ pour tout $t \in [0,1]$, puisqu'il est combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{C}[A]$.

Considérons l'application $P : z \mapsto \det(zM_1 + (1-z)\, M_2)$ .On a pour $z \in \mathbb{C}^*$

$$\begin{aligned} \det(zM_1 + (1-z)M_2) &= (-z)^n \det(M_1) \det\left(I_n - (1 - \frac{1}{z})\left(M_1^{-1}M_2\right)\right) \\ &= (-z)^n \det(M_2)\, \chi_{\left(M_1^{-1}M_2\right)}\left(1 - \frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

Comme $P(0) = \det(M_2) \neq 0$ et $P(1) = \det(M_1) \neq 0$, alors on a

$$\begin{aligned} P(z) &= 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{z} \in \mathrm{Sp}(M_1^{-1}M_2) \\ &\Leftrightarrow z \in \left\{ \frac{1}{1-\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(M_1^{-1}M_2) \backslash \{1\} \right\} \end{aligned}$$

L'ensemble $A = \left\{ \frac{1}{1-\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}\left(M_1M_2^{-1}\right) \setminus \{1\} \right\}$ est fini, Φ est injective donc l'ensemble $B = \{a \in \mathbb{R},\ \exists t \in]0,1[, Z_a(t) \in A\}$ est fini (*éventuellement vide*).

Soit $a > \max B$ si $B \neq \varnothing$ (et $a = 1$ si $B = \varnothing$) on a pour tout $t \in [0,1]$, $\det M(t) \neq 0$ et $M(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

D'où l'existence a tel que $\boxed{\forall t \in [0,1], \quad M(t) \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}[A])^*}$.

(10c) L'application $t \mapsto Z_a(t)$ est continue car polynomiale, donc l'application $t \mapsto M(t)$ est continue aussi, à valeurs dans $(\mathbb{C}[A])^*$ et vérifie: $M(0) = M_2$, $M(1) = M_1$. Cela montre que M_1 et M_2 sont reliés dans $(\mathbb{C}[A])^*$ par un chemin continu. Ceci étant valable pour tout couple d'éléments de $(\mathbb{C}[A])^*$, donc $(\mathbb{C}[A])^*$ est connexe par arcs.

11 ▷

(11a) Par application du résultat démontré dans la deuxième partie.

Considérons $\mathbb{C}[A]$ comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel et montrons que l'application $\exp : \mathbb{C}[A] \to (\mathbb{C}[A])^*$ est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$ et de différentielle en $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$ égale à l'identité.

On choisit sur $\mathbb{C}[A]$ une norme $\|\cdot\|$ d'algèbre, elle vérifie : $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ et $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

- Différentiabilité sur $\mathbb{C}[A]$:

Soit M et H dans $\mathbb{C}[A]$ tel que $\|H\| \leqslant 1$. M et H commutent, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\exp(M+H) &= \exp(M)\exp(H) \\
&= \exp(M)\left(I_n + H + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k\right) \\
&= \exp(M) + \exp(M)H + \exp(M)\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k
\end{aligned}$$

remarquons que $H \mapsto \exp(M)H$ linéaire et

$$\left\|\exp(M)\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k\right\| \leqslant \|\exp(M)\|\left\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{H^k}{k!}\right\|$$

par continuité de la norme on a

$$\left\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{H^k}{k!}\right\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|H^k\|}{k!}$$

$\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre donc $\|H^k\| \leq \|H\|^k$ pour tout $k \geq 2$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{H^k}{k!}\right\| &\leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|H\|^k}{k!} \\
&\leq \|H\|^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!} \quad (\text{car } \|H\| \leq 1\,) \\
&\leq \mathrm{e}\,\|H\|^2
\end{aligned}$$

et

$$\left\|\exp(M)\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k\right\| \leqslant \mathrm{e}\|\exp(M)\|\|H\|^2$$

ainsi $\exp(M)\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k = \mathrm{o}(H)$.

On en déduit que $\boxed{\exp(M+H) = \exp(M) + \exp(M)H + \mathrm{o}(H)}$ et donc exp est différentiable en M avec $\boxed{\mathrm{d}\exp(M) : H \mapsto \exp(M).H}$.

- Classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{C}[A]$:

La fonction exp est différentiable sur $\mathbb{C}[A]$, donc elle est continue sur $\mathbb{C}[A]$.

Montrons que $\mathrm{d}\exp$ est continue de $\mathbb{C}[A]$ vers $\mathscr{L}(\mathbb{C}[A])$, sur $\mathscr{L}(\mathbb{C}[A])$ on utilise la norme d'opérateur associée à une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[A]$.

Soit B , C et H dans $\mathbb{C}[A]$ on a

$$\|(\mathrm{d}\exp(B) - \mathrm{d}\exp(C))(H)\| = \|(\exp(B) - \exp(C)).H\| \leq \|(\exp(B) - \exp(C))\|\|H\|$$

donc la norme d'opérateur vérifie

$$\|\mathrm{d}\exp(B) - \mathrm{d}\exp(C)\| \leq \|\exp(B) - \exp(C)\|$$

ce qui prouve la continuité de $\mathrm{d}\exp$.

(*pour* $H = I_n$ *on obtient* $\|\mathrm{d}\exp(B) - \mathrm{d}\exp(C)\| = \|\exp(B) - \exp(C)\|$)

- Finalement, exp est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{C}[A]$ et $\mathrm{d}\exp(0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[A]}$.

Le résultat démontré dans la deuxième partie 2 assure l'existence d'un ouvert U de $\mathbb{C}[A]$ contenant $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$ et un ouvert V de $\mathbb{C}[A]$ contenant $\exp\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}\right) = \mathrm{I}_n$ tels que exp soit bijective et bicontinue de U vers V .

(11b) Soit $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$ montrons qu'il existe un voisinage W de M tel que $W \subset \exp(\mathbb{C}[A])$.

Soit $C \in \mathbb{C}[A]$ tel que: $M = \exp(C)$. Posons $W = \exp(\{C\} + U)$, on a

$$\begin{aligned} W &= \{\exp(C+B) \ / \ B \in U\} \\ &= \{M\exp(B) \ / \ B \in U\} \\ &= \{MC \ / \ C \in V\} \\ &= M.V \end{aligned}$$

On a $M^{-1} \in \mathbb{C}[A]$ donc l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[A] & \to & \mathbb{C}[A] \\ B & \mapsto & M^{-1}B \end{array} \right.$ est bien définie, bijective et elle est linéaire en dimension finie donc continue, ce qui permet d'écrire $W = M.V = \varphi^{-1}(V)$, ainsi W est un ouvert. Comme $I_n \in V$ alors $M \in W$.
On déduit que W est voisinage ouvert de M tel que $W \subset \exp(\mathbb{C}[A])$ par suite $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert dans $\mathbb{C}[A]$.

12 ▷ Montrons qu'il existe un fermé F de $\mathbb{C}[A]$ tel que $\exp(\mathbb{C}[A]) = F \cap \, (\mathbb{C}[A])^*$

- Montrons que $F = \exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $\mathbb{C}[A]$:

Soit $B \in \mathbb{C}[A] \setminus F$. On a $B\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ content B (*comme dans 11.b*).
Montrons que $B\exp(\mathbb{C}[A])$ est contenu dans $\mathbb{C}[A] \setminus F$.

Si il existe $D \in F$ tel que $B\exp(D) \in F$, comme $\exp(D), \exp(-D)$ et $B\exp(D)$ sont dans $\exp(\mathbb{C}[A])$ alors

$$B = [B\exp(D)]\exp(-D) \in \exp(\mathbb{C}[A])$$

ce qui est absurde, donc

$$B\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A] \setminus F.$$

Ainsi $\mathbb{C}[A] \setminus F$ est un ouvert et F est un fermé de $\mathbb{C}[A]$.

- D'après la question 9. $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*$, donc $\exp(\mathbb{C}[A]) = F \cap \, (\mathbb{C}[A])^*$par suite $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $(\mathbb{C}[A])^*$.

