

MINES - II - PSI - 2000

Première partie

I-1) La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, soit $g(t) = f(t + 2\pi)$. La fonction g vérifie la même équation différentielle que f et possède les mêmes conditions initiales pour $t = 0$ ($f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$). Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'unicité de la solution donc $f = g$. f est donc périodique de période 2π .

I-2) **a)** f est de classe C^2 (et même de classe C^∞ en utilisant $f''(t) = -e^{it}f(t)$ et une récurrence), or il suffit que f soit C^1 pour être égale à sa série de Fourier.

b) f étant C^∞ , f' est aussi égale à sa série de Fourier donc $f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 c_n(f) e^{int}$. On a

donc :

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 c_n(f) e^{int} \text{ d'une part}$$

$$f'(t) = -e^{it} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -c_n(f) e^{i(n+1)t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -c_{n-1}(f) e^{int} \text{ d'autre part}$$

$$\Rightarrow n^2 c_n(f) = c_{n-1}(f)$$

c) En particulier, pour $n = 0$, on obtient $c_{-1}(f) = 0$ et par récurrence tous les $c_n(f)$ avec n négatifs sont nuls. Par récurrence également, pour n positif, $c_n(f) = \frac{1}{(n!)^2} c_0(f)$

$$\text{Donc } f(t) = c_0(f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} e^{int}$$

I-3) **a)** L'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$|C| = |f(t+h) - f(t) - h f'(t)| \leq \frac{h^2}{2} \|f''\|_\infty = \frac{h^2}{2} \|f\|_\infty \text{ et de même pour D}$$

$$\mathbf{b)} \quad |C-D| = |f(t+h) - f(t-h) - 2h f'(t)| \leq |C| + |D| \leq h^2 \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow |2h f'(t)| \leq |f(t+h) - f(t-h) - 2h f'(t)| + |f(t+h) - f(t-h)| \\ \leq (h^2 + 2) \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow |f'(t)| \leq \left(\frac{h}{2} + \frac{1}{h}\right) \|f\|_\infty$$

Pour $h = \sqrt{2}$ (qui minimise la quantité $\frac{h}{2} + \frac{1}{h}$), on obtient l'inégalité cherchée.

Deuxième partie

II-1) $R = +\infty$

$$\mathbf{II-2)} \quad g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! (n-1)!} x^{n-1}$$

Pour x compris entre 0 et 2, la suite $n \rightarrow \frac{1}{n! (n-1)!} x^{n-1}$ décroît donc la série alternée est du signe du premier terme. $g'(x)$ est donc négatif sur $[0,2]$.

Or $g(0) = 1$ alors que $g(2) = 1 - 2 + 1 + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n!)^2} = \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n!)^2} < 0$. En effet, $\frac{2^n}{(n!)^2}$ décroît

pour $n \geq 3$, donc la série alternée a pour signe son premier terme (qui est négatif). g étant strictement décroissante, il y a dans l'intervalle $[0,2]$ une solution unique x_0 à l'équation $g(x) = 0$.

Pour montrer que $x_0 > \sqrt{2}$, il suffit de montrer que $g(\sqrt{2}) > 0$. Par un raisonnement analogue à ci-dessus, $g(\sqrt{2}) = u_0(x) + \dots + u_3(x) + \text{qqc de positif} > 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{18} > 0,007$

Troisième partie

III-1) a) $y = 0$ (à nouveau Cauchy-Lipschitz)

b) $W'(t) = y(t)z''(t) - y''(t)z(t) = (e^t - e^a) y(t)z(t)$ est strictement positive sur $]\alpha, \beta[$ et donc W est strictement croissante sur $[\alpha, \beta]$. Or :

$W(\alpha) = y(\alpha)z'(\alpha) \geq 0$ et $W(\beta) = y(\beta)z'(\beta) \leq 0$ contradictoire. Donc H est fausse. y doit donc changer de signe et donc s'annuler entre les deux zéros de z supérieurs à a (précision oubliée de l'énoncé).

c) Considérons l'équation $z'' + e^t z = 0$ dont une solution est $\sin(e^{t/2} (t-\tau))$. z s'annule en $\alpha = \tau$ et $\beta = \tau + \pi e^{-\tau/2}$ et est strictement positive entre ces deux valeurs. y s'annule donc entre ces deux zéros.

III-2) a) Il s'agit de montrer que y ne s'annule pas et pas seulement que y n'est pas nulle (au sens identiquement nulle)

Si $y(\tau) = 0$ alors $y'(\tau) \neq 0$ (sinon, y serait la solution identiquement nulle). Il existe donc un intervalle centré en τ où y' ne s'annule pas et où y est strictement monotone.

b) Considérons $z(t) = \sin(e^{\beta/2} (t-\alpha))$, solution de $z''(t) + e^{\beta} z(t) = 0$ avec α et $\alpha + \pi e^{-\beta/2}$ deux zéros consécutifs de z . Quitte à changer le signe de y , nous supposons $y > 0$ sur $]\alpha, \beta[$, $y'(\alpha) \geq 0$ et $y'(\beta) \leq 0$. Considérons $W(t) = y(t)z'(t) - y'(t)z(t)$. On a $W(\alpha) = 0$, $W'(t) = (e^t - e^{\beta}) y(t)z(t) < 0$ quand t varie de α à $\text{Min} \{\beta, \alpha + \pi e^{-\beta/2}\}$, donc W décroît strictement sur le même intervalle donc est strictement négatif et est donc d'un signe opposé à celui de z sur cet intervalle. Or $W(\beta) = -y'(\beta)z(\beta)$ est du signe de $z(\beta)$. Cela impose donc que $\beta \geq \alpha + \pi e^{-\beta/2}$.

