Correction du concours ENS BCPST 2020

Partie I.

1. (a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$ on note $Y_n = \dfrac{1+X_n}{2}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1+t}{2}$.

On notera aussi : $Z_n = \dfrac{1}{2}(S_n + n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

D'après le cours, puisque $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, on peut affirmer que $h(X_1), \ldots, h(X_n)$ sont indépendantes.

Par ailleurs $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ donc $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$.

On a $[Y_n = 1] = [X_n = 1]$ donc $P(Y_n = 1) = \dfrac{1}{2}$.

En conclusion :

$$\boxed{Y_1, \ldots, Y_n \text{ sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli } \mathcal{B}(\tfrac{1}{2}).}$$

Or Z_n est la somme de ces n variables indépendantes ayant la même loi de Bernoulli, donc

$$\boxed{Z_n \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n, \tfrac{1}{2}).}$$

(b) En appliquant la question précédente, puisque $Z_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$:

$$\boxed{\text{Si } k \notin A_n,\ \ u_{n,k} = P(Z_n = \frac{n+k}{2}) = 0.}$$

$$\boxed{\text{Si } k \in A_n,\ \ u_{n,k} = P(Z_n = \frac{n+k}{2}) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{n+k}{2}} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} 2^{-n}.}$$

(c) On sait que S_0 est la variable certaine égale à 0 donc $u_{0,0} = P(S_0 = 0) = 1$ et pour tout k de $\mathbb{Z}^*$, $u_{0,k} = P(S_0 = k) = 0$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. La variable S_{n+1} est égale à $S_n + X_{n+1}$ et $X_{n+1}(\Omega) = \{-1, 1\}$, donc :

$$[S_{n+1} = k] = \big([S_n = k-1] \cap [X_{n+1} = 1]\big) \cup \big([S_n = k+1] \cap [X_{n+1} = -1]\big).$$

Les deux événements de cette réunion sont disjoints donc

$$P(S_{n+1} = k) = P([S_n = k-1] \cap [X_{n+1} = 1]) + P([S_n = k+1] \cap [X_{n+1} = -1]).$$

L'indépendance de S_n et de X_{n+1} permet de conclure :

$$P(S_{n+1} = k) = P(S_n = k-1) \times P(X_{n+1} = 1) + P(S_n = k+1) \times P(X_{n+1} = -1),$$

ce qui se réécrit :

$$\boxed{u_{n+1,k} = \frac{u_{n,k-1} + u_{n,k+1}}{2}.}$$

Remarque : cette relation pouvait aussi s'obtenir par le calcul en utilisant le résultat de (1b), mais c'était beaucoup plus lourd.

2. (a) Avant d'appliquer le théorème central limite, calculons l'espérance et la variance de X_n :

$$E(X_n) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

$$E(X_n^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{donc} \quad V(X_n) = E(X_n^2) - \big(E(X_n)\big)^2 = 1.$$

Par linéarité de l'espérance : $E(S_n) = 0$.
Par l'indépendance des variables X_i : $V(S_n) = n$ puis $\sigma(S_n) = \sqrt{n}$.
Enfin, d'après le théorème central limite,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.}$$

(b) Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Par définition,

$$F_n(x,t) = \sum_{k \leq \lfloor x\sqrt{n} \rfloor} P(S_{\lfloor nt \rfloor} = k) = P(S_{\lfloor nt \rfloor} \leq \lfloor x\sqrt{n} \rfloor) = P\Big(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \leq \frac{\lfloor x\sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}}\Big).$$

On applique le résultat admis par l'énoncé avec $j = \lfloor nt \rfloor$ jouant le rôle de n, $x_j = \dfrac{\lfloor x\sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}}$.
On va utiliser le fait que lorsque y tend vers $+\infty$, alors $\lfloor y \rfloor \sim y$, ce qui est une conséquence du théorème d'encadrement appliqué à l'encadrement $\dfrac{y-1}{y} < \dfrac{\lfloor y \rfloor}{y} \leq 1$.
Lorsque n tend vers l'infini, j tend aussi vers l'infini car $j \sim nt$ (puisque t est fixé strictement positif) et x_j tend vers $\dfrac{x}{\sqrt{t}}$. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = F(x,t).}$$

3. Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Dans l'intégrale définissant $F(x,t)$, on effectue le changement de variable $y = u\sqrt{t}$. On a alors : $u = \frac{y}{\sqrt{t}}$; $du = \frac{dy}{\sqrt{t}}$; lorsque $u \to -\infty$, $y \to -\infty$; et enfin lorsque $u = \frac{x}{\sqrt{t}}$, $y = x$. On note que le changement de variable dans l'intégrale généralisée est autorisé car l'intégrale est convergente, d'après le cours sur l'intégrale de Gauss. On obtient ainsi :

$$\boxed{F(x,t) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}}\,dy.}$$

4. Par opérations sur les fonctions usuelles, la fonction $f : (y,t) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}}$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2t}} \Big(\frac{y^2}{2t^2\sqrt{t}} - \frac{1}{2t\sqrt{t}}\Big) = \frac{1}{2t^2\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} (y^2 - t).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,t) = -\frac{y}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y,t) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} \Big(\frac{y^2}{t} - 1\Big) = \frac{1}{t^2\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} (y^2 - t).$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall (y,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(y,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y,t).}$$

Fin de la partie I.

Partie II.

1. Puisque u est non nulle, il existe un couple (x_1, t_1) dans $[0,1]\times\mathbb{R}_+$ tel que $u(x_1,t_1) \neq 0$. Puisque $u(x_1,t_1) = f(x_1)g(t_1)$, on a nécessairement $f(x_1) \neq 0$ et $g(t_1) \neq 0$, donc

$$\boxed{f \text{ et } g \text{ sont des fonctions non nulles.}}$$

2. A partir de l'écriture $u(x,t) = f(x)g(t)$, calculons les dérivées partielles de u (qui existent car f et g sont de classe C^2) :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f'(x)g(t)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f''(x)g(t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = f(x)g'(t)$$

Puisque u est solution de (1) on a :

$$(E_1) \qquad f(x)g'(t) = \big(mf'(x) + \frac{1}{2}f''(x)\big)g(t).$$

Ceci est valable pour tout x de $[0,1]$ et pour tout t de $\mathbb{R}_+$. C'est en particulier valable pour $x = x_1$ tel que $f(x_1) \neq 0$. On peut alors poser

$$\lambda = \frac{mf'(x_1) + \frac{1}{2}f''(x_1)}{f(x_1)}$$

et g est solution de l'équation différentielle :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g'(t) = \lambda g(t).}$$

Donc il existe C dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ g(t) = Ce^{\lambda t}.}$$

3. On réinjecte cette expression dans (E_1) :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x)C\lambda e^{\lambda t} = \big(mf'(x) + \frac{1}{2}f''(x)\big)Ce^{\lambda t}.$$

Or g est non nulle donc C aussi, donc :

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \quad \frac{1}{2}f''(x) + mf'(x) = \lambda f(x).}$$

De plus les conditions $u(0,t_1) = u(1,t_1) = 0$ et le fait que $g(t_1) \neq 0$ donnent :

$$f(0) = f(1) = 0.$$

4. On suppose ici $\lambda > -\dfrac{m^2}{2}$, c'est à dire $m^2 + 2\lambda > 0$.

(a) L'équation différentielle vérifiée par f a pour équation caractéristique :

$$P(X) = X^2 + 2mX - 2\lambda = 0.$$

Le discriminant de P est $\Delta = 4(m^2 + 2\lambda)$, qui est ici strictement positif grâce à l'hypothèse faite en début de question. Ainsi P a deux racines réelles distinctes r_+ et r_- données par :

$$\boxed{r_+ = \sqrt{m^2+2\lambda} - m \qquad \text{et} \qquad r_- = -\sqrt{m^2+2\lambda} - m}$$

et il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \quad f(x) = ae^{r_+ x} + be^{r_- x}\ .}$$

(b) Les conditions au bord donnent :

$$f(0) = a + b = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = ae^{r_+} + be^{r_-} = 0.$$

En calculant $e^{r_+} f(0) - f(1)$ on obtient $b(e^{r_+} - e^{r_-}) = 0$ puis $b = 0$, car $r_+ \neq r_-$ et la fonction exponentielle est injective. Ainsi $a = -b = 0$. Finalement f est la fonction nulle, ce qui est absurde !