Remarque : $(\mathbb{C}[A])^*$ n'est pas un sous espaces vectoriel de $\mathbb{C}[A]$, et il n'a pas de structure d'espace vectoriel normé mais une structure d'espace métrique .

13 ▷ On suppose que $\exp(\mathbb{C}[A]) \neq (\mathbb{C}[A])^*$ soit $M_1, M_2 \in (\mathbb{C}[A])^*$ telles que $M_1 \in \exp(\mathbb{C}[A])$ et $M_2 \notin \exp(\mathbb{C}[A])$.

(13a) Soit f la fonction indicatrice de $(\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$, c'est-à-dire:

$$\begin{array}{ccc} f : (\mathbb{C}[A])^* & \to & \{0,1\} \\ M & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } M \notin \exp(\mathbb{C}[A]), \\ 0 & \text{si } M \in \exp(\mathbb{C}[A]). \end{array} \right. \end{array}$$

On a $f(M_1) = 0$ et $f(M_2) = 1$ donc $f\left((\mathbb{C}[A])^*\right) = \{0,1\}$.
Montrons que f est continue en vérifiant que l'image réciproque de tout fermé de $\{0,1\}$ est un fermé de $(\mathbb{C}[A])^*$.
Les fermés de $\{0,1\}$ sont les fermés de $\mathbb{R}$ inclus dans $\{0,1\}$, ce sont donc toutes les parties de $\{0,1\}$.
On a :

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ($\emptyset$ *est un fermé de* $(\mathbb{C}[A])^*$)
- $f^{-1}(\{0\}) = \exp(\mathbb{C}[A])$ ($\exp(\mathbb{C}[A])$ *est un fermé de* $(\mathbb{C}[A])^*$ *(question 12.)*)
- $f^{-1}(\{1\}) = (\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ ($\exp(\mathbb{C}[A])$ *est un ouvet de* $\mathbb{C}[A]$ *donc ouvert de* $(\mathbb{C}[A])^*$ *(question 11.b)*)
- $f^{-1}(\{0,1\}) = (\mathbb{C}[A])^*$ ($(\mathbb{C}[A])^*$ *est un fermé de* $(\mathbb{C}[A])^*$)

Donc f est continue de $(\mathbb{C}[A])^*$vers $\{0,1\}$.

(13b) La fonction $f : (\mathbb{C}[A])^* \to \mathbb{R}$ est continue et $(\mathbb{C}[A])^*$ connexe par arcs (question 10.c), donc l'image directe $f((\mathbb{C}[A])^*) = \{0, 1\}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$, absurde car les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles .

La supposition du départ est fausse d'où $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) = (\mathbb{C}[A])^*}$.

14 ▷ On a déjà $\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Réciproquement, soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors $A \in (\mathbb{C}[A])^*$, donc par la question précédente $A \in \exp(\mathbb{C}[A])$ or $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$ donc $A \in \exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$. D'où l'inclusion réciproque et l'égalité : $\boxed{\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$.

Quatrième partie

15 ▷ D'après le théorème de Cauchy linéaire, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $X'(t) = A(t)X(t)$ (2) est un sous espace vectoriel le dimension n de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.
Comme dans la partie 1, on vérifie que l'application:

$$\Psi_T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \to & \mathscr{S} \\ Y & \mapsto & (Y_T : t \mapsto Y(t+T)) \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathscr{S}$.
Ψ_T admet donc au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$, et 0 ne peut pas être valeur propre car Ψ_T bijectif et $(\Psi_T)^{-1} = \Psi_{-T}$.
D'où l'existence d'une valeur propre non nulle $\mu \in \mathbb{C}^*$de Ψ_T et $Y \in \mathscr{S}$ est un vecteur propre associé, l'égalité $\Psi(Y) = \mu Y$ se traduit par $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t+T) = \mu Y(t)}$.

