Corrigé du problème Centrale 2008, MP, 1ière épreuve

romain.krustarobaseprepas.org ; Relu et amendé par Michel Quercia

I. Quelques résultats généraux

I.A -

1. L'équation étant linéaire (et ses coefficients des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$), le théorème de Cauchy-Lipschitz s'énonce :
   Pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution y définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = u$ et $y'(0) = v$.
   Soit maintenant y une solution vérifiant $y(0) = 0$. Posons $z(x) = y(-x)$. Alors $z''(x) = y''(-x)$ et, par parité de q :
   $$z''(x) + (\lambda - q(x))z(x) = y''(-x) + (\lambda - q(-x))y(-x) = 0$$
   Donc z est solution de (E_λ) et, puisque $z(0) = 0 = y(0)$, $z'(0) = -y'(0)$, l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz atteste de l'égalité $z = -y$, c'est-à-dire que y est impaire. La réciproque est évidente.
2. Soient y et z deux solutions. Leur wronskien vaut $W(x) = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} = yz' - y'z$. Si y et z sont toutes deux paires, on a $y'0) = z'(0) = 0$. Si elles sont toutes deux impaires, $y(0) = z(0) = 0$. Dans les deux cas, $W(0) = 0$, ce qui prouve que (y, z) n'est pas une base de solutions.
   Soit alors λ une valeur propre de Q. L'espace propre correspondant est égal à $E_2 \cap S_{E_\lambda}$ (où S_{E_λ} est l'espace des solutions de E_λ). Il est non réduit à $\{0\}$ par définition. On sait de plus que $\dim S_{E_\lambda} = 2$ et on vient de voir que S_{E_λ} ne peut être contenu dans E_2. Donc $\dim(E_2 \cap S_{E_\lambda}) = 1$.

I.B -

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $y'' + (\lambda - a)y = 0$ admet une droite de solutions impaires, dont une base est $x \mapsto \operatorname{sh}(\sqrt{a - \lambda}\,x)$ si $\lambda < a$, $x \mapsto x$ si $\lambda = a$ et $x \mapsto \sin(\sqrt{\lambda - a}\,x)$ si $\lambda > a$. Les deux premiers types d'application ne sauraient être périodiques, car non bornées. Toute valeur propre vérifie donc $\lambda > a$. En outre, l'application $x \mapsto \sin(\sqrt{\lambda - a}\,x)$ admet $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\lambda - a}}$ pour plus petite période strictement positive. Elle est donc 2π-périodique si et seulement si $\sqrt{\lambda - a} \in \mathbb{N}^*$.
   Le même raisonnement est valable à propos de l'opérateur B. Ainsi :
   Le spectre de A est $\{a + k^2,\ k \in \mathbb{N}^*\}$ et un vecteur propre unitaire associé à $a + k^2$ est s_k.
   Le spectre de B est $\{b + k^2,\ k \in \mathbb{N}^*\}$ et un vecteur propre unitaire associé à $b + k^2$ est s_k.
2. On a :
   $$f|A(f) = f|(-f'' + af) = -f|f'' + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} af^2 \leqslant -f|f'' + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} qf^2 = f|Q(f)$$
   De la même façon, $f|Q(f) \leqslant f|B(f)$.

II. Problème approché de dimension finie

II.A -

1. Dans un espace vectoriel préhilbertien, tout sous-espace de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal. Ceci justifie l'existence de Π_n, et le cours nous apprend que $\Pi_n(f)$ est égal

à la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier de f, c'est-à-dire, en tenant compte de l'imparité de f :

$$\Pi_n(f) = \sum_{k=1}^{n} b_n(f) s_n$$

Enfin on a, toujours d'après le cours : $\lim_{n\to+\infty} \|\Pi_n(f)\|_2 = \|f\|_2$ et $\lim_{n\to+\infty} \|f - \Pi_n(f)\|_2 = 0$.