En conclusion, l'hypothèse $\lambda > -\frac{m^2}{2}$ aboutit à une contradiction, donc :

$$\boxed{\lambda \leq -\frac{m^2}{2}.}$$

5. On suppose maintenant $\lambda = -\dfrac{m^2}{2}$.
Dans ce cas le discriminant de P est $\Delta = 4(m^2 + 2\lambda) = 0$ donc P a une racine double $r = -m$ et il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = ae^{-mx} + bxe^{-mx}.$$

Avec les conditions au bord on obtient : $f(0) = a = 0$ et $f(1) = be^{-m} = 0$ donc $a = b = 0$ et f est la fonction nulle. Ceci est absurde, donc il est impossible que λ soit égal à $-\frac{m^2}{2}$.

En conclusion des questions 4 et 5 on peut affirmer que :

$$\boxed{\lambda < -\frac{m^2}{2}.}$$

6. On suppose enfin $\lambda < -\dfrac{m^2}{2}$.

(a) Le discriminant de P est alors strictement négatif donc P a deux racines complexes conjuguées r_1 et r_2 données par :

$$r_1 = -m + i\sqrt{-m^2 - 2\lambda} \quad \text{et} \quad r_2 = -m - i\sqrt{-m^2 - 2\lambda}.$$

Ainsi il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = ae^{-mx} \cos(x\sqrt{-m^2 - 2\lambda}) + be^{-mx} \sin(x\sqrt{-m^2 - 2\lambda})$$

ce qui, en posant $l = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{-2\lambda - m^2}$, se réécrit :

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = e^{-mx}\big(a\cos(\pi l x) + b\sin(\pi l x)\big).}$$

(b) On a alors $f(0) = a = 0$ et $f(1) = e^{-m} b \sin(\pi l) = 0$.
Puisque $a = 0$ et que f est non nulle, on a nécessairement $b \neq 0$.
D'où $\sin(\pi l) = 0$, ce qui signifie que $\pi l \in \pi\mathbb{Z}$. De plus $l > 0$ par définition donc $l \in \mathbb{N}^*$.

7. Faisons le bilan des questions $2, 3, 4, 5, 6$: on a montré que si f et g convenaient, alors on avait pour tout (x, t) de $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$:
   . $f(x) = b\sin(\pi l x)e^{-mx}$ avec $b \neq 0$ et $l \in \mathbb{N}^*$;
   . $g(t) = Ce^{\lambda t}$, avec C non nulle.

Mais on n'a pas raisonné par équivalence, donc il faut vérifier que réciproquement, ces deux fonctions satisfont bien toutes les conditions demandées.

En refaisant des calculs similaires à ceux de la question 2, on constate que l'équation aux dérivées partielles (1) est vérifiée.

Il en est facilement de même des conditions aux bord de (2).

Puisque f est non nulle et que g ne s'annule pas, $u : (x,t) \mapsto f(x)g(t)$ est non nulle.

Le plus difficile est de vérifier que l'inégalité $\lambda < -\frac{m^2}{2}$ est bien vérifiée (ce qui revient à justifier que l est bien défini), ce qui n'a rien d'évident puisqu'on rappelle que λ dépend de f. On calcule donc (les détails sont exceptionnellement laissés au brouillon) :

$$mf'(x) + \frac{1}{2}f''(x) = be^{-mx}\sin(\pi lx)(-\frac{m^2}{2} - \pi^2\frac{l^2}{2})$$

puis

$$\lambda = \frac{mf'(x_1) + \frac{1}{2}f''(x_1)}{f(x_1)} = -\frac{m^2}{2} - \pi^2\frac{l^2}{2}.$$

Puisque $l \neq 0$, on a bien $\lambda < -\frac{m^2}{2}$.