16 ▷ Soit $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ une base de $\mathscr{S}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $M(t) = [Y_1(t)|Y_2(t)|\dots|Y_n(t)]$ la matrice dont les colonnes sont $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$

(16a) • Par définition, le wronskien de la famille de solutions $(Y_1, \dots, Y_n)$ est le déterminant de $M(t)$.
Or $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une base de solutions, donc le wronskien n'est jamais nul, donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, M(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$

• On a

$$\begin{array}{rcl} M'(t) & = & [Y_1'(t)|Y_2'(t)|\dots|Y_n'(t)] \\ & = & [(A(t)Y_1(t)|(A(t)Y_2(t)|\dots|(A(t)Y_n(t)] \\ & = & (A(t)\,[Y_1(t)|Y_2(t)|\dots|Y_n(t)] \end{array}$$

d'où le résultat : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\, M'(t) = A(t)M(t)}$.
Les solutions de (2) sont de la forme $t \mapsto M(t)X_0$ avec $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
En général $\dfrac{d}{dt}\exp(X(t)) \neq X'(t)\exp(X(t))$, on ne peut pas dire que $M(t) = \exp(\int A(t)dt)$.

(16b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$, l'application $t \mapsto Y_k(t+T)$ est élément de S (question 15) .
Alors il existe $(\alpha_{i,k})_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , Y_k(t+T) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} Y_i(t)$$

Posons $(E_1, ..., E_n)$ la base canonique $\mathbb{C}^n$, donc $Y_k(t) = M(t)E_k$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
On a pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $j \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned} M(t)^{-1}M(t+T)E_j &= M(t)^{-1}Y_j(t+T) \\ &= M(t)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}Y_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}M(t)^{-1}Y_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}E_i \end{aligned}$$

ce qui prouve que la j ième colonne de $M(t)^{-1}M(t+T)$ est égale à $^\top(\alpha_{1,j},\alpha_{2,j},...,\alpha_{n,j})$, par suite $M(t)^{-1}M(t+T)=(\alpha_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\boxed{M(t)^{-1}M(t+T) \text{ est indépendante de } t\in\mathbb{R}}$.

(16c) On a pour tout $t\in\mathbb{R}$ $M(t)^{-1}M(t+T)=M(0)^{-1}M(T)$, posons $P=M(0)^{-1}M(T)$ alors $P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
D'après la question 14, il existe $C\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(C)=P$, soit $B=\frac{1}{T}C$ alors $\exp(TB)=P$.
Ainsi $\boxed{\forall t\in\mathbb{R}\ , M(t+T)=M(t)\exp(TB)}$.

(16d) Soit $Q:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\\ t & \longmapsto & M(t)\exp(-tB)\end{array}\right.$, on a $Q(t)=\Phi(M(t),\exp(-tB))$ avec Φ: $\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\times\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C})\\ (M,N) & \longmapsto & M.N\end{array}\right.$.
Comme M et $t\mapsto\exp(-tB)$ sont continues et Φ bilinéaire en dimension finies alors Q est continue .
Pour tout $t\in\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} Q(t+T) &= M(t+T)\exp(-(t+T)B) \\ &= M(t)\exp(TB)\exp(-TB)\exp(-tB) \\ &= M(t)\exp(-tB) \\ &= Q(t) \end{aligned}$$

donc Q est continue sur $\mathbb{R}$ et T périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\quad M(t)=Q(t)\exp(tB)}$.

17 ▷ On admet la décomposition de Dunford : Il existe deux matrices D et N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que D est diagonalisable, N est nilpotente et

$$B=D+N \text{ et } DN=ND.$$

Il existe donc une matrice $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale Δ telles que $D=P\Delta P^{-1}$.

(17a) Soit $(E_1,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
Pour $t\in\mathbb{R}$, on pose $M(t)P=[Z_1(t)|Z_2(t)|\dots|Z_n(t)]$

- Vérifions que les Z_i sont dans $\mathscr{S}$.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. On a pour $t\in\mathbb{R}$ $M(t)PE_i=Z_i(t)$ donc

$$\begin{aligned} Z_i'(t) &= M'(t).PE_i \\ &= A(t)M(t)PE_i \\ &= A(t)Z_i(t) \end{aligned}$$

donc Z_i vérifie (2).