2. L'endomorphisme Π_n est un projecteur orthogonal de E, donc un endomorphisme symétrique (dans le détail : $f|\Pi_n(g) = (\Pi_n(f) + (f - \Pi_n(f)))\,|\Pi_n(g) = \Pi_n(f)|\Pi_n(g) =$ $\Pi_n(f)|\,(\Pi_n(g) + (g - \Pi_n(g))) = \Pi_n(f)|g)$.
3. Deux intégrations par parties successives donnent :

$$\begin{aligned} f|Q(g) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(-g'' + qg) \\ &= \frac{1}{\pi}\left([-fg']_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f'g' + \int_0^{2\pi} qfg\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left([f'g]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''g' + \int_0^{2\pi} qfg\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (-f'' + qf)g = Q(f)|g \end{aligned}$$

Donc, pour tous $f, g \in V_n$ (en utilisant $\Pi_n(f) = f$ et $\Pi_n(g) = g$) :

$$f|Q_n(g) = f|\Pi_n \circ Q(g) = \Pi_n(f)|Q(g) = f|Q(g) = Q(f)|g = Q(f)|\Pi_n(g) = \Pi_n \circ Q(f)|g = Q_n(f)|g$$

II.B -

1. On a, pour $f \in V_n$: $f|A_n(f) = f|\Pi_n \circ A(f) = \Pi_n(f)|A(f) = f|A(f)$ et, de la même façon, $f|Q_n(f) = f|Q(f)$, $f|B_n(f) = f|B(f)$. Les inégalités demandées résultent donc immédiatement de **I.B.2)**.
2. (a) L'espace V_n est stable par dérivation, donc stable par A et, pour $f \in V_n$, $A_n(f) = A(f)$. Les valeurs propres de A_n sont donc les valeurs propres de A pour lesquelles on trouve un vecteur propre dans V_n, c'est-à-dire, d'après **I.B.1)**, les $a + k^2$, $1 \leqslant k \leqslant n$. De même, les valeurs propres de B_n sont les $a + k^2$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

   (b) Puisque $\dim(V_k) = k$ et $\dim(\mathrm{Vect}(e_{k,n}, \ldots, e_{n,n}) = n - k + 1$, ces deux sous-espaces de V_n (qui est de dimension n) ne sauraient être en somme directe. Leur intersection contient donc un élément non nul f, qu'on peut choisir de norme 1.

   Posons $f = \sum_{j=1}^{k} c_j s_j$. On a $f|B(f) = \sum_{j=1}^{k} (b + j^2)c_j^2 \leqslant (b + k^2)\sum_{j=1}^{k} c_j^2 = b + k^2$. De la même façon, en décomposant f sur les $e_{k,n}, \ldots, e_{n,n}$, il vient $f|Q(f) \geqslant \lambda_{k,n}$ puis, en utilisant **I.B.2)** :

   $$\lambda_{k,n} \leqslant f|Q(f) \leqslant f|B(f) \leqslant k^2 + b$$

   L'inégalité $k^2 + a \leqslant \lambda_{k,n}$ se prouve de la même façon, en prenant en considération les sous-espaces $\mathrm{Vect}(s_k, \ldots, s_n)$ et $\mathrm{Vect}(e_{1,n}, \ldots, e_{k,n})$ de V_n.

   (c) On a pour tout $f \in V_{n-1}$, $f|Q_n(f) = f|Q(f) = f|Q_{n-1}(f)$. Il vient, en considérant cette fois-ci les espaces $\mathrm{Vect}(e_{1,n-1}, \ldots, e_{k,n-1})$ et $\mathrm{Vect}(e_{k,n}, \ldots, e_{n,n})$ de V_n et un élément f de norme 1 de leur intersection :

   $$\lambda_{k,n} \leqslant f|Q(f) = f|Q_{n-1}(f) \leqslant \lambda_{k,n-1}$$

II.C -

La suite $(\lambda_{k,n})_n$ est, d'après les question précédentes, une suite décroissante à valeurs dans le segment I_k. Elle converge donc vers un élément λ_k de I_k. De plus, puisque pour tout $n \geqslant k+1$, $\lambda_{k,n} \leqslant \lambda_{k+1,n}$, on a en passant à la limite quand $n \to +\infty$: $\lambda_k \leqslant \lambda_{k+1}$.