En conclusion, la réciproque est vérifiée : les couples (f,g) solutions du problème demandé sont les couples de fonctions telles qu'il existe b et C non nulles telles que :

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \quad f(x) = b\sin(\pi lx)e^{-mx}}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g(t) = Ce^{\lambda t}}$$

Fin de la partie II.

Partie III.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ calculons :
$$P(\lambda) = det(M - \lambda I_2) = (a-\lambda)^2 - bc.$$
Puisque $bc > 0$, $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow a - \lambda = \pm\sqrt{bc} \Leftrightarrow \lambda = a \pm \sqrt{bc}$.
Ainsi la matrice M a deux valeurs propres :
$$\boxed{Sp(M) = \{a - \sqrt{bc}, a + \sqrt{bc}\}.}$$
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, résolvons :
$$(M - (a + \sqrt{bc}))X = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -\sqrt{bc}x_1 + cx_2 & = 0 \\ bx_1 - \sqrt{bc}x_2 & = 0 \end{array} \right.$$
Les deux lignes sont proportionnelles puisque $-\sqrt{\frac{b}{c}}(L_1)$ est la ligne (L_2). Ainsi :
$$(M - (a + \sqrt{bc}))X = 0 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{\frac{c}{b}}x_2$$
donc
$$\boxed{E_{a+\sqrt{bc}} = Vect(\begin{pmatrix} \sqrt{c} \\ \sqrt{b} \end{pmatrix}).}$$
Le même type de calcul donne immédiatement :
$$\boxed{E_{a-\sqrt{bc}} = Vect(\begin{pmatrix} \sqrt{c} \\ -\sqrt{b} \end{pmatrix}).}$$

2. Soit $(l, r) \in [\![1, n]\!] \times \mathbb{R}_+^*$. Soit $i \in [\![2, n-1]\!]$. Par définition du produit matriciel,
$$\begin{aligned} \left(MX^{(l,r)}\right)_i &= \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}X_j^{(l,r)} \\ &= \sum_{j=i-1}^{i+1} M_{i,j}X_j^{(l,r)} \\ &= bX_{i-1}^{(l,r)} + aX_i^{(l,r)} + cX_{i+1}^{(l,r)} \\ &= br^{i-1}\sin\left(\frac{(i-1)l\pi}{1+n}\right) + ar^i\sin\left(\frac{il\pi}{1+n}\right) + cr^{i+1}\sin\left(\frac{(i+1)l\pi}{1+n}\right). \end{aligned}$$
On utilise ensuite la formule de trigonométrie
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
qui permet d'écrire :
$$r^i\sin\left(\frac{(i-1)l\pi}{1+n}\right) = \cos\left(\frac{l\pi}{1+n}\right)X_i^{(l,r)} - \sin\left(\frac{l\pi}{1+n}\right)Y_i^{(l,r)};$$
$$r^i\sin\left(\frac{(i+1)l\pi}{1+n}\right) = \cos\left(\frac{l\pi}{1+n}\right)X_i^{(l,r)} + \sin\left(\frac{l\pi}{1+n}\right)Y_i^{(l,r)}.$$

Puis :

$$\begin{aligned}
\big(MX^{(l,r)}\big)_i &= \frac{b}{r}\Big(\cos\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)X_i^{(l,r)} - \sin\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)Y_i^{(l,r)}\Big)\\
&\quad + aX_i^{(l,r)} + cr\Big(\cos\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)X_i^{(l,r)} + \sin\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)Y_i^{(l,r)}\Big)\\
&= \Big(a + \big(cr + \frac{b}{r}\big)\cos\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)\Big)X_i^{(l,r)} + \Big(cr - \frac{b}{r}\Big)\sin\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)Y_i^{(l,r)}.
\end{aligned}$$

