

# concours externe de recrutement de professeurs certifiés

## deuxième composition de mathématiques



### Notations et objectifs du problème

Dans tout le problème,  $P$  désigne un plan affine euclidien orienté,  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct de  $P$ . Les coordonnées et les affixes des points de  $P$  (resp. des vecteurs du plan vectoriel associé) sont définies par rapport au repère  $\mathcal{R}$  (resp. à la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ ).

Soit  $D_1$  et  $D_2$  deux droites de  $P$  de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ , et  $\theta$  un nombre réel. On rappelle que  $\theta$  est une mesure de l'angle orienté du couple de droites  $(D_1, D_2)$  si, et seulement si,  $\theta$  ou  $\theta + \pi$  est une mesure de l'angle orienté du couple de vecteurs  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ .

Étant donné trois droites  $D, D_1, D_2$  du plan  $P$ , on dit que  $D_1$  et  $D_2$  sont symétriquement inclinées sur  $D$  si, et seulement si, les angles orientés des couples de droites  $(D, D_1)$  et  $(D, D_2)$  ont des mesures opposées modulo  $\pi$ .

Le problème est consacré à quelques questions relatives à la notion de points cocycliques. La partie I relie à la notion de deux droites symétriquement inclinées sur une même troisième. Les parties IV et V étudient plusieurs configurations associées à des points cocycliques d'une conique. Cette étude s'appuie sur la généralisation à une conique quelconque de la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle (parties II et III).

### Préliminaires

1. Soit  $Q(X) = a_0 X^4 + a_1 X^3 + a_2 X^2 + a_3 X + a_4$  un polynôme de degré 4 à coefficients complexes  $a_j$ ,  $0 \leq j \leq 4$ . On note  $x_1, x_2, x_3, x_4$  ses quatre racines complexes, distinctes ou non, et on pose :

$$\sigma_1 = \sum_{1 \leq j \leq 4} x_j, \quad \sigma_2 = \sum_{1 \leq j < k \leq 4} x_j x_k, \quad \sigma_3 = \sum_{1 \leq j < k < l \leq 4} x_j x_k x_l, \quad \sigma_4 = x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Exprimer, sans démonstration, les nombres complexes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$  en fonction des coefficients  $a_0, a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$ .

2. Soit  $D_1$  et  $D_2$  deux droites de  $P$  de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ . On note  $z_1, z_2$ , les affixes de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ . Soit  $\theta$  un nombre réel.

2.1. Donner, sans démonstration, une propriété du nombre complexe  $\frac{z_2}{z_1} e^{-i\theta}$  qui soit équivalente à l'égalité  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \theta \pmod{2\pi}$ .

2.2. En déduire une propriété du nombre complexe  $\frac{z_2}{z_1} e^{-i\theta}$  qui soit équivalente à l'égalité :

$$(D_1, D_2) = \theta \pmod{\pi}.$$

3. Soit  $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ .

3.1. Préciser, sans démonstration, la nature et les éléments de la transformation  $\phi$  du plan  $P$  définie analytiquement dans le repère  $\mathcal{R}$  par la représentation :  $x' = \lambda x + \alpha$ ,  $y' = \lambda y + \beta$ .

3.2. Soit  $\Gamma$  une courbe d'équation, dans le repère  $\mathcal{R}$ ,  $f(x, y) = 0$ , où  $f$  désigne une application de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que l'ensemble  $\Gamma'$  défini par l'équation  $f(\lambda x + \alpha, \lambda y + \beta) = 0$  se déduit de  $\Gamma$  par une transformation qu'on exprimera au moyen de  $\phi$ .

**I. Droites symétriquement inclinées et points cocycliques.**

I.1. Soit trois droites  $D, D_1, D_2$  du plan  $P$ ,  $\vec{v}$  un vecteur directeur de  $D$  d'affixe  $z$ ,  $\vec{v}_j$  un vecteur directeur de  $D_j$ , d'affixe  $z_j$ ,  $1 \leq j \leq 2$ .

