

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^4 muni de son produit scalaire canonique, par :

$$\forall X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, f(X) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

On cherche les extrema éventuels de la fonction f sous la contrainte : $H = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 2\}$ et les points où ces extrema sont atteints.

Première méthode

1. Déterminer les extrema de la fonction $h : (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2u^2 + v^2 + w^2 - 4u + 4$.

Solution: h est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ car polynomiale. Pour $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, on a $\nabla h(u, v, w) = (4u - 4, 2v, 2w)$.

Ainsi, h a unique point critique : $(1, 0, 0)$. Comme h est définie sur \mathbb{R}^3 qui est ouvert, c'est le seul point le lequel h peut admettre un extremum local.

De plus, $h(u, v, w) = 2(u - 1)^2 + v^2 + w^2 + 2 \geq 2$ et ainsi, $h(u, v, w) \geq h(1, 0, 0)$.

On a donc montré que h admet en $(1, 0, 0)$ un minimum global. h n'a pas d'autre extremum (local ou global) puisque n'a pas d'autre point critique.

2. Déterminer les solutions du problème posé.

Solution: Soit $(x, y, z, t) \in H$. On a alors $x = 2 - y$ et ainsi $f(x, y, z, t) = (2 - y)^2 + y^2 + z^2 + t^2 = h(y, z, t)$.

On conclut que sous la contrainte H , f admet un minimum global en $(1, 1, 0, 0)$ qui vaut $f(1, 1, 0, 0) = 2$ et n'admet pas de maximum global.

Deuxième méthode

Soit $g : X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto x + y - 2$.

3. En utilisant la fonction g , déterminer les extrema possibles de f restreinte à H .

Solution: On applique la propriété d'optimisation sous contrainte ce qu'on peut bien faire puisque f et g sont de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^4 .

De plus, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $\nabla g(x, y, z, t) = (1, 1, 0, 0) \neq 0$ et $\nabla f(x, y, z, t) = (2x, 2y, 2z, 2t)$.

Soit $\omega = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Supposons que $f|_H$ admet en ω un extremum. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(\omega) = \lambda \nabla g(\omega)$. Ainsi, $2a = \lambda$, $2b = \lambda$, $c = 0$ et $d = 0$.

On a donc $\omega = (\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, 0, 0)$. Comme $\omega \in H$, cela donne $\lambda = 2$ et finalement, $\omega = (1, 1, 0, 0)$.

Dans la question suivante, on vérifie qu'en ce point, $f|_H$ admet bien un extremum.

4. Retrouver les solutions du problème posé.

Solution: On peut reprendre le raisonnement de la question 2.

Troisième méthode

Soit $F = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0\}$ et $Y = (-1, -1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$.

5. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et en donner la dimension.

Solution: Soit $\phi : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto x + y$.

ϕ est linéaire car : soit $(x, y, z, t, x', y', z', t') \in \mathbb{R}^8$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \phi(\lambda(x, y, z, t) + (x', y', z', t')) &= \phi(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t') \\ &= \lambda x + x' + \lambda y + y' \\ &= \lambda(x + y) + x' + y' \\ &= \lambda\phi(x, y, z, t) + \phi(x', y', z', t') \end{aligned}$$

On a $F = \ker \phi$: F est donc un sev de \mathbb{R}^4 et comme ϕ est une forme linéaire non nulle, sa dimension est 3.

6. Déterminer le sous-espace orthogonal du sous-espace F .

Solution: On peut supposer ici qu'il s'agit de travailler avec le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^4 . On le notera $(\cdot|\cdot)$.

On a $F = \{X \in \mathbb{R}^4, (X|Y) = 0\}$. Ainsi, $\text{Vect}(Y) \subset F^\perp$. Mais, par théorème du supplémentaire orthogonal, $\dim F^\perp = 1$, donc finalement, par égalité des dimensions, $F = \text{Vect}(Y)^\perp$.

7. Calculer la distance $d(Y, F)$ entre Y et le sous-espace vectoriel F .

Solution: Par propriété du cours, en notant p_F la projection orthogonale sur F , on a $d(Y, F) = \|Y - p_F(Y)\| = \|Y\|$ puisque $Y \in F^\perp$.