Il reste à traiter les cas $i = 1$ et $i = n$.
Soit $i = 1$:

$$\begin{aligned}
\big(MX^{(l,r)}\big)_1 &= aX_1^{(l,r)} + cX_2^{(l,r)}\\
&= ar\sin\big(\frac{l\pi}{1+n}\big) + cr^2\sin\big(\frac{2l\pi}{1+n}\big).
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
Z &= \Big(a + \big(cr + \frac{b}{r}\big)\cos\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)\Big)X_1^{(l,r)} + \Big(cr - \frac{b}{r}\Big)\sin\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)Y_1^{(l,r)}\\
&= ar\sin\big(\frac{l\pi}{1+n}\big) + cr^2\Big(\cos\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)\sin\big(\frac{l\pi}{1+n}\big) + \sin\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)\cos\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)\Big)\\
&\quad + b\Big(\cos\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)\sin\big(\frac{l\pi}{1+n}\big) - \sin\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)\cos\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)\Big)\\
&= ar\sin\big(\frac{l\pi}{1+n}\big) + cr^2\sin\big(\frac{2l\pi}{1+n}\big).
\end{aligned}$$

Donc la relation est vérifiée aussi pour $i = 1$.
Enfin, prenons $i = n$. D'une part :

$$\big(MX^{(l,r)}\big)_n = br^{n-1}\sin\big(\frac{(n-1)l\pi}{1+n}\big) + ar^n\sin\big(\frac{nl\pi}{1+n}\big).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
W &= \Big(a + \big(cr + \frac{b}{r}\big)\cos\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)\Big)X_n^{(l,r)} + \Big(cr - \frac{b}{r}\Big)\sin\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)Y_n^{(l,r)}\\
&= ar^n\sin\big(\frac{nl\pi}{1+n}\big) + cr^{n+1}\Big(\cos\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)\sin\big(\frac{nl\pi}{1+n}\big) + \sin\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)\cos\big(\frac{nl\pi}{1+n}\big)\Big)\\
&\quad + br^{n-1}\Big(\cos\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)\sin\big(\frac{nl\pi}{1+n}\big) - \sin\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)\cos\big(\frac{nl\pi}{1+n}\big)\Big)\\
&= ar^n\sin\big(\frac{nl\pi}{1+n}\big) + cr^{n+1}\sin\big(\frac{(n+1)l\pi}{1+n}\big) + br^{n-1}\sin\big(\frac{(n-1)l\pi}{1+n}\big)\\
&= ar^n\sin\big(\frac{nl\pi}{1+n}\big) + br^{n-1}\sin\big(\frac{(n-1)l\pi}{1+n}\big).
\end{aligned}$$

Ainsi la relation est encore vraie pour $i = n$.
Finalement :

$$\boxed{MX^{(l,r)} = \Big(a + \big(cr + \frac{b}{r}\big)\cos\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)\Big)X^{(l,r)} + \Big(cr - \frac{b}{r}\Big)\sin\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)Y^{(l,r)}.}$$

Le réel $r = \sqrt{\frac{b}{c}}$ est strictement positif et $cr - \dfrac{b}{r} = 0$, donc

$$MX^{(l,r)} = \Big(a + 2\sqrt{bc}\cos\big(\frac{l\pi}{1+n}\big)\Big)X^{(l,r)}.$$

Notons de plus que le vecteur $X^{(l,r)}$ est non nul. Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour } l \text{ dans } [\![1,n]\!],\ X^{(l)} = X^{(l,\sqrt{\frac{b}{c}})} \text{ est vecteur propre de } M \text{ associé à } \lambda^{(l)} = a + 2\sqrt{bc}\cos\big(\frac{l\pi}{1+n}\big).}$$

3. (a) Supposons qu'une combinaison linéaire des vecteurs $Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}$ soit nulle, notons Z cette combinaison linéaire. Il existe donc $(a_1, \dots, a_m)$ dans $\mathbb{R}^m$ tel que :

$$Z = \sum_{l=1}^{m} a_l Z^{(l)} = 0.$$

Puisque $AZ^{(l)} = \lambda_l Z^{(l)}$, une récurrence immédiate donne : $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k Z^{(l)} = \lambda_l^k Z^{(l)}$. Ainsi :

$$0 = A^k Z = \sum_{l=1}^{m} a_l \lambda_l^k Z^{(l)} = \lambda_1^k \Big(a_1 Z^{(1)} + \sum_{l=2}^{m} a_l \big(\frac{\lambda_l}{\lambda_1}\big)^k Z^{(l)} \Big).$$

