

**Un vecteur propre strictement positif.**

1.  $\Gamma_x$  est non vide car il contient 0 (en effet  $0 = 0x \leq Tx$  car  $T$  et  $x$  sont positifs donc toutes les composantes de  $Tx$  sont positives).  
 $\Gamma_x$  est fermé. En effet, pour tout  $i$ , l'application de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\theta \mapsto (Tx - \theta x)_i$  est continue (car  $\|x\|_1$ -lipschitzienne) de sorte que  $\Gamma_x$  est un fermé de  $\mathbb{R}^+$  donc un fermé de  $\mathbb{R}$  en tant qu'intersection de  $n$  fermés.  
 Enfin si  $i_0$  est tel que  $x_{i_0} \neq 0$ , on a  $\theta \leq \frac{(Tx)_{i_0}}{x_{i_0}}$  pour tout  $\theta \in \Gamma_x$  ce qui prouve que  $\Gamma_x$  est borné.  
 Ainsi  $\Gamma_x$  est-il un compact de  $\mathbb{R}^+$  ce qui autorise à considérer  $\theta(x)$ .  $\square$
2. Notons  $m$  le minimum proposé. Compte-tenu de la question précédente, on a  $\theta \leq m$  pour tout  $\theta \in \Gamma_x$  donc, par définition du sup,  $\theta(x) \leq m$ . Par ailleurs  $m \in \Gamma_x$  clairement. Ainsi  $\theta(x) = m$ .  $\square$
3. Immédiat d'après la question précédente (formule invariante par homothétie de rapport strictement positif).  $\square$
4. Soit  $x \in B$  et  $j_0$  tel que  $x_{j_0} \neq 0$ . Il vient  $(Px)_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j}x_j \geq p_{i,j_0}x_{j_0} > 0$  pour tout  $i$ . Ainsi  $P(B) \subset B^+$ .  $\square$
5. Comme  $P$  est à coefficients positifs, de l'inégalité  $\theta(x)x \leq Tx$  on tire que  $P(\theta(x)x) \leq P(Tx)$  i.e.  $\theta(x)Px \leq T(Px)$  car en tant que polynôme en  $T$  l'endomorphisme  $P$  commute avec  $T$ . Ainsi  $\theta(x) \in \Gamma_{Px}$  donc  $\theta(x) \leq \theta(Px)$ .  $\square$   
 Par ailleurs on a, a priori, soit  $Tx = 0$  soit  $Tx \in B$ .  
Supposons  $Tx = 0$  et soit  $j$  tel que  $x_j \neq 0$ . Alors la colonne  $j$  de  $T$  est nulle. Donc  $(I_n + T)e_j = e_j$  en notant  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Donc  $(I_n + T)^{n-1}e_j = e_j$  donc la colonne  $j$  de  $P$  est égale à la colonne  $j$  de  $I_n$ . Contradiction avec le fait que  $P$  soit strictement positive.  
 Ainsi  $Tx \in B$  donc (question 4)  $P(Tx) = T(Px) \in B^+$  donc  $\theta(Px) > 0$  d'après la question 2.  $\square$
6. Notons déjà que si  $x$  est un vecteur propre de  $T$  appartenant à  $B$  associé à la valeur propre  $\lambda$  alors  $\lambda \geq 0$ .  
 Par ailleurs  $\theta(x) = \lambda$  d'après la question 2.  
 En outre  $Px \in B$  et est également vecteur propre de  $T$  associé à la valeur propre  $\lambda$  donc  $\theta(Px) = \lambda$ .  
 Ainsi si  $x \in B$  est vecteur propre de  $T$  alors  $\theta(Px) = \theta(x)$ .  $\square$
7. D'après 4, pour prouver qu'un vecteur positif  $y$  est nul, il suffit de prouver que  $P_y$  admet une composante nulle.  