Montrer, au moyen des préliminaires que  $D_1$  et  $D_2$  sont symétriquement inclinées sur  $D$  si, et seulement si,  $\frac{z_1 z_2}{z^2}$  est réel.

En déduire que, lorsque  $D_1$  et  $D_2$  sont parallèles, elles sont symétriquement inclinées sur  $D$  si, et seulement si, elles sont soit parallèles à  $D$ , soit perpendiculaires à  $D$ .

I.2. Soit  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , quatre points distincts d'un cercle  $C$  du plan  $P$ . Pour  $1 \leq j \leq 4$ , on note  $z_j$  l'affixe de  $A_j$ . On suppose que les droites  $(A_1 A_2)$  et  $(A_3 A_4)$  sont symétriquement inclinées sur une droite  $D$  de  $P$ .

I.2.1. Montrer que  $\frac{(z_3 - z_4)(z_2 - z_1)}{(z_3 - z_1)(z_2 - z_4)}$  est un nombre réel.

I.2.2. Montrer que les droites  $(A_1 A_3)$  et  $(A_2 A_4)$  sont symétriquement inclinées sur  $D$ . En est-il de même pour les droites  $(A_1 A_4)$  et  $(A_2 A_3)$ ?

I.3. Soit  $A_1, A_2, A_3$ , trois points distincts d'un cercle  $C$  du plan  $P$  et  $T$  la tangente en  $A_1$  à  $C$ . Pour  $1 \leq j \leq 3$ , on note  $z_j$  l'affixe de  $A_j$ . On note  $t$  l'affixe d'un vecteur directeur de  $T$ , et on suppose que les droites  $(A_1 A_2)$  et  $(A_1 A_3)$  sont symétriquement inclinées sur une droite  $D$  de  $P$ .

I.3.1. Montrer que  $\frac{(z_3 - z_2)t}{(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)}$  est un nombre réel.

I.3.2. Montrer que les droites  $T$  et  $(A_2 A_3)$  sont symétriquement inclinées sur  $D$ .

**II. Puissance d'un point par rapport à une conique.**

Soit  $\Gamma$  une conique et  $S$  un point du plan  $P$ . On se propose de définir la notion de puissance du point  $S$  par rapport à la conique  $\Gamma$  en commençant par le cas où  $\Gamma$  est un cercle. Pour cela on considère une droite quelconque  $\Delta$  passant par  $S$ , munie d'un vecteur directeur unitaire  $\vec{u}$  par rapport auquel sont définies les mesures algébriques.

II.1. On suppose, dans cette question II.1. seulement, que  $\Gamma$  est un cercle de centre  $I$  et de rayon  $R, R > 0$ .

II.1.1. On suppose que  $\Delta$  coupe  $\Gamma$  en deux points distincts  $A$  et  $B$  et on pose  $p = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$ . Soit  $A'$  le point de  $\Gamma$  diamétralement opposé à  $A$ . Montrer que  $p = \overline{SA'} \cdot \overline{SA'}$ . Exprimer  $p$  en fonction de  $SI$  et de  $R$ .

Le nombre  $p$ , qui ne dépend que de  $S$  et de  $\Gamma$ , s'appelle la puissance du point  $S$  par rapport au cercle  $\Gamma$  et sera noté  $\Gamma(S)$ .

II.1.2. On suppose que  $\Delta$  est tangente à  $\Gamma$  en un point  $M_0$ . Montrer que  $\Gamma(S) = SM_0^2$ .

II.2. On suppose maintenant que  $\Gamma$  n'est pas un cercle. Soit  $e$  son excentricité,  $D$  son axe focal, c'est-à-dire l'axe de symétrie qui contient son (ou ses) foyer(s). On note  $\theta$  une mesure de l'angle orienté du couple de droites  $(D, \Delta)$ .

On se propose de montrer que, lorsque  $\Delta$  coupe  $\Gamma$  en deux points  $A$  et  $B$ , le produit  $(1 - e^2 \cos^2 \theta) \overline{SA} \cdot \overline{SB}$  ne dépend que de  $S$  et de  $\Gamma$ . Pour cela on suppose, dans cette question II.2., le repère  $\mathcal{R}$  choisi de façon que  $D = (O, \vec{i})$ .