Finalement, $d(Y, F) = \sqrt{2}$.

8. Soit $X \in \mathbb{R}^4$. Justifier que : $X \in H \iff X + Y \in F$.

Solution: On note $X = (x, y, z, t)$.

On remarque juste qu'on a $X \in H$ ssi $(x - 1) + (y - 1) = 0$ ce qui est bien équivalent à $X + Y \in F$.

9. En déduire la structure de l'ensemble H .

Solution: H est un hyperplan affine de \mathbb{R}^4 de direction F .

10. Retrouver de nouveau les solutions du problème posé.

Solution: On a pour tout $X \in \mathbb{R}^4$, $f(X) = \|X\|^2$.

On cherche les éventuels max/min de $\Gamma = \{\|X\|^2, X \in H\}$.

H est un sous-espace affine non réduit à un point donc n'est pas borné: ainsi, Γ n'est pas majoré et f_H n'admet pas de maximum.

D'autre part, comme $\|X\| = \|X + Y - Y\|$ et que lorsque X parcourt H , $X + Y$ parcourt F , on a aussi $\Gamma = \{\|f - Y\|^2, f \in F\}$.

Enfin, par le cours, on sait que Γ admet un minimum qui est $d(Y, F)^2$ et qui vaut donc 2. On sait aussi par le cours que ce minimum n'est atteint qu'en un seul point qui est le projeté orthogonal de Y sur F c'est-à-dire en $f = (0, 0, 0, 0)$ et $X = -Y$. Cela montre que f_H admet un minimum local, que celui-ci vaut 2 et qu'il est atteint uniquement en $(1, 1, 0, 0)$.

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On note $E_{n-1} = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ le \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n , des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et à coefficients dans \mathbb{C} . On note $\mathcal{B} = (Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1})$ où, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $Q_k(X) = X^k$, la base canonique de E_{n-1} . Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on note φ_α l'endomorphisme de E_{n-1} qui à tout polynôme P , associe :

$$\varphi_\alpha(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{q=0}^{n-1} P(\alpha^q) X^q$$

Soit A_α la matrice de l'endomorphisme φ_α dans la base canonique \mathcal{B} de E_{n-1} . Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On rappelle que $\omega^n = 1$ et que $\bar{\omega} = \omega^{-1} = \frac{1}{\omega}$.

1. Déterminer, suivant la valeur de l'entier relatif m , la somme : $\sigma_m = \sum_{r=1}^n \omega^{m(r-1)}$.

Solution: On reconnaît une somme géométrique de raison ω^m .

Si $n|m$, alors $\omega^m = 1$ et $\sigma_m = n$.

Si n ne divise pas m , alors, $\frac{m}{n} \notin \mathbb{Z}$ donc $\frac{2im\pi}{n} \notin 2i\pi\mathbb{Z}$ et ainsi, $\sigma^m \neq 1$. On a donc $\sigma_m = \frac{1-\omega^{mn}}{1-\omega^m} = 0$.

On note $A_\omega = (a_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ la matrice associée à l'endomorphisme φ_ω dans la base \mathcal{B} de E_{n-1} .

2. Écrire la matrice A_ω dans le cas où $n = 3$. On utilisera le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Solution: On a ici $\omega = j$ et $\phi_\omega : P \in \mathbb{C}_2[X] \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}}(P(1) + P(j)X + P(j^2)X^2)$.

Ainsi

$$A_\omega = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

3. Démontrer que, pour tout couple $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a : $a_{k,\ell} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(k-1)(\ell-1)}$.

Solution: Dans le cas général, on a $\phi_\omega : P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}(P(1) + P(\omega)X + \dots + P(\omega^{n-1})X^{n-1})$.

En particulier, pour $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\phi_\omega(X^{\ell-1}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\omega^{k-1})^{\ell-1} X^{k-1}$.

On obtient donc bien l'expression $a_{k,\ell} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(k-1)(\ell-1)}$.

