
Centrale.Supélec - Maths 2

Proposition de corrigé

Taoufiki said

I - Variables aléatoires entières décomposables

I.A - Premiers exemples

I.A.1) Rappelons que $X \sim X'$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X' = n)$.
• Par définition de la fonction génératrice, si $X \sim X'$ alors $G_X = G_{X'}$.
• Réciproquement, l'égalité entre les fonctions génératrices entraîne que les deux variables ont la même loi par la relation

$$G_X^{(n)}(0) = n!P(X = n)$$

I.A.2) Comme $(X = n) = \bigcup_{k=0}^{n} (Y = k, Z = n - k)$ (réunion disjointe)
et $\mathbb{P}(Y = i, Z = j) = \mathbb{P}(Y = i)\mathbb{P}(Z = j)$ (indépendance)
alors $\mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y = k, Z = n - k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(Z = n - k)$
Puis $\mathbb{P}(X = n)t^n = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y = k)t^k\mathbb{P}(Z = n - k)t^{n-k}$
On en déduit que $G_X = G_Y.G_Z$ sur $]-R, R[$ (Produit de Cauchy) où $R = \min(R_{cv}(G_Y), R_{cv}(G_Z))$.
I.A.3)
• Supposons que $X \sim Y + Z$ avec Y et Z indépendantes et non constantes presque sûrement (en bref p.s.) (i.e. G_Y et G_Z ne sont pas des constantes).
On a donc $G_Y(t).G_Z(t) = G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}t^k = (1-p+tp)^n$
Nécessairement, $n \geq 2$ par raison de degré.
• Si $n \geq 2$, on considère deux variables aléatoires indépendantes Y et Z suivant respectivement $\mathcal{B}(n-1, p)$ et $\mathcal{B}(p)$, on sait que leur somme suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, d'où $X \sim Y + Z$.

I.A.4.a) On suppose qu'il existe deux polynômes à coefficients ≥ 0 et non constants U et V (unitaires pour simplifier) tels que : $A = UV$.
• S'ils ont même degré , on pose :

$$\begin{aligned} U &= T^2 + aT + b \quad a, b \geq 0 \\ V &= T^2 + a'T + b' \quad a', b' \geq 0 \end{aligned}$$

on trouve $UV = T^4 + (a + a')T^3 + (b + b' + aa')T^2 + (ab' + a'b)T + bb'$.
En identifiant , on obtient $a = a' = 0$ puis $b = b' = 0$ ce qui est contredit $bb' = 1$.

• S'ils n'ont pas le même degré , on pose (par exemple) :

$$\begin{array}{rcl} U = & T^3 + aT^2 + bT + c & a,b,c \geq 0 \\ V = & T + a' & a' \geq 0 \end{array}$$

on trouve $\quad UV = T^4 + (a+a')T^3 + (b+aa')T^2 + (a'b+c)T + a'c.$
En identifiant , on obtient $a = a' = 0$ ce qui est contredit $a'c = 1$.
I.A.4.b) On définit la variable X par sa loi : $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}$.
Y et Z sont deux variables indépendantes de même loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.
On a : $G_{Y+Z}(t) = G_Y(t)G_Z(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right)^2 = G_X(t)$ donc $X \sim Y + Z$.
Si X^2 est aussi décomposable, alors il existe Y' et Z' indépendantes , non constantes p.s. telles que : $X^2 \sim Y' + Z'$
ce qui implique $\quad G_{X^2} = G_{Y'}G_{Z'}$, mais ce n'est pas possible car $G_{X^2} = \frac{1}{4}A$.

I.B - Variables uniformes

I.B.1.a)
Pour deux entiers $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $iquo(p,q)$ et $irem(p,q)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de p par q. On définit les deux variables Q et R par :

$$\begin{array}{rcl} Q(\omega) & = & iquo(X(\omega), a) \\ R(\omega) & = & irem(X(\omega), a) \end{array}$$

On a bien $Q(\Omega) \subseteq [|0, b-1|]$ et $\quad R(\Omega) \subseteq [|0, a-1|]$ car $\quad X(\Omega) \subseteq [|0, n-1|]$ et $n = ab$.
et pour tout $\omega \in \Omega$, $\quad X(\omega) = aQ(\omega) + R(\Omega)$.
S'il existe un autre couple (Q', R') vérifiant les même condition, alors l'unicité de la division euclidienne et la propriété : $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) = aQ'(\omega) + R'(\omega)$ entraînent que :

$$\forall \omega \in \Omega \quad , \quad Q'(\omega) = Q(\omega) \text{ et } R'(\omega) = R(\omega)$$