III - Une suite de valeurs propres de Q

III. A -

1. La fonction
$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & \left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} y_\lambda'(x), y_\lambda(x)\right) \end{array}$$
est de classe C^1 et ne s'annule pas. Elle prend en outre la valeur $(1,0)$ en $x=0$. Le théorème de relèvement assure l'existence de deux fonctions $r_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $\theta_\lambda(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = r_\lambda(x)\left((\cos(\theta_\lambda(x)), \sin(\theta_\lambda(x))\right)$.

2. En dérivant les expressions $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} y_\lambda'(x) = r_\lambda \cos(\theta_\lambda)$ et $y_\lambda(x) = r_\lambda \sin(\theta_\lambda)$, puis en utilisant les relations $y_\lambda'' = -(\lambda - q) y_\lambda$ et $y_\lambda' = \sqrt{\lambda} r_\lambda \cos(\theta_\lambda)$, il vient :
$$\begin{cases} (1) & -\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}(\lambda - q) r_\lambda \sin(\theta_\lambda) = r_\lambda' \cos(\theta_\lambda) - r_\lambda \theta_\lambda' \sin(\theta_\lambda) \\ (2) & \sqrt{\lambda} r_\lambda \cos(\theta_\lambda) = r_\lambda' \sin(\theta_\lambda) + r_\lambda \theta_\lambda' \cos(\theta_\lambda) \end{cases}$$
Évaluant $-\sin(\theta_\lambda) \times (1) + \cos(\theta_\lambda) \times (2)$, on a :
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\lambda - q) r_\lambda \sin^2(\theta_\lambda) + \sqrt{\lambda} r_\lambda \cos^2(\theta_\lambda) = r_\lambda \theta_\lambda'$$
d'où, puisque $r_\lambda > 0$:
$$\sqrt{\lambda} - \frac{q}{\sqrt{\lambda}} \sin^2(\theta_\lambda) = \theta_\lambda'$$
Comme $\theta_\lambda(0) = 0$, θ_λ est bien la solution maximale de (T_λ) (qui est unique d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz).

3. En évaluant $\cos(\theta_\lambda) \times (1) + \sin(\theta_\lambda) \times (2)$, on a cette fois :
$$\frac{q}{2\sqrt{\lambda}} r_\lambda \sin(2\theta_\lambda) = r_\lambda'$$

III. B -

1. Si l'on pose $u(t) = \theta(\lambda, t) - \sqrt{\lambda} t$, on a $u(0) = 0$ et $u'(t) = \theta_\lambda'(t) - \sqrt{\lambda} = -\dfrac{q}{\sqrt{\lambda}} \sin^2(\theta_\lambda)$ d'où $|u'(t)| \leqslant \dfrac{\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}$ et, par l'inégalité des accroissements finis, pour $t \geqslant 0$, $|u(t)| \leqslant \dfrac{\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}} t$.
On en déduit $|2\theta(\lambda, t) - 2\sqrt{\lambda} t| \leqslant \dfrac{2\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}} t$ et, puisque $\cos$ est 1-lipschitzienne :
$$\left|\cos(2\theta(\lambda, t)) - \cos\left(2\sqrt{\lambda} t\right)\right| \leqslant \frac{2\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}} t$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\theta(\lambda,t) &= \int_0^{2\pi} \theta'_\lambda(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{\lambda} - \frac{q(t)}{2\sqrt{\lambda}}(1-\cos(2\theta_\lambda(t))\right) dt \\
&= 2\pi\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t)dt + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t)\cos(2\theta_\lambda(t))dt \\
&= 2\pi\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t)dt + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t)\cos(2\sqrt{\lambda(t)}t)dt \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t)\left(\cos(2\theta_\lambda(t)) - \cos(2\sqrt{\lambda(t)}t)\right) dt
\end{aligned}$$