4. La matrice A_ω est-elle symétrique? Peut-on affirmer qu'elle est diagonalisable?

Solution: D'après l'expression précédente, pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $a_{k,\ell} = a_{\ell,k}$ ce qui prouve que A_ω est symétrique.

A_ω n'étant pas à coefficients réels, on ne peut pas appliquer le théorème spectral et affirmer qu'elle est diagonalisable.

5. Calculer $A_\omega \times A_{\bar{\omega}}$. En déduire que A_ω est inversible et déterminer son inverse.

Solution: Par formule du produit matrice, si $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient (k, ℓ) de $A_\omega \times A_{\bar{\omega}}$ est

$$\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \omega^{(k-1)(p-1)} \omega^{-(p-1)(\ell-1)}$$

ie

$$\frac{1}{n} \sigma_{k-\ell}$$

A l'aide de la question 1, on obtient donc $A_\omega \times A_{\bar{\omega}} = I_n$.

Cela montre que A_ω est inversible et qu'on a $A_\omega^{-1} = A_{\bar{\omega}}$.

6. Déterminer alors un nombre complexe α tel que : $\varphi_\omega^{-1} = \varphi_\alpha$.

Solution: D'après ce qui précède, on peut choisir $\alpha = \bar{\omega}$.

7. Calculer $(A_\omega)^2$ puis vérifier que $(A_\omega)^4 = I_n$.

Solution:

En reprenant le calcul de la question 5, on obtient que le coefficient (k, ℓ) de A_ω^2 est $\frac{1}{n}\sigma_{k+\ell-2}$. Ainsi

$$A_\omega^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & 1 \\ & & \ddots & \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}$$

puis $A_\omega^4 = I_n$.

8. La matrice A_ω est-elle diagonalisable ?

Solution: $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de A_ω qui est simplement scindé puisque égal à $(X - 1)(X - i)(X + 1)(X + i)$. On peut donc affirmer que A_ω est diagonalisable.

Éléments propres de φ_ω

On note, pour $q \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, $L_q(X) = \frac{X^n - 1}{X - \omega^q}$. En particulier, $L_0(X) = 1 + X + \dots + X^{n-1}$.

9. Déterminer les valeurs propres possibles de φ_ω .

Solution: Comme $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de ϕ_ω , les valeurs propres de ϕ_ω sont incluses dans $\{1, i, -1, -i\}$ (qui est l'ensemble des racines de $X^4 - 1$).

10. Exprimer les n racines du polynôme $X^n - 1$ à l'aide de puissances de ω .

Solution: D'après le cours, ce sont les ω^k avec $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ et il y en a n distinctes.

11. En déduire que : $\forall q \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, L_q \in E_{n-1}$.

Solution: On a $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$ puisque est de degré n et a n racines distinctes d'après ce qui précède. Ainsi, $L_q = \prod_{k=0, k \neq q}^{n-1} (X - \omega^k)$. C'est bien un polynôme complexe de degré $\leq n - 1$.

On pose $H_0 = \text{Vect}(Q_0, L_0)$ et on admet que (Q_0, L_0) en est une base.

12. Vérifier que H_0 est stable par φ_ω .

Solution: On a $\phi_\omega(H_0) = \text{Vect}(\phi_\omega(Q_0), \phi_\omega(L_0))$.

Or, $\phi_\omega(Q_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} X^k = \frac{1}{\sqrt{n}} L_0$ et $\phi_\omega(L_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} L_0(\omega^k) X^k$. Or, les racines de L_0 sont $\omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ donc $\phi_\omega(L_0) = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} Q_0$.

Finalement, $\phi_\omega(H_0) = \text{Vect}(\frac{1}{\sqrt{n}} L_0, \sqrt{n} Q_0) = H_0$.

13. Écrire la matrice de l'endomorphisme induit par φ_ω sur H_0 dans la base (Q_0, L_0) .

Solution: D'après la question précédente, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \end{pmatrix}$$

14. En déduire :

- un vecteur non nul de $\text{Ker}(\varphi_\omega - \text{Id}_{E_{n-1}})$,
- un vecteur non nul de $\text{Ker}(\varphi_\omega + \text{Id}_{E_{n-1}})$.