I.B.1.b)
• Pour $(q,r) \in [|0, b-1|] \times [|0, a-1|]$ on a : $\mathbb{P}(Q = q, R = r) = \mathbb{P}(X = aq + r) = \frac{1}{n}$
car $0 \leq aq + r \leq n - 1$.
• Pour $q \in [|0, b-1|]$ on a : $\mathbb{P}(Q = q) = \sum_{r=0}^{a-1} \mathbb{P}(Q = q, R = r) = \dfrac{a}{n} = \dfrac{1}{b}$.
• Pour $r \in [|0, a-1|]$ on a : $\mathbb{P}(R = r) = \sum_{q=0}^{b-1} \mathbb{P}(Q = q, R = r) = \dfrac{b}{n} = \dfrac{1}{a}$.

Remarque 0.1. Bien sûr, il ne reste plus de valeurs possibles parce que le 1 (: somme de probabilités) est atteinte. Q et R suivant donc des lois uniformes. **I.B.1.c)**
Prenons les deux variables $Y = aQ$ et $Z = R$ qui indépendantes car

$$\mathbb{P}(Y = y, Z = z) = \mathbb{P}(Q = \frac{y}{a}, R = z) = \mathbb{P}(Q = \frac{y}{a})\mathbb{P}(R = z) = \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}(Z = z)$$

On a : $X = Y + Z$ et Y, Z ne sont pas constantes p.s. car $a, b \geq 2$ (au moins il y a deux valeurs possibles) donc X est décomposable.

Par conséquant, $G_X(t) = G_Y(t)G_Z(t)$ où

$$\begin{aligned} G_Y(t) = & \sum_{k=0}^{b-1} \mathbb{P}(Y = ak)t^{ak} = \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b-1} t^{ak} \\ G_Z(t) = & \sum_{k=0}^{a-1} \mathbb{P}(Z = k)t^{k} = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{a-1} t^{k} \end{aligned}$$

I.B.2.a)

On a : $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X = k)t^k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} t^k$.
S'il existe Y, Z deux variables indépendantes telles que $X = Y + Z$, on aura $G_X = G_Y G_Z$.
Le résultat énoncé permet de déduire que G_Y ou G_Y est constant, càd Y ou Z est constante p.s. donc X n'est pas décomposable. **I.B.2.b)**
On a : $U\left(\frac{1}{T}\right)V\left(\frac{1}{T}\right) = 1 + \frac{1}{T} + ... + \frac{1}{T^{n-1}} = \frac{1}{T^{n-1}}(1 + T + ... + T^{n-1}) = \frac{1}{T^r}U(T)\frac{1}{T^s}V(T)$
donc $\frac{T^r U\left(\frac{1}{T}\right)}{U(T)} = \frac{V(T)}{T^s V\left(\frac{1}{T}\right)}$, les deux fractions de cette égalité ont le degré nul donc elles sont égales à une constante $a \in \mathbb{R}^*$.
Posons $U(T) = \sum_{k=0}^{r} u_k T^k$, $V(T) = \sum_{k=0}^{s} v_k T^k$ avec $u_r = v_s = 1$.
On a : $aU(T) = T^r U\left(\frac{1}{T}\right)$, par identification, on obtient : $au_0 = 1$ et $a = u_0$ donc $a = 1$ d'où le résultat.

I.B.2.c)
En identifiant les égalités de **I.B.2.b**, on obtient :

$$\forall i = 0, ..., r\ ,\ u_i = u_{r-i} \quad \text{et} \quad \forall i = 0, ..., s\ ,\ v_i = v_{s-i}$$

En écrivant l'égalité entre r ièmes coefficients dans : $U(T)V(T) = 1 + T + ... + T^{n-1}$
on obtient : $\sum_{k=0}^{r} v_k u_{r-k} = 1$ donc $1 + \sum_{k=1}^{r} v_k u_k = 1$, après simplification par 1, il reste une somme nulle dont les termes sont ≥ 0, ce qui donne ce qu'on cherche.
I.B.2.d)
Par récurrence sur $k \in \{1, ..., r\}$:
- **Initialisation :** On a $u_1 + v_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0 = 1$ et $u_1 v_1 = 0$ donc l'un nul et l'autre 1.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété vraie jusqu'au rang $k < r$:

On a : $u_0 v_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} u_{k+1-i} v_i + u_{k+1} v_0 = 1$, si le sigma n'est pas nul, sa valeur sera 1 par hypothèse de récurrence, sinon il reste $v_{k+1} + u_{k+1} = 1$ et on déduit en utilisant $v_{k+1} u_{k+1} = 0$.