et l'inégalité cherchée, pour $K = 2\pi^2\|q\|_\infty^2$, résulte de

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left| \int_0^{2\pi} q(t)\left(\cos(2\theta_\lambda(t)) - \cos(2\sqrt{\lambda(t)}t)\right) dt \right| &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} |q(t)| \left|\cos(2\theta_\lambda(t)) - \cos(2\sqrt{\lambda(t)}t)\right| dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} \frac{2\|q\|_\infty |q(t)|}{\sqrt{\lambda}} t\, dt \\
&\leqslant \frac{2\pi^2\|q\|_\infty^2}{\lambda}
\end{aligned}$$

3. Puisque q est continue, le lemme de Lebesgue permet d'affirmer :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^{2\pi} q(t)\cos(2\sqrt{\lambda}t)dt = 0$$

Donc

$$\theta(\lambda, 2\pi) = 2\pi\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} q(t)dt + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 2\pi\sqrt{\lambda}\left[1 - \frac{1}{4\pi\lambda}\int_0^{2\pi} q(t)dt + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

4. La relation précédente montre immédiatement $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \theta(\lambda, 2\pi) = +\infty$. On peut donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, choisir $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $2k_0\pi$ appartienne à l'image de $]0,+\infty[$ par $\lambda \mapsto \theta(\lambda, 2\pi)$. Soit $\mu_{k_0} > 0$ tel que $\theta(\mu_{k_0}, 2\pi) = 2k_0\pi$. Le théorème des valeurs intermédiaires à nouveau assure de l'existence de $\mu_{k_0+1} > \mu_{k_0}$ tel que $\theta(\mu_{k_0+1}, 2\pi) = 2(k_0+1)\pi$, puis de $\mu_{k_0+2} > \mu_{k_0+1}$ tel que $\theta(\mu_{k_0+2}, 2\pi) = 2(k_0+2)\pi$, etc. On construit ainsi la suite $(\mu_k)_{k\geqslant k_0}$ par récurrence.

5. La suite $(\mu_k)_k$, si elle était majorée, serait convergente et la suite $\theta(\mu_k, 2\pi) = 2k\pi$ convergerait aussi, ce qui n'est pas. Donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \mu_k = +\infty$. La relation prouvée en **III.B.3)** montre alors, quand $k \to +\infty$,

$$2k\pi = 2\pi\sqrt{\mu_k}\left[1 - \frac{1}{4\pi\mu_k}\int_0^{2\pi} q(t)dt + o\left(\frac{1}{\mu_k}\right)\right]$$

d'où

$$4k^2\pi^2 = 4\pi^2\mu_k\left[1 - \frac{1}{2\pi\mu_k}\int_0^{2\pi} q(t)dt + o\left(\frac{1}{\mu_k}\right)\right]$$