On peut en effet diviser par λ_1 puisque $\lambda_1 > \lambda_m > 0$. On a donc :

$$a_1 Z^{(1)} + \sum_{l=2}^{m} a_l \big(\frac{\lambda_l}{\lambda_1}\big)^k Z^{(l)} = 0.$$

Lorsque $k \to +\infty$, pour tout l de $[\![2, m]\!]$, le quotient $\big(\frac{\lambda_l}{\lambda_1}\big)^k$ tend vers 0 car $|\frac{\lambda_l}{\lambda_1}| < 1$. On en déduit par passage à la limite que $a_1 Z^{(1)} = 0$. Or $Z^{(1)}$ est non nul car vecteur propre, donc $a_1 = 0$.
Une réitération du même raisonnement donne ensuite $a_2 = 0$, …, $a_m = 0$. Donc la famille $(Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)})$ est libre.

(b) Maintenant λ_m n'est plus supposé strictement positif. On pose

$$B = A + (1 - \lambda_m) I_n.$$

Chaque vecteur $Z^{(l)}$ est vecteur propre de B, associé à la valeur propre

$$\gamma_l = \lambda_l - \lambda_m + 1 \geq 1 > 0.$$

Ainsi le résultat de $(3a)$ appliqué à la matrice B prouve que la famille $(Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)})$ est encore libre.

(c) Commençons par démontrer que les n valeurs propres $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}$ obtenues en question 2 sont bien deux à deux distinctes. On rappelle que :

$$\forall l \in [\![1, n]\!], \quad \lambda^{(l)} = a + 2\sqrt{bc} \cos\big(\frac{l\pi}{1+n}\big).$$

Si l et s sont deux entiers différents dans $[\![1, n]\!]$, alors $\frac{l\pi}{1+n}$ et $\frac{s\pi}{1+n}$ sont deux réels différents de $]0, \pi[$. L'injectivité de la fonction cos sur $]0, \pi[$ assure alors que $\lambda^{(l)} \neq \lambda^{(s)}$.
Ainsi les vecteurs propres $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ de la question 2 sont associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. Le résultat de $(3b)$ permet alors de conclure à la liberté de la famille $(X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$. De plus cette famille contient n vecteurs et l'espace $\mathbb{R}^n$ est de dimension n, donc :

$$\boxed{\big(X^{(1)}, \dots, X^{(n)}\big) \text{ est une base de } \mathbb{R}^n.}$$

4. On vient de prouver que M est diagonalisable : il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que :

$$M = PDP^{-1}.$$

On a des précisions sur ces matrices :

$$P \text{ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs } X^{(1, \sqrt{\frac{b}{c}})}, \dots, X^{(n, \sqrt{\frac{b}{c}})}.$$

$$P^{-1} = (\alpha_{i,l})_{1 \leq i,l \leq n}.$$

$$D = diag(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}) \quad \text{avec } \lambda^{(l)} = a + 2\sqrt{bc}\cos\big(\frac{l\pi}{1+n}\big).$$

On note $T = diag(1, \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(1)}}, \dots, \frac{\lambda^{(n)}}{\lambda^{(1)}})$. Une récurrence immédiate donne :

$$\frac{1}{\left(\lambda^{(1)}\right)^k} M^k = PT^kP^{-1}.$$

Pour tout l de $[\![2, n]\!]$, $|\frac{\lambda^{(l)}}{\lambda^{(1)}}| < 1$ car $a > 0$ et cos décroît strictement sur $]0, \pi[$. Ainsi

$$\lim_{k \to +\infty} T^k = diag(1, 0, \dots, 0) = T.$$

Puis

$$TP^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et enfin, en notant $P(TP^{-1}) = N$:

$$\boxed{N_{i,j} = P_{i,1}\alpha_{1,j} = \big(\frac{b}{c}\big)^{\frac{i}{2}} \sin\big(\frac{i\pi}{1+n}\big)\alpha_{1,j}.}$$