I.B.2.e)
Si $s = r$ alors tous les coefficients de V sont à valeurs dans $\{0, 1\}$ par **I.B.2.d**
Sinon, on suppose par l'absurde qu'il existe $k \in \{r + 1, ..., s\}$ vérifiant $v_k \neq 0$ et $v_k \neq 1$. Considérons le plus petit entier k qui vérifie la propriété ci-dessus :
On a : $\sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i} = 1$ donc $v_k + \sum_{i=1}^{r} u_i v_{k-i} = 1$ car $u_i = 0$ pour $i > r$

si $\sum_{i=1}^{r} u_i v_{k-i}$ est nul, alors on aboutit à une contradiction : $v_k = 1$, sinon, la somme sera égale à 1 par minimalité de k , ce qui donne $v_k = 0$ qui est contradicatoire.
La conclusion est que tous les coefficients de V sont dans $\{0, 1\}$.
On écrit donc $n = 1 + 1^1 + ... + 1^{n-1} = U(1)V(1)$ et $U(1), V(1)$ sont des entiers vérifiant : $U(1) \geq u_0 + u_r = 2$, $V(1) \geq v_0 + v_s = 2$ donc n n'est pas premier, ce qui est absurde.

II - Variables infiniment divisibles : exemples

II.A - Variables bornées

II.A.1)
Soit $m \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables $X_{m,1}, ..., X_{m,m}$ définies sur un espace probabilisé Ω_m, mutuellement indépendantes et constantes de valeur $\frac{a}{m}$. (Proposition du préambule.)
On a : $\mathbb{P}(X_{m,1} = x_1, ..., X_{m,m} = x_m) = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X_{m,i} = x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \forall i \ , \ x_i = \frac{a}{m} \\ 0 & \text{si} \quad \exists i \ , \ x_i \neq \frac{a}{m} \end{cases}$
donc $\mathbb{P}(X_{m,1} + ... + X_{m,m} = a) = \sum_{x_1+...+x_m=a} \mathbb{P}(X_{m,1} = x_1, ..., X_{m,m} = x_m) = 1$,
puis $X \sim X_{m,1} + ... + X_{m,m}$, ceci pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, d'où X est infiniment divisible.

II.A.2.a) Soit $i \in \{1, ..., n\}$. Les X_k sont indépendantes de même loi donc

$$\mathbb{P}(X_i \leq \frac{M}{n})^n = \mathbb{P}(X_1 \leq \frac{M}{n}, ..., X_n \leq \frac{M}{n}) = \mathbb{P}(X \leq M) = \mathbb{P}(|X| \leq M) + \mathbb{P}(X < -M) = 1$$

donc $\mathbb{P}(X_i \leq \frac{M}{n}) = 1$.
De même façon, on montre que : $\mathbb{P}(X_i \geq -\frac{M}{n}) = 1$. On en déduit que

$$\mathbb{P}(|X_i| \leq \frac{M}{n}) = \mathbb{P}(X_i \leq \frac{M}{n}) - \mathbb{P}(X_i < -\frac{M}{n}) = 1$$

II.A.2.b)
Pour tout $i = 1, ..., n$, $X_i^2 \leq \frac{M^2}{n^2}$ p.s. , Les X_i admettant donc des moments d'ordre 2.
Par indépendance, $\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{M^2}{n^2} = \frac{M^2}{n}$.
II.A.3) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Il existe $(X_{m,1}, ..., X_{m,m})$ indépendante, de même loi (car X est infiniment divisible).
D'après la question **I.A.2**, $\mathbb{V}(X) \leq \frac{M^2}{m}$, ceci pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.
Par encadrement , on obtient $\mathbb{V}(X) = 0$, i.e. X est p.s. constante.

II.B - Etude du caractère infiniment divisible de quelques variables entières

II.B.1) Non, car elle est bornée p.s. mais n'est pas constante p.s.