 Soit alors  $x \in B$  tel que  $\theta(Px) = \theta(x)$  et soit  $y = Tx - \theta(x)x$  (bien positif).  
 Alors  $P(y) = T(Px) - \theta(x)Px = T(Px) - \theta(Px)Px$  donc  $P(y)$  admet une composante nulle (question 2). Donc  $y = 0$  i.e.  $x$  est vecteur propre de  $T$  pour la valeur propre  $\theta(x)$ .  $\square$
8. Soit  $y \in P(C)$  et soit  $i$  fixé quelconque entre 1 et  $n$ . D'après la question 4,  $y \in B^+$  donc  $y_i \neq 0$ . Ainsi l'application de  $P(C)$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $y \mapsto 1/y_i$  est bien définie et naturellement continue. Par ailleurs comme  $T$  est continue (endomorphisme d'un espace de dimension finie), l'application  $y \mapsto (Ty)_i$  est également continue. Il en va donc de même de  $y \mapsto (Ty)_i/y_i$ .  
 Donc  $\theta$  est continue sur  $P(C)$  en tant que minimum d'un nombre fini d'applications continues.  $\square$
9. On remarque, puisque  $0 \notin \Sigma$ , que  $C = \Sigma \cap \{x / x \geq 0\}$  ce qui prouve que  $C$  est un compact (intersection du compact  $\Sigma$  et du fermé  $\{x / x \geq 0\}$ ). Or  $P$  en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension finie est continu. Donc  $P(C)$  est compact car image continue d'un compact. D'où l'existence de  $x_0$  compte-tenu de la continuité de  $\theta$  (question précédente).  $\square$
- 10 Soit  $x \in C$ . D'après la question 5, on a  $\theta(x) \leq \theta(Px)$  donc a fortiori  $\theta(x) \leq \theta(x_0)$ . Donc, par définition du sup,  $\sup_{x \in C} \theta(x) \leq \theta(x_0)$ .  $\square$
- 11 Comme  $C \subset B$  on a  $\sup_{x \in C} \theta(x) \leq \sup_{x \in B} \theta(x)$ . Mais par ailleurs pour  $x \in B$  on a  $y = x/\|x\|_1$  qui est élément de  $C$  et d'après la question 3 on a  $\theta(x) = \theta(y)$ . Donc  $\sup_{x \in B} \theta(x) \leq \sup_{x \in C} \theta(x)$  d'où finalement l'égalité demandée.  $\square$
- 12 Si  $x \in C$  alors (question 4)  $Px \in B^+$  donc  $\sup_{x \in C} \theta(Px) \leq \sup_{y \in B} \theta(y)$  soit encore  $\sup_{x \in P(C)} \theta(x) \leq \sup_{x \in B} \theta(x)$ .  
 En conclusion, compte-tenu des deux questions précédentes :  $\sup_{x \in B} \theta(x) = \sup_{x \in C} \theta(x) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x) = \theta(x_0)$ .  $\square$
- 13 Comme  $x_0 \in P(C)$  on a  $x_0$  strictement positif d'après la question 4.  
 Par ailleurs  $x_0$  est un élément de  $B$  et donc  $\theta(Px_0) \geq \theta(x_0)$  d'après la question 5. Or  $\theta(Px_0) \leq \sup_{x \in C} \theta(Px) = \theta(x_0)$  d'après la question précédente. Ainsi  $\theta(Px_0) = \theta(x_0)$  ce qui prouve, par la question 7, que  $x_0$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\theta(x_0)$ .  
 Enfin  $\theta(x_0) = \theta(Px_0)$  comme on vient de la voir et donc  $\theta(x_0) > 0$  par la question 5.  $\square$