5. Déjà, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $\frac{i\pi}{1+n} \in]0, \pi[$ donc $\sin\big(\frac{i\pi}{1+n}\big) > 0$.
Ensuite, la matrice M est constituée de réels tous positifs ou nuls. Donc M^2 est constituée de coefficients qui sont positifs ou nuls en tant que sommes de termes positifs ou nuls. Par une récurrence immédiate, toute puissance de M aura tous ses coefficients positifs ou nuls. Par passage à la limite, les coefficients $N_{i,j}$ sont tous positifs ou nuls et ainsi $\alpha_{1,j} \geq 0$ pour tout j de $[\![1, n]\!]$.
Montrons par l'absurde que tous les $\alpha_{1,j}$ sont strictement positifs.
Supposons que ce ne soit pas le cas et qu'il existe j_1 tel que $\alpha_{1,j_1} = 0$, ce qui entraîne que $N_{i,j_1} = 0$ pour tout i de $[\![1, n]\!]$. Ainsi la matrice N contient une colonne nulle.
Remarquons que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, le coefficient situé en position (i, j) dans M^k et le coefficient situé en position $(n+1-j, n+1-i)$ sont égaux, ceci peut s'observer après quelques recherches au brouillon. Pour le dire plus concrètement, la j-ème colonne de M^k se retrouve, écrite à l'envers, dans la $(n + 1 - j)$-ème ligne de M^k. Cette égalité se transmet en passant à la limite, par conséquent la nullité d'une colonne dans N entraîne aussi la nullité d'une ligne dans N : il existe i_1 tel que pour tout j de $[\![1, n]\!]$, $N_{i_1,j} = 0$ et donc $\alpha_{i_1,j} = 0$. Ainsi la ligne i_1 de la matrice P^{-1} est nulle : c'est absurde dans une matrice inversible !
Ce raisonnement par l'absurde permet de conclure que pour tout j, $\alpha_{1,j} \neq 0$, donc $\alpha_{1,j} > 0$.
En conclusion :

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad N_{i,j} > 0.}$$

Fin de la partie III.

Partie IV.

On préfère noter R la nouvelle matrice introduite dans cette partie, ce qui permet de conserver la notation M pour la matrice de la partie III.

Déjà les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de R associés à la valeur propre 1.

Ensuite, les n valeurs propres de M, qui étaient notées $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)}$, sont aussi valeurs propres de R. En effet, si on considère pour tout l de $[\![1, n]\!]$ le vecteur :

$$W_l = \begin{pmatrix} \frac{cX_1^{(l)}}{\lambda^{(l)}-1} \\ X^{(l)} \\ \frac{bX_n^{(l)}}{\lambda^{(l)}-1} \end{pmatrix}$$

alors on a :

$$RW_l = \lambda^{(l)} W_l.$$

Puisque R est une matrice d'ordre $n+2$, on a trouvé toutes les valeurs propres de R : n valeurs propres dont le sous-espace propre associé est de dimension 1, et la valeur propre 1 dont le sous-espace propre est de dimension 2, ainsi R est diagonalisable.

Le lien entre R et la matrice M de la partie III vient d'être effectué. Les matrices de la forme de M sont appelées dans la littérature 'matrices de Toeplitz tridiagonales'.

Pour le lien avec la partie II, il serait effectué lorsqu'on veut résoudre numériquement l'équation aux dérivées partielles de la partie II. En discrétisant et en utilisant des formules de Taylor, l'équation (1) donnerait des relations de récurrence qui se traduiraient par une équation matricielle du type $RX = B$ (on ne détaille pas, sinon ça va être long, mais cette approche a déjà été effectuée dans des sujets de modélisation récents au concours Agro).

Le lien avec la partie I se voit dans la question ($1c$) de la partie I : cette relation de récurrence pourrait elle aussi se traduire matriciellement par une relation de type $RX = B$ (sauf que le fait que l'indice k varie dans $\mathbb{Z}$ et pas dans $\mathbb{N}$ pourrait être gênant).

On terminera en notant que le sujet de Physique de cette même année (ENS 2020) faisait lui aussi, dans les questions $51, 52, 53$, l'étude d'une marche aléatoire semblable et le lien avec une équation aux dérivées partielles.

Fin du sujet.