II.B.2) Montrons d'abord le cas de deux :
Soient X et Y deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Pour un entier k, on a :

$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i)=e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i\mu^{k-i}}{i!(k-i)!}=e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$$

On montre le cas général par récurrence : Supposons que la propriété vraie jusqu'à $n-1$ (cas de $n=1$ est trivial) et considérons $X_1,...,X_n$ des variables indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1,...,\lambda_n$, par hypothèse de récurrence, la variable $X=X_1+...+X_{n-1}$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+...+\lambda_{n-1}$, et elle est indépendante avec $Y=X_n$ (propriété d'indépendance héritée), alors $X+Y=X_1+...+X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+...+\lambda_n$.
II.B.3) Soient X une variable suivant la loi de Poisson de paramètre λ et $m\in\mathbb{N}^*$.
Il existe des variables $X_{m,1},...,X_{m,m}$ définies sur un espace probabilisé Ω_m, mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{P}(\frac{\lambda}{m})$.
Par **II.B.2**, $X_{m,1}+...+X_{m,m}\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda)$ donc elle a la même loi que X, ceci pour chaque entier non nul m, d'où X est infiniment divisible.
II.B.4
On pose : $X=\sum_{i=1}^{r}iX_i$ où les X_i sont indépendantes et $\forall i=1,...,n$, $X_i\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda_i)$.

On a : $\mathbb{P}(X=0)=\prod_{i=1}^{r}\mathbb{P}(X_i=0)=e^{-\lambda}$ avec $\lambda=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On montre que $k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{j=1}^{r}j\lambda_j\mathbb{P}(X=k-j)$.

On a : $k\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X=k\}})=\sum_{j=1}^{r}j\mathbb{E}(X_j\mathbb{1}_{\{X=k\}})$.

Pour $j=1,...,r$, $\mathbb{E}(X_j\mathbb{1}_{\{X=k\}})=\sum_{p=1}^{\infty}p\mathbb{P}(X_j=p,X=k)$.

Pour $j=1,...,r$ et $p\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(X_j=p,X=k)=\mathbb{P}(X=k/X_j=p).\mathbb{P}(X_j=p)=\mathbb{P}(X-jX_j=k-jp).\mathbb{P}(X_j=p)$$

Comme $p\mathbb{P}(X_j=p)=pe^{-\lambda_j}\frac{\lambda_j^p}{p!}=\lambda_j.\mathbb{P}(X_j=p-1)$ pour chaque $p\in\mathbb{N}^*$.
alors

$$\begin{aligned}p\mathbb{P}(X_j=p,X=k)&=\lambda_j\mathbb{P}(X-jX_j=k-jp).\mathbb{P}(X_j=p-1)\\&=\lambda_j\mathbb{P}(X=k-j/X_j=p-1)\mathbb{P}(X_j=p-1)\\&=\mathbb{P}(X=k-j,X_j=p-1)\end{aligned}$$

donc $k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\sum_{p=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k-j,X_j=p-1)=\sum_{j=1}^{r}j\lambda_j\mathbb{P}(X=k-j)$.
Ces calculs permettent de calculer, la dérivée de la fonction génératrice de X puis déduire l'ex-

pression de G_X par primitivation :

$$\begin{aligned} G'_X(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k)t^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{r} j\lambda_j \mathbb{P}(X=k-j)t^{k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{r} j\lambda_j t^{j-1}\sum_{k=j}^{\infty} \mathbb{P}(X=k-j)t^{k-j} \\ &= \sum_{j=1}^{r} j\lambda_j t^{j-1} G_X(t) \end{aligned}$$

En résolvant une équation différentielle , on obtient : $G_X(t) = a\exp(\sum_{j=1}^{r}\lambda_j t^j)$
avec $a = G_X(0) = \mathbb{P}(X=0) = e^{-\lambda}$.
Maintenant, On prend : $m \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \exp(\frac{-\lambda}{m} + \sum_{j=1}^{r}\frac{\lambda_j}{m}t^j)$ est la fonction génératrice de $Y = \sum_{i=1}^{r} iY_i$ où les Y_i sont indépendantes et $\forall i = 1,...,r$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\frac{\lambda_i}{n})$.
Il existe donc $X_{m,1},...,X_{m,m}$ des variables sur un espace Ω_m qui sont indépendante et de même loi que Y, on a donc $G_{\sum_{i=1}^{m} X_{m,i}} = \prod_{i=1}^{m} G_{X_{m,i}} = (G_Y)^m = G_X$ donc $X \sim \sum_{i=1}^{m} X_{m,i}$.

II.C - Séries de variables aléatoires à valeurs entières

II.C.1.a) On a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A\cap \overline{B}) \text{ et } \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(\overline{A}\cap B)$$

donc $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| = |\mathbb{P}(A\cap\overline{B}) - \mathbb{P}(\overline{A}\cap B)| \le |\mathbb{P}(A\cap\overline{B})| + |\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)|$.