## Une méthode d'approximation.

14 Immédiat par inégalité triangulaire dans  $\mathbb{C}$ .  $\square$

15 L'inégalité précédente prouve que  $|\theta| \leq \theta(x^+)$  et on a  $\theta(x^+) \leq \theta_0$  par la question 12.  $\square$

16 Comme  $|\theta|x^+$  et  $Tx^+$  sont deux vecteurs positifs, de l'inégalité  $|\theta|x^+ \leq Tx^+$  on tire  $\| |\theta|x^+ \|_1 \leq \|Tx^+\|_1$ .

Or  $\|Ty\|_1 \leq \|y\|_1$  puisque  $T$  est stochastique. Ainsi  $|\theta| \|x^+\|_1 \leq \|x^+\|_1$  donc  $|\theta| \leq 1$  puisque  $x$  est non nul.  $\square$

17  $x_0$  est un vecteur propre strictement positif de  $T$  associé à la valeur propre  $\theta_0$  strictement positive.

De  $Tx_0 = \theta_0 x_0$  on tire  $\|Tx_0\|_1 = \theta_0 \|x_0\|_1$ . Or, puisque  $x_0$  est positif et  $T$  stochastique, il vient immédiatement que  $\|Tx_0\|_1 = \|x_0\|_1$ . Ainsi  $\theta_0 = 1$ .  $\square$

(Notons que cette démonstration est directe et n'utilise pas les trois questions précédentes).

18 Résulte immédiatement du fait que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique (vérification immédiate).  $\square$

19 Si  $A$  est une matrice stochastique alors  $\|A\|_1 \leq 1$  car on vérifie facilement que  $\|Ax\|_1 \leq \|x\|_1$  pour tout vecteur  $x$ . D'où les inégalités demandées.  $\square$

20 Découle immédiatement de  $TR_k - R_k = \frac{1}{k}(T^k - I_n)$ .  $\square$

21 Résulte de Bolzano-Weierstrass puisque  $\|R_k x\|_1 \leq \|R_k\|_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_1$ .  $\square$

22 Soit  $\varphi$  une application strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans lui-même telle que la suite  $(R_{\varphi(k)}x)$  converge vers  $y$ . Comme  $T$  est continue, la suite  $(TR_{\varphi(k)}x)$  converge vers  $Ty$ . Il en résulte que  $(TR_{\varphi(k)} - R_{\varphi(k)})x \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} Ty - y$ .

Or  $\|(TR_{\varphi(k)} - R_{\varphi(k)})x\|_1 \leq \frac{2}{\varphi(k)} \|x\|_1 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ . Donc  $Ty = y$  (donc bien sûr  $R_k y = y$ ).  $\square$

23 Résulte instantanément du fait que  $R_m$  et  $R_l$  commutent (deux polynômes en  $T$ ) et  $R_l z = z$  et  $R_m y = y$ .  $\square$

24 Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux extractions telles que les sous-suites correspondantes de la suite  $(R_k x)$  convergent respectivement vers  $y$  et  $z$ , on a en particulier  $y - z = R_{\varphi(k)}(R_{\psi(k)}x - z) - R_{\psi(k)}(R_{\varphi(k)}x - y)$ . Donc, en vertu de la question 19,  $\|y - z\| \leq \|R_{\psi(k)}x - z\| + \|R_{\varphi(k)}x - y\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ . Ainsi  $y = z$  et la suite  $(R_k x)$  est-elle convergente en tant que suite bornée admettant une seule valeur d'adhérence.  $\square$

25 L'application  $x \mapsto \lim_{k \rightarrow +\infty} R_k x$  est manifestement linéaire d'où l'existence de la matrice  $R$ .

En spécifiant  $x$  en les vecteurs de la base canonique, il vient que la suite  $(R_k)$  tend vers la matrice  $R$  "coefficient à coefficient" donc pour n'importe quelle norme et en particulier pour la norme subordonnée à la norme 1.  $\square$

26 Comme  $R_k$  est un polynôme en  $T$ , on a  $TR_k = R_k T$  pour tout  $k$ . Le produit matriciel étant continu, il en résulte que  $TR = RT$ .  $\square$

27 Il vient  $TR_k = \frac{k+1}{k}R_{k+1} - \frac{1}{k}I_n$  donc, par passage à la limite (continuité du produit matriciel),  $TR = R$ .

On en déduit par itération que  $T^j R = R$  pour tout entier  $j$  donc  $R_k R = R$  et finalement  $R^2 = R$ .  $\square$

28 D'après la question précédente,  $R$  est une projection. De  $TR = R$  on tire  $(T - I_n)R = 0$  donc  $\text{Im } R \subset \text{Ker}(T - I_n)$ . Par ailleurs si  $Tx = x$  il vient  $R_k x = x$  pour tout  $x$  donc  $Rx = x$  par passage à la limite. Ainsi  $R$  est une projection sur  $\text{Ker}(T - I_n)$  parallèlement à un supplémentaire  $F$  de  $\text{Ker}(T - I_n)$ .