- Le wronskien de la famille de solutions $(Z_1,\dots,Z_n)$ est le déterminant de $M(t)P$ qui est non nul, donc $(Z_1,\dots,Z_n)$est une base de $\mathscr{S}$.

(17b) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les nombres complexes tels que $\Delta = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Pour tous $0 \leqslant i \leqslant n-1, 1 \leqslant k \leqslant n$ et $t \in \mathbb{R}$, on note $R_{i,k}(t)$ la k-ième colonne de la matrice $\dfrac{1}{i!}Q(t)N^iP$.

Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} Z_k(t) &= M(t)PE_k \\ &= Q(t)\exp(tB)PE_k \\ &= Q(t)\exp(tD+tN)PE_k, \end{aligned}$$

les matrices D et N commutent, donc $\boxed{\exp(tD+tN) = \exp(tN)\exp(tD)}$.

Comme $D = P\Delta P^{-1}$ alors $\boxed{\exp(tD) = P\exp(t\Delta)P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}\left(\mathrm{e}^{t\lambda_1}, \mathrm{e}^{t\lambda_2}, \ldots, \mathrm{e}^{t\lambda_n}\right)P^{-1}}$ et

$$\begin{aligned} Z_k(t) &= Q(t)\exp(tN)\exp(tD)PE_k \\ &= Q(t)\exp(tN)P\exp(t\Delta)P^{-1}PE_k \\ &= Q(t)\exp(tN)P\exp(t\Delta)E_k \end{aligned}$$

Or $\exp(t\Delta)E_k = \mathrm{e}^{t\lambda_k}E_k$ donc

$$Z_k(t) = \mathrm{e}^{t\lambda_k}Q(t)\exp(tN)PE_k$$

N est nilpotente d'ordre au plus n donc $\exp(tN) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}N^i$.

On en déduit :

$$Z_k(t) = \mathrm{e}^{t\lambda_k}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}Q(t)N^iPE_k = \mathrm{e}^{t\lambda_k}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}R_{i,k}(t).$$

Ainsi $\boxed{Z_k(t) = \mathrm{e}^{t\lambda_k}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}R_{i,k}(t)}$.

La continuité et la périodicité des $R_{i,k}$ découlent de celles de Q .

(17c) On suppose que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$.

Soit Y une solution de (2), alors il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tel que $Y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k Z_k$. Or

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall t \in \mathbb{R},\ |Z_k(t)| \leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t}\sum_{i=0}^{+\infty}|t|^i\,|R_{i,k}(t)|$$

les $R_{i,k}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ car elles sont continues et périodiques et les $\mathrm{Re}\,(\lambda_k) < 0$, donc $\forall k \in [\![1, n]\!],\ Z_k(t) \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} 0$,

par suite $\boxed{Y(t) \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} 0}$.

18 ▷

(18a) Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ tel que $\lambda = i\dfrac{2k\pi}{mT}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit V un vecteur propre de B associé à λ.

L'application $Y : t \mapsto M(t)V$ est solution non nulle de (2) (car $M'(t) = A(t)M(t)$).

Par continuité de l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ (M, X) & \longmapsto & M.X \end{array}\right.$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \exp(tB)V &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{t^\ell}{\ell!}B^\ell V \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{t^\ell}{\ell!}\lambda^\ell V \\ &= \mathrm{e}^{t\lambda}V \end{aligned}$$

donc $Y(t) = Q(t)\exp(tB)V = \mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)V$.

Comme $mT\lambda = 2ik\pi \in 2i\pi\mathbb{Z}$ et Q est T périodique alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Y(t+mT) = \mathrm{e}^{\lambda(t+mT)}Q(t+mT)V = \mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)V = Y(t)$$

Ainsi Y est une solution non nulle de (2) et mT-périodique.