Quatrième partie

On remarque que $v_n(t) = u_n(e^t)$ et donc que $\Psi(t) = g(e^t)$

IV-1) a) La série est même normalement convergente puisque $|v_n(t)| < \frac{e^{na}}{(n!)^2}$ pour tout t de $]-\infty, a]$.

b) Les séries dérivées sont également normalement convergente sur le même type d'intervalle. On peut donc dériver terme à terme ce qui donne bien :

$$\Psi''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{nt}}{((n-1)!)^2} = -e^t \Psi(t)$$

Cette relation est vérifiée sur tout intervalle $]-\infty, a]$, donc sur $\mathbb{R}$.

IV-2) Le II-2 permet d'affirmer que le premier zéro de Ψ est tel que $x_0 = e^{t_0} > \sqrt{2}$ soit $t_0 > \frac{1}{2} \ln(2)$.

Le III-2-a) permet d'ordonner les zéros successifs de Ψ en une suite strictement croissante. En effet, si t_n est un zéro, t_{n+1} sera la borne Inf de $\{t, \Psi(t) = 0\}$, qui sera strictement plus grand que t_n . En outre, cette suite (t_n) ne peut avoir une limite finie l , car on aurait d'une part $t_{n+1} - t_n$ qui tend vers 0, et d'autre part, le III-2-b) implique que l'on aurait également $t_{n+1} - t_n \geq \pi \exp(-\frac{t_n}{2}) \geq \pi \exp(-\frac{l}{2}) > 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$. Le III-1-c) permet de voir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{n+1} - t_n = 0$ (dans chaque intervalle $[\tau, \tau + \pi e^{-\tau/2}]$ il y a un zéro. Prendre $\tau' = \tau + \pi e^{-\tau/2}$. Dans $[\tau', \tau' + \pi e^{-\tau'/2}]$ il y a aussi un zéro, et la longueur totale de l'intervalle réunion tend vers 0).

Cinquième partie

$$\mathbf{V-1)} \quad f(t) \leq M + \int_a^t f(x)g(x) \, dt = M + F(t)$$

ou encore $F'(t) = f(t)g(t) \leq (M + F(t))g(t)$

Multiplions les deux membres par $G(t) = \exp(\int_a^t g(x) \, dx)$, fonction vérifiant $G'(t) = g(t)G(t)$.

L'inéquation précédente implique que :

$$\begin{aligned} & F'(t)G(t) - F(t)G'(t) \leq M G'(t) \\ \Rightarrow & \frac{F'(t)G(t) - F(t)G'(t)}{G^2(t)} \leq M \frac{G'(t)}{G^2(t)} \\ \Rightarrow & \frac{F(t)}{G(t)} \leq M - \frac{M}{G(t)} \text{ en intégrant de } a \text{ à } t \\ \Rightarrow & F(t) \leq MG(t) - M \\ \Rightarrow & f(t) \leq MG(t) \end{aligned}$$

$$\mathbf{V-2)} \quad \mathbf{a)} \quad y(t) = y(a) + (t-a)y'(a) + \int_a^t y''(x)(t-x) \, dx \text{ d'après la formule de Taylor avec reste intégral.}$$

Donc $A(t) = y(a) + (t-a)y'(a)$.

b) $\frac{A(t)}{t}$ est bornée par une quantité M et $0 \leq \frac{t-x}{t} \leq 1$. Donc

$$\begin{aligned} |j(t)| & \leq M + \int_0^a |j(x)| x |\varphi(x)| \, dx \text{ inégalité sur laquelle on applique la question précédente} \\ \Rightarrow |j(t)| & \leq M \exp \int_a^t x |\varphi(x)| \, dx \leq M \exp \int_a^{+\infty} x |\varphi(x)| \, dx \end{aligned}$$

V-3) a) $y''(t) = -\varphi(t) y(t) = -t \varphi(t) j(t) \Rightarrow |y''(t)| \leq M |t \varphi(t)|$ donc y'' est intégrable, donc $\lim_{t \rightarrow \infty}$

$y'(t)$ qui n'est autre que $y'(a) + \int_a^\infty y''(t) \, dt$ existe.

b) Ecrire que $\frac{y(t)}{t} = \frac{y(t) - y(a)}{t - a} \times \frac{t - a}{t} + \frac{y(a)}{t} = y'(\theta) \times \frac{t - a}{t} + \frac{y(a)}{t}$ avec θ élément de $]a, t[$.

Soit $\varepsilon > 0$, choisir a assez grand pour que $l - \varepsilon < y'(\theta) < l + \varepsilon$ pour $\theta > a$, puis, cet a étant choisi, choisir t assez grand pour encadrer $\frac{y(t)}{t}$ par $l - 2\varepsilon$ et $l + 2\varepsilon$...