puis

$$\mu_k - k^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(t)dt + o(1)$$

III. C -

1. Puisque q est paire et 2π-périodique, les fonctions $x \mapsto -\theta_\lambda(-x)$ et $x \mapsto \theta_\lambda(x+2\pi) - 2k\pi$ sont solution du problème de Cauchy (T_λ). Par unicité de la solution à ce problème on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\theta_\lambda(x) = -\theta_\lambda(-x) \text{ et } \theta_\lambda(x+2\pi) - 2k\pi = \theta_\lambda(x)$$
2. Par 2π-périodicité de u, $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} u(t)dt$ est indépendant de x, donc égal à $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(t)dt$ qui est nul par imparité de u. Ceci prouve que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x u(t)dt$ est 2π-périodique. On voit aussi immédiatement que c'est une fonction paire. Or, d'après **III.A.3)**, on a :
$$r_\lambda(x) = r_\lambda(0)\exp\left(\int_0^x \frac{q(t)}{2\sqrt{\lambda}}\sin(2\theta_\lambda(t))dt\right)$$
Comme $t \mapsto q(t)\sin(2\theta_\lambda(t))$ est impaire et 2π-périodique (par **III.C.1)**), r_λ est 2π-périodique et paire.
3. Il résulte de ceci que $y_\lambda = r_\lambda \sin\theta_\lambda$ est 2π-périodique et impaire. Par conséquent, Q admet λ pour valeur propre.
4. Ce qui précède montre que la suite (μ_k) est une suite croissante de valeurs propres de Q.

IV. Valeurs propres de Q

IV.A -

1. (a) Il suffit de substituer à y_n la fonction $\pm\dfrac{y_n}{\|y_n\|_2}$.
   (b) On a $Q_n(y_n) = \Pi_n(Q(y_n)) = \Pi_n(-y_n'' + qy_n) = -y_n'' + \Pi_n(qy_n)$ car, V_n étant stable par dérivation, on a $y_n'' \in V_n$.
   Il vient $\|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 = \|Q(y_n) - Q_n(y_n)\|_2 = \|-y_n'' + qy_n + y_n'' - \Pi_n(qy_n)\|_2 = \|qy_n - \Pi_n(qy_n)\|_2$.
   (c) De $y_n = \displaystyle\sum_{m=1}^n b_m(y_n)s_m$, on déduit $qy_n - \Pi_n(qy_n) = \displaystyle\sum_{m=1}^n b_m(y_n)qs_m - \sum_{m=1}^n b_m(y_n)\Pi_n(qs_m) = \displaystyle\sum_{m=1}^n b_m(y_n)[qs_m - \Pi_n(qs_m)]$.
   (d) $\|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 = \|qy_n - \Pi_n(qy_n)\|_2 = \left\|\displaystyle\sum_{m=1}^n b_m(y_n)[qs_m - \Pi_n(qs_m)]\right\|_2$
   $\leqslant \displaystyle\sum_{m=1}^n |b_m(y_n)|\,\|[qs_m - \Pi_n(qs_m)]\|_2 \leqslant \sum_{m=1}^n |b_m(y_n)|r_{m,n}$.
   On a par ailleurs, par Pythagore,
$$\begin{aligned} r_{m,n}^2 &= \|qs_m\|_2^2 - \|[\Pi_n(qs_m)]\|_2^2 \\ &\leqslant \|qs_m\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q(t)^2 s_m^2(t)dt \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q(t)^2 dt = \|q\|_2^2 \end{aligned}$$
   (e) L'équation $Q_n(y_n) = \alpha_n y_n$ entraîne, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $b_m(-y_n'' + qy_n - \alpha_n y_n) = 0$. Par ailleurs, deux intégrations par parties successives donnent la relation classique $b_m(y_n'') = -m^2 b_m(y_n)$. Donc $m^2 b_m(y_n) + b_m(qy_n) - \alpha_n b_m(y_n) = 0$.

(f) L'inégalité de Cauchy-Schwarz indique

$$|b_m(y_n)| = |(y_n|s_m)| \leqslant \|y_n\|_2 \|s_m\|_2 = 1$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} |b_m(qy_n)| &= |(qy_n|s_m)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |qy_ns_m| \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |qy_n| \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} q^2\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi} y_n^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \|q\|_2\|y_n\|_2 \leqslant \|q\|_2 \end{aligned}$$

Donc

$$m^2|b_m(y_n)| = |b_m(qy_n) - \alpha_n b_m(y_n)| \leqslant |b_m(qy_n)| + |\alpha_n||b_m(y_n)| \leqslant \|q\|_2 + |\alpha_n| \leqslant C$$