(18b) Soit Y une solution mT-périodique et non nulle.
Il existe $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que: $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = M(t)X_0 = Q(t)\exp(tB)X_0$.
Comme $Y(mT) = Y(0)$ alors $M(T)X_0 = M(0)X_0$ et

$$Q(mT)\exp(mTB)X_0 = Q(0)X_0.$$

Comme Q est T-périodique donc $Q(mT) = Q(0)$ et

$$Q(0)\exp(mTB)X_0 = Q(0)X_0.$$

or Q est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ donc

$$\exp(mTB)X_0 = \exp(TB)^m X_0 = X_0.$$

cela montre que 1 est une valeur propre de $\exp(TB)^m$.
Or $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\left(\exp(TB)^m\right) = \{\lambda^m \mid \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(TB))\}$ (*car toute les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables*) donc il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(TB))$ tel que $\lambda^m = 1$, d'où le résultat .

19 ▷ Pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$, on a X et X' sont T-périodiques et T'-périodiques de X et A est T-périodique, donc X et X' sont $kT+\ell T'$-périodiques par suite

$$X'(t+kT+\ell T') = A(t+kT+\ell T')X(t+kT+\ell T') = A(t+kT+\ell T')X(t).$$

Posons $G = \mathbb{Z}T' + \mathbb{Z}T$, qui est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, engendré par T et T', on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall g \in G, \quad X'(t) = A(t+g)X(t).$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall g \in G, \quad A(t)X(t) = A(t+g)X(t)\ (*)$$

Le sous groupe G est soit dense dans $\mathbb{R}$ soit de la forme $\mathbb{Z}a$.
Si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = \mathbb{Z}a$ alors il existe $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $T = ak$ et $T' = a\ell$, de plus $(k,\ell) \neq (0,0)$ car $(T,T') \neq (0,0)$.
On en déduit que $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{\ell}{k} \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit l'hypothèse sur T'.Ainsi G est dense dans $\mathbb{R}$.
Soient $t,u \in \mathbb{R}$ et $(g_m)_{m\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $u-t$, alors par continuité de A

$$A\left(t+g_m\right) \underset{m\to+\infty}{\to} A(t+u-t) = A(u)$$

par suite

$$A\left(t+g_m\right)X(t) \underset{m\to+\infty}{\to} A(u)X(t),$$

mais pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A(t)X(t) = A\left(t+g_m\right)X(t)$, donc

$$A\left(t+g_m\right)X(t) \underset{m\to+\infty}{\to} A(t)X(t).$$

Par unicité de la limite on a $\boxed{\forall t,u \in \mathbb{R}, A(t)X(t) = A(u)X(t)}$.

20 ▷ ► Cas 1 : Si $n = 1$.
$A = a$ une constante complexe, l'équation devient scalaire $x'(t) = ax(t)$ et admet comme solutions les fonctions $t \mapsto \lambda e^{at}$, on n'a une solution T'- périodique avec $T' > 0$ si et seulement si $a \in \dfrac{2i\pi}{T'}\mathbb{Z}$. Dans ce cas on peut prendre $Q = \lambda$ et $B = a$.

► Cas 2 : Si $n \geq 2$.

- Cherchons les solutions T'-périodique non nulle avec $T' \notin \mathbb{Q}T$.

Soit X une solution T'-périodique non nulle avec $T' \notin QT$. Posons $V = \text{Vect}(X(t)\ ; t \in \mathbb{R})$, c'est un sous espace de dimension finie de $\mathbb{C}^n$, il est donc fermé.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$on a

$$\frac{1}{h}\left(X(t+h) - X(t)\right) \in V$$

or V est fermé, donc $X'(t) \in V$. Comme $\forall t \in \mathbb{R},\ A(t)X(t) = X'(t)$ alors $A(t)V \subset V$ (V est stable par $A(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$).
Par hypothèse et puisque $V \neq \{0\}$ on a donc $V = \mathbb{C}^n$. Soient $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ tels que $\left(X\left(t_1\right), \ldots, X\left(t_n\right)\right)$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.
Alors d'après la question 19 on a, pour tout $u \in \mathbb{R}$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$A(u)X\left(t_i\right) = A\left(t_i\right)X\left(t_i\right)$$

Ainsi, $A(u)$ est déterminé sur une base de $\mathbb{C}^n$ de façon indépendante de u, donc A est constante.
Soit Y un vecteur propre de $A(0)$. Alors $\mathbb{C}Y$ est stable, par $A(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, qui est différent de $\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$, ce qui contredit l'hypothèse sur A .
Donc il n'existe pas de solution T'-périodique non nulle avec $T' \notin \mathbb{Q}T$.