II.C.1.b) Soit $t \in [-1,1]$. On a : $|G_X(t) - G_Y(t)| = |\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbb{P}(X=k) - \mathbb{P}(Y=k))t^k|$, donc

$$\begin{aligned} |G_X(t) - G_Y(t)| &\le \sum_{k=0}^{\infty}|\mathbb{P}(X=k) - \mathbb{P}(Y=k)| \\ &\le \sum_{k=0}^{\infty}(\mathbb{P}(X=k, Y\neq k) + \mathbb{P}(X\neq k, Y=k)) \quad \textbf{II.C.1.a} \\ &= 2P(X\neq Y) \end{aligned}$$

II.C.2.a) Pour $\omega \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned} \omega \in Z_{n+1} &\implies \exists i \ge n+1 \ , \ U_i(\omega) \neq 0 \\ &\implies \exists i \ge n \ , \ U_i(\omega) \neq 0 \\ &\implies \omega \in Z_n \end{aligned}$$

La suite (Z_n) est donc décroissante au sens de l'inclusion.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \bigcup_{i=n}^{+\infty} (U_i \neq 0)$, par sous-additivité de probabilité, on écrit :

$$\mathbb{P}(Z_n) \leq \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(U_i \neq 0)$$

Le second membre de cette inégalité est le reste d'une série convergente, sa limite est donc nulle, d'où $\mathbb{P}(Z_n)$ converge vers 0 par encadrement.

II.C.2.b) Par théorème de continuité monotone, on a : $\mathbb{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} Z_n) = 0$ donc $\mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{Z_n}) = 1$.

Pour $\omega \in \Omega$, on a :

$$\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{Z_n} \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall i \geq n \ , \ U_i(\omega) = 0$$

donc

$$\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{Z_n} \iff \{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i(\omega) \neq 0\} \text{ est fini}$$

D'où la propriété que l'ensemble $\{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i \neq 0\}$ est fini p.s.

II.C.2.c) Pour presque tout $\omega \in \Omega$ l'ensemble $\{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i(\omega) \neq 0\}$ est fini donc la somme $S(\omega)$ est fini pour presque tout $\omega \in \Omega$.

D'après la question **II.C.1.b**, on a :

$$\forall t \in [-1, 1] \ , \ |G_S(t) - G_{S_n}(t)| \leq 2\mathbb{P}(S \neq S_n)$$

puisque les valeurs des variables U_i sont positives, alors

$$(S \neq S_n) = (S > S_n) = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \geq n+1 : U_i(\omega) \neq 0\} = Z_{n+1}$$

par suite :

$$\|G_S - G_{S_n}\|_{\infty,[-1,1]} \leq 2\mathbb{P}(Z_{n+1})$$

D'où la convergence uniforme de G_{S_n} vers G_S sur $[-1, 1]$ car $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0$.

II.C.3.a) Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(X_i \neq 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_i = 0 \\ 1 - e^{-\lambda_i} & \text{si } \lambda_i \neq 0 \end{cases}$

La série $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} \lambda_i$ est convergente, donc son terme général est proche de 0 pour i assez grand, on écrit :

$$\mathbb{P}(X_i \neq 0) - \lambda_i = \frac{e^{\lambda_i}(1 - \lambda_i) - 1}{e^{\lambda_i}} = \frac{(1 + \lambda_i + o(\lambda_i))(1 - \lambda_i) - 1}{e^{\lambda_i}} = o(\lambda_i)$$

les deux séries $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} \lambda_i$ et $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X_i \neq 0)$ ont donc la même nature (termes équivalents et de même signe).

II.C.3.b) La suite (X_i) vérifie les conditions de **II.C.2** :

- $\forall i$, $X_i(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$
- Les X_i sont indépendantes
- $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_i \neq 0) < +\infty$

donc $\sum_i X_i$ est p.s. convergente de somme S.

Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Par **II.C.2**, on a : $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$, donc

$$\forall t \in [-1,1] \ , \ G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = k)t^k = \exp\left((t-1)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

puis $\forall t \in [-1,1]$, $G_S(t) = \lim_{n\to\infty} G_{S_n}(t) = \exp((t-1)\lambda)$, d'où : $S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

II.C.3.c)

• La convergence de $\sum iX_i$ p.s. est justifiée aussi par le fait que l'ensemble $\{i \in \mathbb{N}^* \mid X_i \neq 0\}$ est p.s. fini.