Or  $\text{Im}(T - I_n) \subset F$  car, pour tout  $x$ ,  $R(Tx - x) = Rx - Rx = 0$  puisque  $RT = R$  et du théorème du rang on déduit que  $\dim F = \dim \text{Im}(T - I_n)$ .

En conclusion  $R$  est la projection sur  $\text{Ker}(T - I_n)$  parallèlement à  $\text{Im}(T - I_n)$ .  $\square$

(Ce qui prouve au passage que ces deux sous-espaces sont supplémentaires.)

29 Les matrices  $R_k$  étant stochastiques, il en va de même de la matrice  $R$  (limite de la suite  $(R_k)$  "coefficient à coefficient"). Pour  $x \in B$  donc positif, on a alors (comme déjà noté en question 17),  $\|Rx\|_1 = \|x\|_1$  (1).

Par ailleurs, puisque  $\dim \text{Ker}(T - I_n) = \dim \text{Im } R = 1$  on a  $\text{Im } R = \mathbb{C}x_0$  (car  $Tx_0 = x_0$  d'après les questions 13 et 17). Donc  $Rx = \lambda x_0$ .

De (1) on tire alors  $|\lambda| = \|x\|_1 / \|x_0\|_1$ . Or, comme  $R$  et  $x$  sont positifs, il en va de même de  $Rx$  donc  $\lambda = \|x\|_1 / \|x_0\|_1$ .

En conclusion pour tout  $x \in B$  on a  $Rx = \frac{\|x\|_1}{\|x_0\|_1} x_0$  ce qui prouve le théorème de Perron-Frobenius.  $\square$

• Remarque : démonstration de  $\dim \text{Ker}(T - I) = 1$ .

a/ On a  $P = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k T^k$  de sorte que, comme  $T$  donc  $T^k$  est stochastique, en notant  $c_j$  la colonne  $j$  de  $P$ , on a

$$\|c_j\|_1 = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = 2^{n-1}.$$

**b/** Soit alors  $x$  un élément non nul de  $\text{Ker}(T - I_n)$ . Il vient immédiatement  $Px = 2^{n-1}x$ .

Ce qui s'écrit  $x_1c_1 + \dots + x_nc_n = 2^{n-1}x$ .

Or  $\|x_1c_1\|_1 + \dots + \|x_nc_n\|_1 = 2^{n-1}\|x\|_1$  puisque  $\|c_k\|_1 = 2^{n-1}$  d'après a/.

Ainsi  $\|x_1c_1 + \dots + x_nc_n\|_1 = \|x_1c_1\|_1 + \dots + \|x_nc_n\|_1$ .

Or,  $a$  et  $b$  étant deux vecteurs de  $\mathbb{C}^n$ , on a  $\|a + b\|_1 = \|a\|_1 + \|b\|_1$  si et seulement si  $a$  et  $b$  sont positivement liés (conséquence facile du cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire dans  $\mathbb{C}$ ). Cette propriété s'étendant par itération à une somme de  $n$  vecteurs.

Ainsi les vecteurs  $x_1c_1, \dots, x_nc_n$  sont positivement liés et donc, comme  $P$  est strictement positive, il en découle que les complexes  $x_1, \dots, x_n$  le sont et donc on peut écrire  $x = \alpha y$  avec  $y \in B \cap \Sigma$  et  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ .

**c/** Il en découle que, pour prouver que  $\dim \text{Ker}(T - I_n) \leq 1$  (donc  $= 1$ ), il suffit de montrer que si  $y$  et  $z$  sont deux éléments  $\text{Ker}(T - I_n) \cap B \cap \Sigma$  alors  $y = z$ .

**d/** Supposons  $y - z$  non nul. Comme il est élément de  $\text{Ker}(T - I_n)$ , d'après b/ on peut écrire  $y - z = \beta v$  avec  $v \in B$  et  $\beta \in \mathbb{R}^*$  (puisque  $y, z$  et  $v$  sont réels). Quitte à échanger les rôles de  $y$  et  $z$ , supposons  $\beta > 0$  i.e.  $y > z$ . On

a alors  $\|y\|_1 = \sum_{i=1}^n |y_i| = \sum_{i=1}^n y_i > \sum_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n |z_i| = 1$ . Contradiction avec le fait que  $\|y\|_1 = 1$ .  $\square$

————— *FIN* —————