- Cherchons les solutions T'-périodique non nulle avec $T' \in \mathbb{Q}T$.

Soit X une solution T'-périodique avec $T' = \frac{m}{q}T$, $m, q \in \mathbb{N}^*$, donc X est mT-périodique et d'après la question 18.b), il existe $k \in \mathbb{Z}$ telle que:

$$e^{\frac{2ik\pi}{m}} \in \text{Sp}(\exp(TB)) = \left\{e^{T\lambda}; \lambda \in \text{Sp}(B)\right\}$$

Il existe donc $\lambda \in \text{Sp}(B)$ tel que $e^{T\lambda} = e^{\frac{2ik\pi}{m}}$ donc il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que

$$T\lambda = \frac{2ik\pi}{m} + 2i\ell\pi = \frac{2i(k+\ell m)\pi}{m}$$

Donc une condition nécessaire à l'existence de solutions T'-périodiques non nulle avec $T' \in QT$ est : B possède une valeur propre de la forme $\lambda \in \frac{2i\pi}{T}\mathbb{Q}$.

Réciproquement si B possède une valeur propre de la forme $\lambda \in \frac{2i\pi}{T}\mathbb{Q}$, la question 18.a assure l'existence d'une solution non nulle et mT-périodique .

Finalement l'équation (2) admet une solution périodique non nulle si et seulement si : $\boxed{\begin{cases} n = 1 \text{ et } A \in \dfrac{2i\pi}{T'}\mathbb{Z}\ , T' > 0 \\ n = 2 \text{ et } \text{Sp}(B) \cap \dfrac{2i\pi}{T}\mathbb{Q} \neq \varnothing \end{cases}}$.

Ce qui est équivalent à : $\boxed{B \text{ admet une valeur propre de la forme } \dfrac{2ik\pi}{mT} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } m \in \mathbb{N}^*}$.

21 ▷ Le théorème de Cauchy assure l'existence des solutions de (3) et que l'ensemble $\mathscr{S}_3$ des solutions de (3) s'écrit de la forme

$$\mathscr{S}_3 = \{X_p\} + \mathscr{S}_2$$

avec X_p est une solution particulière de (3) et $\mathscr{S}_2$ l'ensemble des solutions de (2) .
Soit $X \in \mathscr{S}_3$ donc il existe $V \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$X(t) = M(t)V + X_p(t) = Q(t)\exp(tB)V + X_p(t)$$

- Si X est T-périodique alors $X(0)=X(T)$ et

$$Q(0)V+X_p(0)=Q(T)\exp(TB)V+X_p(T)=Q(0)\exp(TB)V+X_p(T)$$

donc

$$Q(0)[\exp(TB)-I_n]V=X_p(0)-X_p(T)$$

Par hypothèse on a $1\notin\mathrm{Sp}(\exp(TB))$, alors $\exp(TB)-I_n$ est inversible et

$$V=[\exp(TB)-I_n]^{-1}[Q(0)]^{-1}(X_p(0)-X_p(T))\quad(*)$$

ce qui prouve l'unicité sous réserve d'existence.

- Soit V définit par la relation (*) et $X: t\mapsto M(t)V+X_p(t)$.

On a $X(0)=X(T)$ par construction de V. Soit $Y: t\mapsto X(t+T)$, elle est donc dérivable.
Pour tout $t\in\mathbb{R}$ on a

$$\begin{array}{rcl} Y'(t) & = & X'(t+T) \\ & = & A(t+T)X(t+T)+b(t+T) \\ & = & A(t)Y(t)+b(t)\quad (A \text{ et } b \text{ sont } T\text{-périodique}) \end{array}$$

Donc X et Y sont solutions du problème de Cauchy formé par $Z'=AZ+b$ et la condition initiale $Z(0)=X(0)$.
Par unicité de la solution de ce problème on a $Y=X$, donc X est une solution de (3) T-périodique, d'où l'existence.