(g) On a $|b_m(y_n)|r_{m,n} \leqslant \dfrac{C\|q\|_2}{m^2}$ pour $n \geqslant m$ d'après ce qui précède, et cette inégalité est encore valable pour $n < m$ puisque, dans ce cas, $y_n \in V_n$ et $b_m(y_n) = 0$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_{m,n} = 0$ d'après la définition de $r_{m,n}$ et **II.A.1)**. Comme $|b_m(y_n)| = |(y_n|s_m)| \leqslant \|y_n\|_2\|s_m\|_2 = 1$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} |b_{m,n}|r_{m,n} = 0$.

On déduit donc du résultat admis dans le préliminaire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{m=1}^{n} |b_m(y_n)|r_{m,n} = 0$ puis, avec la première inégalité de **d)**, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 = 0$.

2. (a) $\|z_n\|_2 = \|Q(y_n) - \alpha_n y_n + (\alpha_n - \alpha)y_n\|_2 \leqslant \|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 + |\alpha_n - \alpha|\|y_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

(b) Posons $W(x) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$. Alors

$$W'(x) = \begin{vmatrix} u' & v' \\ u' & v' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & v \\ u'' & v'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v \\ -(\alpha-q)u & -(\alpha-q)v \end{vmatrix} = 0$$

Donc W est constant, égal à $W(0) = 1$.

(c) On a $y_n'' + (\alpha - q)y_n = -z_n$. On peut donc regarder y_n comme solution de l'équation différentielle $y'' + (\alpha - q)y = -z_n$. À ce titre, la méthode de la variation des constantes nous assure de l'existence de deux fonctions ϕ et ψ de classe C^1 pour lesquelles $y_n = \phi u + \psi v$ et :

$$\begin{cases} \phi' u + \psi' v = 0 \\ \phi' u' + \psi' v' = -z_n \end{cases}$$

Il vient, puisque le wronskien vaut 1, $\phi' = \begin{vmatrix} 0 & v \\ -z_n & v' \end{vmatrix} = z_n v$ et $\psi' = \begin{vmatrix} u & 0 \\ u' & -z_n \end{vmatrix} = -z_n u$.

D'où, en utilisant les condition initiales $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, $v(0) = 0$, $v'(0) = 1$:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= y_n(0)u + y_n'(0)v + \left(\int_0^x z_n(t)v(t)dt\right)u(x) - \left(\int_0^x z_n(t)u(t)dt\right)v(x) \\ &= y_n'(0)v(x) + \int_0^x K(x,t)z_n(t)dt \end{aligned}$$

où $K(x,t) = u(x)v(t) - u(t)v(x)$ (K est bien continue).

(d) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|f_n(x)| \leqslant \left|\int_0^x K(x,t)^2 dt\right|^{1/2} \left|\int_0^x z_n(t)^2 dt\right|^{1/2}$$

Soit J un segment de $\mathbb{R}$. Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $J \subset [-2m\pi, 2m\pi]$. Puisque z_n est 2π-périodique, on a, pour $x \in [-2m\pi, 2m\pi]$, $\left|\int_0^x z_n(t)^2 dt\right| \leqslant m \int_0^{2\pi} z_n(t)^2 dt \leqslant m\pi \|z_n\|_2^2$. Si on pose (continuité de K) $M = \sup_{[-2m\pi, 2m\pi]^2} |K|$, il vient : $\forall x \in J$,

$$|f_n(x)| \leqslant \sqrt{2m\pi M^2}\sqrt{m\pi\|z_n\|_2^2} \leqslant \sqrt{2}\pi m M \|z_n\|_2$$

Donc $(f_n)_n$ tend uniformément vers 0 sur tout segment de $\mathbb{R}$.