II.2.1. Montrer que  $\Gamma$  peut être définie, dans le repère  $\mathcal{R}$ , par l'équation  $f(x, y) = 0$ , avec  $f(x, y) = (1 - e^2)x^2 + y^2 + u_1 x + u_2$ ,  $u_1$  et  $u_2$  désignant deux constantes réelles.

II.2.2. On note  $(x_0, y_0)$  les coordonnées de S. Soit M un point de  $\Delta$ . On pose  $\lambda = \overline{SM}$ .

Exprimer les coordonnées  $x$  et  $y$  de M au moyen de  $x_0, y_0, \theta$  et  $\lambda$ . En déduire que M appartient à  $\Gamma$  si, et seulement si,  $\lambda$  est racine d'une équation de la forme  $(1 - e^2 \cos^2 \theta) X^2 + \beta X + \gamma = 0$  où  $\beta$  et  $\gamma$  sont deux réels qu'on exprimera au moyen de  $\theta, x_0, y_0, e, u_1$  et  $u_2$ .

II.2.3. On suppose que  $\Delta$  coupe  $\Gamma$  en deux points distincts A et B. Montrer que le réel  $p$  défini par  $p = (1 - e^2 \cos^2 \theta) \overline{SA} \cdot \overline{SB}$  ne dépend que de S et de  $\Gamma$  et en donner une expression en fonction de  $x_0, y_0, e, u_1$  et  $u_2$ .

$p$  s'appelle la puissance du point S par rapport à la conique  $\Gamma$  et sera noté  $\Gamma(S)$ .

II.2.4. On suppose que  $\Delta$  est tangente à  $\Gamma$  en un point  $M_0$ . Montrer qu'on a alors  $1 - e^2 \cos^2 \theta \neq 0$ , puis que  $\Gamma(S) = (1 - e^2 \cos^2 \theta) SM_0^2$ .

### III. Lignes de niveau de l'application $S \mapsto \Gamma(S)$ .

Soit  $\Gamma$  une conique du plan P.

A tout réel  $r$  on associe l'ensemble  $\Gamma_r = \{S \in P \mid \Gamma(S) = r\}$ .

On pose  $U = \{r \in \mathbb{R} \mid \Gamma_r = \emptyset\}$ ,  $V = \{r \in \mathbb{R} \mid \Gamma_r \text{ est réduit à un point}\}$ ,  $W = \mathbb{R} \setminus (U \cup V)$ .

III.1. On suppose que  $\Gamma$  est un cercle de centre I et de rayon R. Préciser, au moyen du réel R, les trois ensembles U, V et W et décrire  $\Gamma_r$  pour  $r \in W$ .

III.2. On suppose que  $\Gamma$  n'est pas un cercle.

III.2.1. Montrer que  $\Gamma = \Gamma_0$  et en déduire que  $0 \in W$ .

III.2.2. On suppose que  $\Gamma$  est une ellipse, d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  dans le repère  $\mathcal{R}$ , avec  $0 < b < a$ .

Déterminer les trois ensembles U, V et W, puis montrer que, pour tout réel  $r$  appartenant à W,  $\Gamma_r$  est l'image de  $\Gamma$  par une transformation géométrique dont on précisera la nature et les éléments.

III.2.3. Répondre aux questions III.2.2. dans le cas où  $\Gamma$  est la parabole d'équation  $y^2 = 2ax$  dans le repère  $\mathcal{R}$ , avec  $a > 0$ .

III.2.4. On suppose que  $\Gamma$  est une hyperbole, d'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  dans le repère  $\mathcal{R}$ , avec  $a > 0$  et  $b > 0$ .

a. Décrire l'ensemble  $\Gamma_b$ .

b. Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma' = \Gamma_{2b^2}$ .

c. On suppose  $r \neq b^2$ . Montrer que, selon la valeur du réel  $r$ ,  $\Gamma_r$  est l'image de  $\Gamma$  ou de  $\Gamma'$  par une transformation géométrique dont on précisera la nature et les éléments.