• On pose : $X = \sum_{i=1}^{\infty} iX_i$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{i=1}^{n} iX_i$.

Comme dans la question **II.C.2.c**, on vérifie que :

$$\|G_X - G_{T_n}\|_{\infty,[-1,1]} \leq 2\mathbb{P}(Z_{n+1})$$

avec $Z_n = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \geq n : U_i(\omega) \neq 0\}$ et on en déduit la convergence uniforme de G_{T_n} vers G_X sur $[-1,1]$.

D'après **II.B.4** , $G_X(t) = \lim_{n\to+\infty} G_{T_n}(t) = e^{-\lambda}\exp(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i t^i)$ ($\sum_{i\geq 1} \lambda_i t^i$ est convergente de rayon ≥ 1 car $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < +\infty$).

On considère $m \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \exp(\frac{-\lambda}{n} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{m} t^j)$ est la fonction génératrice de $Y = \sum_{i=1}^{\infty} iY_i$ où les Y_i sont indépendantes et $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\frac{\lambda_i}{m})$.

Il existe donc $X_{m,1}, ..., X_{m,m}$ des variables sur un espace Ω_m qui sont indépendante et de même loi que Y, on a donc $G_{\sum_{i=1}^{m} X_{m,i}} = \prod_{i=1}^{m} G_{X_{m,i}} = (G_Y)^m = G_X$ donc $X \sim \sum_{i=1}^{m} X_{m,i}$.

III - Variables entiées infiniment divisibles : étude générale

III.A - Série entière auxiliaire

III.A.1) Supposons l'existence de cette suite :

Pour $k = 1$, $\mathbb{P}(X = 1) = \lambda_1 \mathbb{P}(X = 0)$ donc $\lambda_1 = \frac{\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(X=0)}$.

Supposons connus $\lambda_1, ..., \lambda_k$, on aura : $\lambda_{k+1} = \frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=0)} - \sum_{j=1}^{k} \frac{j\lambda_j}{k+1} \frac{\mathbb{P}(X = k+1-j)}{\mathbb{P}(X = 0)}$.

d'où l'unicité des λ_i et l'existence car les valeurs précédentes vérifient bien les égalités énoncées.

III.A.2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a : $\lambda_k \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=k) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j\lambda_j}{k} \mathbb{P}(X=k-j)$, en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient la partie gauche de la propriété.
Pour la partie droite, il suffit de majorer les réels $\mathbb{P}(X=k) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \sum_{i\geq 1, i\neq k} \mathbb{P}(X=i)$ et $\mathbb{P}(X=k-j) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \sum_{i\geq 1, i\neq k-j} \mathbb{P}(X=i)$, $j = 1, ..., k-1$ par le réel $1 - \mathbb{P}(X=0)$.

III.A.3) Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.
- Pour $k=1$, on a : $|\lambda_1| = \frac{\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(X=0)} \leq \frac{1-\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X=0)} = \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)} - 1$. donc $1 + |\lambda_1| \leq \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)}$.
- Supposons que la propriété est vraie jusqu'à $k-1$, On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0)\left(1+\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|\right) &= \mathbb{P}(X=0)\left(1+\sum_{j=1}^{k-1}|\lambda_j|\right) + \mathbb{P}(X=0)|\lambda_k| \\
&\leq \mathbb{P}(X=0)\left(1+\sum_{j=1}^{k-1}|\lambda_j|\right) + (1-\mathbb{P}(X=0))\left(1+\sum_{j=1}^{k-1}|\lambda_j|\right) \\
&= 1+\sum_{j=1}^{k-1}|\lambda_j| \\
&\leq \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)^{k-1}}
\end{aligned}$$

D'où le résultat cherché.

III.A.4) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $|\lambda_k| \leq 1 + \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \leq \dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)^k}$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $|\lambda_k|\mathbb{P}(X=0)^k \leq 1$
par suite : $\mathbb{P}(X=0) \leq \rho(X) = \sup\{r \geq 0 \mid (\lambda_k r^k)_k \text{ est bornée }\}$.