(e) On a $\int_0^{2\pi} (y_n(x) - y_n'(0)v(x))^2 dx = \int_0^{2\pi} f_n(x)^2 dx$. Or $(f_n^2)_n$, carré d'une suite uniformément convergente vers 0 sur le segment $[0, 2\pi]$, converge uniformément vers 0 sur $[0, 2\pi]$ (car une suite de fonctions uniformément convergente sur un segment est bornée pour $\|.\|_\infty$). Donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} (y_n(x) - y_n'(0)v(x))^2 dx = 0$. Ainsi on a $\lim_{n\to+\infty} \|y_n - y_n'(0)v\|_2 = 0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} |\, \|y_n'(0)v\|_2 - \|y_n\|_2 \,| = 0$ et, puisque $y_n'(0) \geqslant 0$, $\lim_{n\to+\infty} y_n'(0) = \dfrac{1}{\|v\|_2}$.

(f) La relation $y_n(x) = y_n'(0)v(x) + f_n(x)$ et ce qui précède montre que y_n converge uniformément sur tout compact vers $\dfrac{v}{\|v\|_2}$. On en déduit que v est 2π-périodique et impaire et est, par conséquent, vecteur propre de Q pour la valeur propre α.

IV.B -

1. Soient $k, j \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \geqslant \max(k, j)$, on a $e_{k,n}|e_{j,n} = \delta_{k,j}$. On sait de plus que le produit scalaire $(f, g) \mapsto f|g$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est continu pour $\|.\|_2$. Comme $(e_{k,n})_n$ et $(e_{j,n})_n$ convergent vers e_k et e_j pour $\|.\|_{\infty,[0,2\pi]}$, donc a fortiori pour $\|.\|_2$, on a $\lim_{n\to+\infty} e_{k,n}|e_{j,n} = e_k|e_j$. Donc $e_k|e_j = \delta_{k,j}$. En particulier, e_k et e_j ne sont pas colinéaires pour $j \neq k$ et $\lambda_j \neq \lambda_k$ (car les espaces propres de Q sont de dimension 1). La suite $(\lambda_k)_k$ qu'on sait croissante est donc strictement croissante.

2. (a) On a $-e_{k,n}'' + (q - \lambda_{k,n})e_{k,n} = 0$ donc $b_m(e_{k,n}'' + (q - \lambda_{k,n})e_{k,n}) = 0$ puis $m^2 b_m(e_{k,n}) + b_m(qe_{k,n}) - \lambda_{k,n} b_m(e_{k,n}) = 0$ et $(\lambda_{k,n} - m^2) b_m(e_{k,n}) = b_m(qe_{k,n})$. Or on a $m^2 < k^2 + a < \lambda_{k,n}$ donc $0 < k^2 + a - m^2 \leqslant \lambda_{k,n} - m^2$.

   D'autre part, $|b_m(qe_{k,n})| = |(qe_{k,n}|s_m)| \leqslant |(q|e_{k,n})| \|s_m\|_\infty \leqslant \|q\|_2 \|e_{k,n}\|_2 \|s_m\|_2 \leqslant \|q\|_2$.

   Il vient

$$|(e_{k,n}|s_m)| = |b_m(e_{k,n})| \leqslant \frac{|b_m(qe_{k,n})|}{k^2 + a - m^2} \leqslant \frac{\|q\|_2}{k^2 + a - m^2}$$

   (b) Fixons $m \in \mathbb{N}^*$, puis $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $K^2 + a > m^2$. Posons, pour $n \geqslant \max(K, m)$, et $K \leqslant k \leqslant n$, $x_{k,n} = (e_{k,n}|s_m)^2$ et $\xi_k = \left(\dfrac{\|q\|_2}{k^2 + a - m^2}\right)^2$, de sorte que $|x_{k,n}| \leqslant \xi_k$.