Solution: Des calculs précédents, on obtient $\phi_\omega(\sqrt{n}Q_0 - L_0) = L_0 - \sqrt{n}Q_0$: on a donc $\sqrt{n}Q_0 - L_0 \in \text{ker}(\phi_\omega + \text{Id}_{E_{n-1}})$.

De même, $\sqrt{n}Q_0 + L_0 \in \text{ker}(\phi_\omega - \text{Id}_{E_{n-1}})$.

15. Dans le cas $n = 3$, déterminer le spectre de A_ω .

Solution: D'après ce qui précède, on a déjà 1 et -1 valeurs propres de A_ω . On travaille dans \mathbb{C} donc A_ω a trois valeurs propres comptées avec multiplicité : soit c la troisième valeur propre. On a $-1 + 1 + c = \text{Tr}(A_\omega)$ donc $c = i$.

Finalement,

$$\text{Sp}(A_\omega) = \{-1, 1, i\}$$

16. Dans le cas $n = 4$, déterminer les valeurs propres de A_ω .

Solution: On sait déjà que -1 et 1 sont valeurs propres de A_ω . Comme dans la question précédente, notons c et d les deux valeurs propres manquantes.

On a $\{c, d\} \in \{-1, 1, i, -i\}$ et $-1 + 1 + c + d = \text{tr}(A_\omega) = \frac{1}{2}(1 + \omega + \omega^4 + \omega^9)$. Mais ici $\omega = i$ donc $1 + \omega + \omega^4 + \omega^9 = 1 + i + 1 + i$ et finalement, $c + d = 1 + i$.

Nécessairement, on a $\{c, d\} = \{1, i\}$.

Finalement,

$$\text{Sp}(A_\omega) = \{-1, 1, i\}$$

17. Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{n}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} \\ 0 & \frac{\omega}{\sqrt{n}} & 0 & 0 \\ \frac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solution: Le polynôme caractéristique est $X^4 - 1$ donc les valeurs propres de cette matrices sont $-1, 1, i$ et $-i$.

On suppose à présent $n \geq 5$.

18. Montrer que le sous-espace vectoriel $G = \text{Vect}(Q_1, Q_{n-1}, L_1, L_{n-1})$ est de dimension 4 et est stable par φ_ω .

Solution: Pour montrer que G est de dimension 4, montrons la liberté de $(Q_1, Q_{n-1}, L_1, L_{n-1})$: soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $aQ_1 + bQ_{n-1} + cL_1 + dL_{n-1} = 0$ (*). 1 et ω^2 sont racines de L_1 et L_{n-1} donc, en évaluant (*) en ces valeurs on obtient $a + b = 0$ et $a\omega^2 + b\omega^{2n-2} = 0$. On a $\omega^2 \neq \omega^{2n-2}$ (puisque sinon on aurait $\omega^{2n-4} = 1$ donc $2n - 4 = n$ donc $n = 4$) et ainsi on peut conclure que $a = b = 0$.

On peut ensuite évaluer (*) en ω pour obtenir $d = 0$ et enfin $c = 0$.

Montrons maintenant que G est stable par ϕ_ω : on a $\phi_\omega(G) = \text{Vect}(\phi_\omega(Q_1), \phi_\omega(Q_{n-1}), \phi_\omega(L_1), \phi_\omega(L_{n-1}))$ et $\phi_\omega(Q_1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k X^k = \frac{1}{\sqrt{n}} L_0(\omega X) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{X^n - 1}{\omega X - 1} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{X^n - 1}{X - \omega^{n-1}} = \frac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} L_{n-1}$.

De même, $\phi_\omega(Q_{n-1}) = \frac{\omega}{\sqrt{n}} L_1$, puis $\phi_\omega(L_1) = \frac{1}{\sqrt{n}} L_1(\omega) X$ avec $L_1(\omega) = \prod_{k=0, k \neq 1}^{n-1} (\omega - \omega^k) = \omega^{n-1} \prod_{k=0, k \neq 1}^{n-1} (1 - \omega^{k-1}) = \frac{1}{\omega} L_0(\omega) = \frac{n}{\omega}$. Ainsi, $\phi_\omega(L_1) = \frac{\sqrt{n}}{\omega} Q_1$.