III.A.5) Il faut vérifier d'abord que $\rho(X) \leq 1$, mais il n'y a pas de raison pour avoir cette inégalité car $\sum \lambda_j$ peut diverger.
Les fonctions G_X et H_X sont de classe C^∞ sur $]-m, m[$ avec $m = \min(\rho(X), 1)$ et on a :

$$\forall\ t \in]-m, m[\quad , \quad G'_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k)t^{k-1} \quad , \quad H'_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\lambda_k t^{k-1}$$

Par convergence absolue de séries de sommes H'_X et G_X , on a :

$$H'_X(t)G_X(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\lambda_{k+1}t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)t^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

avec $c_k = \sum_{j=0}^{k} \lambda_{j+1}(j+1)\mathbb{P}(X=k-j) = \sum_{j=1}^{k+1} j\lambda_j \mathbb{P}(X=k+1-j) = (k+1)\mathbb{P}(X=k+1)$.
D'où $G'_X = H'_X.G_X$, par suite, G_X est une solution de l'équation différentielle $y' - H'_X y = 0$ sur l'intervalle $]-m, m[$, donc il existe $a \in \mathbb{R}$, vérifiant : $G_X(t) = a\exp(H_X(t))$, pour tout $|t| < m$.

On a : $\mathbb{P}(X=0)=G_X(0)=a\exp(H_X(0))=a\mathbb{P}(X=0)$ donc $a=1$ puis la propriété cherchée.
III.A.6) Soit $|t|<\min(\rho(X),\rho(Y),\rho(X+Y),1)$. Par **I.A.2** et **II.A.4** , on a :

$$\exp(H_{X+Y})=G_{X+Y}=G_XG_Y=\exp(H_X)\exp(H_Y)=\exp(H_X+H_Y)$$

donc $\quad H_{X+Y}=H_X+H_Y$, ce qui donne en particulier que $\rho(X+Y)\geq\min(\rho(X),\rho(Y))$ (Rayon de convergence de la somme de deux séries entières).

III.A - Variables aléatoires entières $\lambda-$positives

III.B.1) On a : $k\left(\mathbb{P}(X=k)-\lambda_k\mathbb{P}(X=0)\right)=\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}j\lambda_j\mathbb{P}(X=k-j)\geq 0$
donc $\mathbb{P}(X=k)-\lambda_k\mathbb{P}(X=0)\geq 0$ puis $\lambda_k\leq\frac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=0)}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\leq\frac{1}{\mathbb{P}(X=0)}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k)\leq\frac{1}{\mathbb{P}(X=0)}$.
D'où la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\lambda_k$.
III.B.2) Dans ce cas $\min(\rho(X),1)=1$ car $\displaystyle\sum_i\lambda_i$ converge , alors, d'après la question **III.A.5)**, on a :

$$\forall t\in]-1,1[\quad,\quad G_X(t)=\exp(H_X(t))$$

La continuité de H_X,G_X et exp permet de prolonger cette égalité sur $[-1,1]$ et avoir :

$$1=G_X(1)=\exp(H_X(1))=\exp(\left(\ln(P(X=0))+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\right)$$

puis, on en déduit que : $\quad 0=\ln(P(X=0))+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k$.

III.B.3) Vue que les λ_i sont positives ou nuls, alors $\forall t\in[-1,1]$, $G_{\sum_{i=1}^{\infty}iX_i}(t)=e^{-\lambda}\exp(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_kt^k)$,
d'après la question **II.C.3.c)**, donc $G_{\sum_{i=1}^{\infty}iX_i}=\exp(H_X)=G_X$, d'où $\quad X\sim\sum_{i=1}^{\infty}iX_i$.

III.C - Caractérisation des variables entières infiniment divisibles

III.C.1.a) Les $X_{n,i}$, $i=1,...,n$ sont indépendantes de même loi, donc, si une variable $X_{n,i}$ pernd une valeur négative, les autres le sont aussi, puis X prend une valeur négative. On obtient :

$$\mathbb{P}(X_{n,1}\geq 0)^n=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_{n,i}\geq 0)=\mathbb{P}(X_{n,1}\geq 0,...,X_{n,n}\geq 0)=\mathbb{P}(X\geq 0)=1$$

D'où $\qquad\mathbb{P}(X_{n,1}\geq 0)=1$.
III.C.1.b) On le vérifie comme dans **III.C.1.a** que les $X_{n,i}$, $i=1,...,n$ sont indépendantes

de même loi et p.s. positives ou nulles donc :

$$\mathbb{P}(X_{n,1}=0)^n=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_{n,i}=0)=\mathbb{P}(X_{n,1}=0,...,X_{n,n}=0)=\mathbb{P}(X=0)>0$$