   On a $\lim_{n\to+\infty} (e_{k,n}|s_m) = (e_k|s_m)$ par continuité du produit scalaire relativement à $\|.\|_\infty$. Comme la série $\sum_{k=K}^{\infty} \xi_k$ converge, on peut utiliser le résultat admis en préliminaire et conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=K}^{n} (e_{k,n}|s_m)^2 = \sum_{k=K}^{\infty} (e_k|s_m)^2$$

Or, de manière évidente, $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{K-1}(e_{k,n}|s_m)^2 = \sum_{k=1}^{K-1}(e_k|s_m)^2$. Il vient

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(e_{k,n}|s_m)^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(e_k|s_m)^2$$

Et, $(e_{k,n})_{1\leqslant k\leqslant n}$ étant une base orthonormée de V_n auquel appartient s_m, on a, pour tout n comme ci-dessus, $\sum_{k=1}^{n}(e_{k,n}|s_m)^2 = \|s_m\|^2$. On conclut

$$\sum_{k=1}^{\infty}(e_k|s_m)^2 = \|s_m\|^2 = 1$$

Enfin, de

$$\begin{aligned}\left\|s_m - \sum_{k=1}^{n}(e_k|s_m)e_k\right\|_2^2 &= \|s_m\|_2^2 + \sum_{k=1}^{n}(e_k|s_m)^2 - 2\sum_{k=1}^{n}(e_k|s_m)(s_m|e_k)\\ &= \|s_m\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n}(e_k|s_m)^2\end{aligned}$$

on déduit $\lim_{n\to+\infty}\left\|s_m - \sum_{k=1}^{n}(e_k|s_m)e_k\right\|_2 = 0$.

3. Soit $f \in E$ orthogonale à tous les e_k. On a (la seconde égalité provient de la continuité du produit scalaire) :

$$f|s_m = \lim_{n\to+\infty} f|\sum_{k=1}^{\infty}(e_k|s_m)e_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(e_k|s_m)(f|e_k) = 0$$

Tous les coefficients de Fourier de f sont nuls ce qui, on le sait (f étant continue), entraîne $f = 0$.

4. Si λ est une valeur propre de Q distincte de chaque λ_k, et e un vecteur propre associé à λ, alors e est orthogonal à tous les e_k (car les espaces propres de Q sont deux à deux orthogonaux en raison de la relation de symétrie $Q(f)|g = f|Q(g)$). Donc $e = 0$ ce qui est absurde.

V. Comportement asymptotique

V.A -

1. De $a \leqslant q \leqslant b$, on déduit immédiatement $a \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(t)dt \leqslant b$. Si par exemple on avait $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(t)dt = b$ alors on aurait $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(b - q(t))dt = 0$ ce qui, par continuité de q et positivité de $b - q$, conduirait à $\forall t,\ q(t) = b$. Comme q n'est pas constante, c'est une contradiction.
2. (a) On a $\lim_{k\to+\infty}(k+1)^2 - k^2 = +\infty$. Donc il existe $k_1 \geqslant k_0$ tel que $k \geqslant k_1$ entraîne $k^2 + b < (k+1)^2 + a$, puis $I_k \cap I_{k+1} = \emptyset$.

   (b) On sait que $\lim_{k\to+\infty}\mu_k - k^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(t)dt \in]a, b[$. Donc $\mu_k \in [k^2 + a, k^2 + b]$ dès que k est assez grand. Ainsi il existe k_2 tel que μ_k soit une valeur propre de Q qui appartient à I_k dès que $k \geqslant k_2$.

Or les valeurs propres de Q sont exactement les λ_k et $\lambda_k \in I_k$. Comme $I_k \cap I_{k+1} = \emptyset$ pour $k \geqslant k_1$, I_k ne contient, pour $k \geqslant k_1 + 1$, qu'un unique élément de la suite $(\lambda_j)_j$, à savoir λ_k. Donc $k \geqslant \max(k_2, k_1 + 1) \implies \mu_k = \lambda_k$. Le comportement asymptotique découle immédiatement de **III.B.4.b)**.