### IV. Points cocycliques sur une conique.

Dans toute cette partie,  $\Gamma$  désigne une conique du plan P qui n'est pas un cercle. On note D son axe focal et on considère des points distincts  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sur  $\Gamma$ .

IV.1. On suppose que les droites  $(A_1 A_2)$  et  $(A_3 A_4)$  sont sécantes en un point S.

IV.1.1. Montrer que S est différent de  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ .

IV.1.2. Les mesures algébriques sur les droites  $(A_1 A_2)$  et  $(A_3 A_4)$  étant définies par rapport à des vecteurs unitaires, montrer que  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sont cocycliques si, et seulement si,  $\overline{SA_1} \cdot \overline{SA_2} = \overline{SA_3} \cdot \overline{SA_4}$  (on pourra utiliser II.1.1.).

IV.1.3. Montrer que les points  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sont cocycliques si, et seulement si, les droites  $(A_1 A_2)$  et  $(A_3 A_4)$  sont symétriquement inclinées sur la droite D.

## 2ème composition 4/5

IV.2. On suppose les droites  $(A_1 A_2)$  et  $(A_3 A_4)$  parallèles.

IV.2.1. L'équivalence montrée en IV.1.3. est-elle encore vraie (on pourra utiliser I.2.2.) ?

IV.2.2. Montrer que les points  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sont cocycliques si, et seulement si, les droites  $(A_1 A_2)$  et  $(A_3 A_4)$  sont perpendiculaires à un même axe de symétrie de  $\Gamma$ .

IV.3. On suppose que la tangente  $T_1$  à  $\Gamma$  en  $A_1$  et la droite  $(A_2 A_3)$  sont sécantes en un point  $S$ . On appelle  $C$  le cercle circonscrit au triangle  $A_1 A_2 A_3$ .

IV.3.1. Montrer que  $S$  est différent de  $A_1, A_2$  et  $A_3$ .

IV.3.2. Les mesures algébriques sur la droite  $(A_2 A_3)$  étant définies par rapport à un vecteur unitaire, montrer que  $T_1$  est la tangente à  $C$  en  $A_1$  si, et seulement si,  $SA_1^2 = \overline{SA_2} \cdot \overline{SA_3}$  (on pourra utiliser II.1.2.).

IV.3.3. Montrer que  $T_1$  est la tangente à  $C$  en  $A_1$  si, et seulement si, les droites  $(A_1 A_2)$  et  $(A_1 A_3)$  sont symétriquement inclinées sur la droite  $D$ .

IV.4. On suppose que la tangente  $T_1$  à  $\Gamma$  en  $A_1$  et la tangente  $T_2$  à  $\Gamma$  en  $A_2$  sont sécantes en un point  $S$ .

IV.4.1. Montrer que  $S$  est différent de  $A_1$  et  $A_2$ .

IV.4.2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un cercle  $C$  tangent à  $T_1$  en  $A_1$  et à  $T_2$  en  $A_2$  ;

(ii)  $SA_1 = SA_2$  ;

(iii)  $T_1$  et  $T_2$  sont symétriquement inclinées sur la droite  $D$ .

IV.4.3. On suppose que les propriétés (i), (ii) et (iii) ci-dessus sont satisfaites. On note  $D_1$  la parallèle à  $D$  passant par  $S$ ,  $\phi_1$  la réflexion d'axe  $D_1$ ,  $D'_1$  la perpendiculaire à  $D$  passant par  $S$ ,  $\phi'_1$  la réflexion d'axe  $D'_1$ . On pose  $\phi = \phi_1 \circ \phi'_1$ .

a. Reconnaître la transformation  $\phi$ .

b. Quelle est l'image de  $T_1$  par  $\phi_1$  ? En déduire que  $\phi_1(A_1)$  appartient à l'ensemble  $\{A_2, \phi(A_2)\}$ .

c. Montrer que  $A_2$  appartient à l'ensemble  $\{\phi_1(A_1), \phi'_1(A_1)\}$ .