D'où

$$\mathbb{P}(X_{n,1}=0)>0$$

III.C.1.c)
Supposons que $X_{n,1}$ prend une valeur x non entière avec une probabilité $p>0$
alors $\mathbb{P}(X=x)\geq\mathbb{P}(X_{n,1}=x,X_{n,2}=0,...,X_{n,n}=0)=p\mathbb{P}(X_{n,1}=0)^{n-1}>0$,
ce qui est contredit le fait que $X(\Omega)\subseteq\mathbb{N}$.
III.C.2.a)
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X_{n,1}=0,...,X_{n,n}=0)=\mathbb{P}(X_{n,1}=0)^n$ (car les $X_{n,i}$ prend des valeur entières p.s.)
donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_{n,1}=0)=\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X=0)^{\frac{1}{n}}=1$.
III.C.2.b) Soit $i\in\mathbb{N}^*$. La variable $X_{n,i}$ prend des valeur entières p.s. donc :

$$\mathbb{P}(X_{n,1}=i)=1-\mathbb{P}(X_{n,1}=0)-\sum_{k\in\mathbb{N}^*\setminus\{i\}}\mathbb{P}(X_{n,1}=k)\leq 1-\mathbb{P}(X_{n,1}=0)$$

d'où le résultat cherché par encadrement.
III.C.3.a) Les variables $X_{n,1},...,X_{n,n}$ sont indépendantes de somme X, on peut donc généraliser le résultat de la question **III.A.6**, puisque l'indépendance des $X_{n,i}$ entraîne celle de $\sum\limits_{i=1}^{n-1}X_{n,i}$ et $X_{n,i}$, on écrit donc

$$H_X=\sum_{k=1}^{n}H_{X_{n,k}}$$

Comme ces variables ont la même loi , alors , elles ont la même série entière auxiliaire H_n,
d'où : $H_X=nH_n$.
II.C.3.b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $H_n(t)=\ln(\mathbb{P}(X_{n,1}=0))+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k t^k$.
La question précédente permet d'écrire : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\lambda_k=n\mu_k$.
Par définition : $nk\mathbb{P}(X_{n,1}=k)=n\sum\limits_{j=1}^{k}j\mu_j\mathbb{P}(X_{n,1}=k-j)=\sum\limits_{j=1}^{k}j\lambda_j\mathbb{P}(X_{n,1}=k-j)$.
II.C.4) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$n\mathbb{P}(X_{n,1}=k)-\lambda_k=\lambda_k(\mathbb{P}(X_{n,1}=0)-1)+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{j}{k}\lambda_j\mathbb{P}(X_{n,1}=k-j)$$

En utilisant **II.C.2.a** et **II.C.2.b** , on obtient : $\lim\limits_{n\to\infty}n\mathbb{P}(X_{n,1}=k)=\lambda_k$.
Les λ_k sont positives ou nulles car limites de suites à termes dans $\mathbb{R}^+$, on en déduit que X est $\lambda-$positive.
III.C.5.a) $(i)\Longrightarrow(ii)$ La variable X que l'on a trouvé $\lambda-$positive à la question précédente est supposée infiniment divisible.
$(ii)\Longrightarrow(iii)$ La variable X dans la sous-partie **III.B** était $\lambda-$positive, on a démontré en **III.B.3**

qu'il existe des variables de Poisson $(X_i)_i$ qui sont indépendantes et vérifient $X \sim \sum_{i=1}^{\infty} iX_i$.
$(iii) \Longrightarrow (i)$ Dans la question **II.C.**, On a considéré des variables de Poisson $(X_i)_i$ qui sont indépendantes et on a trouvé qu'elle est infiniment divisible.
III.C.5.b) Posons $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cap [k, +\infty[$. On a :

$$\begin{array}{rcc} X \text{ est infiniment divisible} & \Longleftrightarrow & X-k \text{ est infiniment divisible} \\ & \Longleftrightarrow & X-k \text{ est } \lambda-\text{positive} \\ & \Longleftrightarrow & \exists (X_i)_{i\geq 1} \text{ comme au } \textbf{III.C.3} \text{ , telle que } \quad X-k \sim \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} iX_i \end{array}$$

III.C.5.c) Ici $k=1$. On sait que $G_{X-1}(t) = p\sum_{i=0}^{\infty}(t(1-p))^i = \dfrac{p}{1-t(1-p)}$
donc

$$H_{X-1}(t) = \ln(G_{X-1}(t)) = \ln(p) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1-p)^i t^i}{i}$$

Les coefficients d'indices positifs de ce développement sont tous ≥ 0, donc $X-1$ est $\lambda-$positive, d'où X est infiniment divisible.

Pour vos remarques, merci de me contacter sur " taoufiki-maths@hotmail.fr"