Finalement, (3) possède une unique solution T-périodique.

22 ▷ Posons $X(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A(t)=\begin{pmatrix} 1 & -\cos(t) \\ \cos(t) & 1 \end{pmatrix}$, le système s'écrit $X'(t)=A(t)X(t)$.
Notons $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A(t)=I_2+\cos(t)J$.

On a $\chi_J(X)=X^2+1$, donc J est diagonalisable, un petit calcul donne $\boxed{J=P\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}P^{-1},\quad \text{avec :}\quad P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}}$

donc

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad A(t)=PDP^{-1}=P\begin{pmatrix} 1+i\cos(t) & 0 \\ 0 & 1-i\cos(t) \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Posons $X=PY$ alors

$$X'(t)=A(t)X(t)\Leftrightarrow PY'(t)=A(t)PY(t)\Leftrightarrow Y'(t)=DY(t)$$

Notons $Y(t)=\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ donc

$$Y'(t)=DY(t)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} u'(t)=(1+i\cos(t))u(t) \\ v'(t)=(1-i\cos(t))v(t) \end{array}\right.$$

ainsi il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ tels que $\boxed{Y(t)=\begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{t+i\sin(t)} \\ \mu \mathrm{e}^{t-i\sin(t)} \end{pmatrix}}$ et $\boxed{X(t)=PY(t)=\begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{t+i\sin t}+\mu \mathrm{e}^{t-i\sin t} \\ -i\lambda \mathrm{e}^{t+i\sin t}+i\mu \mathrm{e}^{t-i\sin t} \end{pmatrix}}$.

On a $X(t)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t+i\sin t} & \mathrm{e}^{t-i\sin t} \\ -i\mathrm{e}^{t+i\sin t} & i\mathrm{e}^{t-i\sin t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ on prend donc

$$M(t)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t+i\sin t} & \mathrm{e}^{t-i\sin t} \\ -i\mathrm{e}^{t+i\sin t} & i\mathrm{e}^{t-i\sin t} \end{pmatrix}=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\sin t} & \mathrm{e}^{-i\sin t} \\ -i\mathrm{e}^{i\sin t} & i\mathrm{e}^{-i\sin t} \end{pmatrix}$$

Il suffit de poser $\boxed{B=\mathrm{I}_n \text{ et } Q(t)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\sin t} & \mathrm{e}^{-i\sin t} \\ -i\mathrm{e}^{i\sin t} & i\mathrm{e}^{-i\sin t} \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\sin t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\sin t} \end{pmatrix}P^{-1}}$ pour mettre M sous la

forme $M(t) = Q(t)\exp(tB)$ avec $Q : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ continue et 2π-périodique.
Une autre forme normale réelle :
On a

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(\lambda \mathrm{e}^{i\sin t} + \mu \mathrm{e}^{-i\sin t}) \\ \mathrm{e}^t(-i\lambda \mathrm{e}^{i\sin t} + i\mu \mathrm{e}^{-i\sin t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(\lambda \mathrm{e}^{i\sin t} + \mu \mathrm{e}^{-i\sin t}) \\ \mathrm{e}^t(-i\lambda \mathrm{e}^{i\sin t} + i\mu \mathrm{e}^{-i\sin t}) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} (\lambda+\mu)\cos(\sin t) + i(\lambda-\mu)\sin(\sin t) \\ i(-\lambda+\mu)\cos(\sin t) + (\lambda+\mu)\sin(\sin t) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(\sin t) & -\sin(\sin t) \\ \sin(\sin t) & \cos(\sin t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda+\mu \\ i(-\lambda+\mu) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on prend donc $\boxed{M(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t\cos(\sin(t)) & -\mathrm{e}^t\sin(\sin(t)) \\ \mathrm{e}^t\sin(\sin(t)) & \mathrm{e}^t\cos(\sin(t)) \end{pmatrix}, B = \mathrm{I}_n \text{ et } Q(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sin t) & -\sin(\sin t) \\ \sin(\sin t) & \cos(\sin t) \end{pmatrix}}$.