IV.4.4. Montrer que les propriétés (i), (ii) et (iii) de la question IV.4.2. sont encore équivalentes à : la droite  $(A_1 A_2)$  est perpendiculaire à un axe de symétrie de  $\Gamma$ .

### V. Cas de l'ellipse.

Dans cette partie,  $\Gamma$  désigne une ellipse, d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  dans le repère  $\mathcal{A}$ , avec  $0 < b < a$ .

On pose  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

On note ici  $U$  l'ensemble des nombres complexes de module 1 et, à tout élément  $u$  de  $U$ , on associe

le point  $M(u)$  du plan  $P$  de coordonnées  $x = a \frac{u + \bar{u}}{2}$ ,  $y = b \frac{u - \bar{u}}{2i}$ .

V.1. Montrer que l'application  $u \mapsto M(u)$  est une bijection de  $U$  sur  $\Gamma$ .

V.2.  $C$  désigne un cercle d'équation  $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$  dans le repère  $\mathcal{A}$ .

V.2.1. Déterminer un polynôme  $Q_C(X)$  de degré 4, à coefficients complexes, de coefficient dominant  $c^2$ , dont les autres coefficients sont des polynômes en  $a, b, \alpha, \beta, \gamma$  qu'on précisera, et qui vérifie la propriété suivante :  $(\forall u, u \in U) [(M(u) \in C \cap \Gamma) \iff Q_C(u) = 0]$ .

Le polynôme  $Q_C(X)$  ainsi construit est appelé polynôme associé au cercle  $C$ .

V.2.2. On suppose que  $C \cap \Gamma$  est un ensemble de quatre points (distincts)  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$ . Pour  $1 \leq j \leq 4$ , on pose  $M_j = M(u_j)$ ,  $u_j \in U$ .

Montrer que  $u_1 u_2 u_3 u_4 = 1$ .

- 
- V.3. Soit  $M_1 = M(u_1)$ ,  $M_2 = M(u_2)$ ,  $M_3 = M(u_3)$  et  $M_4 = M(u_4)$ ,  $u_j \in U$  pour  $1 \leq j \leq 4$ , quatre points distincts de  $\Gamma$ . Montrer que ces points sont cocycliques si, et seulement si,  $u_1 u_2 u_3 u_4 = 1$ .
- V.4. Soit  $M_0 = M(u_0)$  un point de  $\Gamma$ .  $u_0 \in U$ .
- V.4.1. Montrer qu'il existe un unique cercle  $C_0$  tel que  $u_0$  soit racine d'ordre de multiplicité au moins égal à 3 du polynôme  $Q_{C_0}(X)$  associé à  $C_0$ .  
 $C_0$  s'appelle le cercle osculateur à l'ellipse  $\Gamma$  au point  $M_0$ .
- V.4.2. Exprimer, en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $u_0$ , les coordonnées du centre  $\Omega_0$  de  $C_0$ .
- V.4.3. Montrer que  $C_0$  et  $\Gamma$  ont la même tangente  $T_0$  au point  $M_0$ .
- V.4.4. Comment doit-on choisir  $M_0$  sur  $\Gamma$  pour avoir  $C_0 \cap \Gamma = \{M_0\}$ ?
- V.4.5. On suppose que  $M_0$  n'est pas choisi de cette manière.  
Montrer que  $C_0$  recoupe  $\Gamma$  en un unique point  $M_1$  (différent de  $M_0$ ), et que les droites  $T_0$  et  $(M_0 M_1)$  sont symétriquement inclinées sur l'axe focal  $D$  de  $\Gamma$ .
- V.4.6. On note  $E$  l'ensemble de tous les points  $M$  de  $\Gamma \setminus \{M_0\}$  qui sont tels que le cercle osculateur en  $M$  à  $\Gamma$  passe par  $M_0$ . Quel est le cardinal de  $E$ ? Montrer que l'ensemble  $E \cup \{M_0\}$  est contenu dans un cercle (on distinguera les cas où  $M_0$  est choisi comme en V.4.4. et ceux où il est choisi comme en V.4.5.).