Et enfin, $\phi_\omega(L_{n-1}) = \frac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} Q_{n-1}$.

On a donc bien montré que G est stable par ϕ_ω .

19. Déterminer le spectre de φ_ω .

Solution: La matrice de la restriction de ϕ_ω à G est celle de la question 17. Le spectre de ϕ_ω contient donc $\{1, -1, i, -i\}$. Par ailleurs, par 9, il y est inclus: on conclut que le spectre de ϕ_ω est exactement $\{-1, 1, i, -i\}$.

EXERCICE 3

1. Question de cours. Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

Solution: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Pour tout $x \in]-1, 1]$, $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k - 1 \frac{x^k}{k}$.

On pose, lorsque cela est possible, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

2. Montrer que la fonction f est définie sur \mathbb{R} .

Solution: On utilise le critère de d'ALEMBERT pour déterminer le rayon de convergence de cette série entière : $\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(n+1)^2} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ donc $R = +\infty$ et cela montre que f est définie sur \mathbb{R} .

3. Justifier que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Solution: Par propriété du cours, la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence (qui est \mathbb{R}) ici.

4. Démontrer que la fonction f est lipschitzienne sur tout segment $[a, b]$ de \mathbb{R} .

Solution: Sur tout segment $[a, b]$ de \mathbb{R} , f est de classe C^1 donc f' y est bornée (par le théorème des bornes atteintes) et par corollaire du théorème des accroissements finis, elle est lipschitzienne.

5. Prouver que pour tout réel positif x , $f'(x) \leq e^x$.

Solution: Soit $x \geq 0$. Par propriété du cours, on a $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!} x^n$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n!}$ et donc finalement, $f'(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ ie $f'(x) \leq e^x$.

6. Soient x et y deux réels positifs. On note $z = \max(x, y)$. Prouver que l'on a: $|f(x) - f(y)| \leq e^z |x - y|$.

Solution: Pour tout $t \in [x, y]$ (ou $[y, x]$) on a $|f'(t)| \leq e^z$, donc, par corollaire du théorème des accroissements finis, $|f(x) - f(y)| \leq e^z |x - y|$.

7. Prouver que l'on a: $f(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

Solution: On a $f'(0) = 1$ donc, par TAYLOR-YOUNG, $f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$ au voisinage de 0 ie $f(x) = 1 + x + o(x)$. Et cela s'écrit aussi $f(x) - 1 \sim x$ lorsque $x \rightarrow 0$.

On pose, pour tout $x > 0$, $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t[f(t)]^2} dt$.

8. Justifier que g est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Solution:

g est bien définie par on a $f(t) > 0$ pour $t > 0$.

Par théorème, g est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{xf^2(x)}$.

Comme f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* , g' l'est aussi et finalement, g aussi.

9. Étudier le signe de g sur $]0, +\infty[$.

Solution: Par positivité de l'intégrale, si $x \in]0, 1]$, on a $g(x) \leq 0$ et si $x \in [1, +\infty[$, on a $g(x) \geq 0$.

10. Montrer que : $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$.

Solution: On a $g(x) - \frac{1}{\ln x} = \int_1^x \frac{dt}{tf^2(t)} - \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{1-f^2(t)}{tf^2(t)} dt$. Or, lorsque $x \rightarrow 0$, $\frac{1-f^2(x)}{xf^2(x)} = \frac{(1-f(x))(1+f(x))}{xf^2(x)} \sim 2$. Cela prouve que $\int_0^1 \frac{1-f^2(t)}{tf^2(t)} dt$ converge (c'est l'intégrale d'une fonction continue sur $]0, 1]$ qui a une limite finie en 0).

Ainsi, $g(x) - \ln x = o(\ln x)$ lorsque $x \rightarrow 0$ et donc $g(x) \sim \ln x$.

11. Prouver que pour tout $t > 0$, on a : $f(t) > 1 + t$.

Solution: Soit $t > 0$. On a $f(t) - (1 + t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!^2} \geq 0$ puisque c'est la somme d'une série à termes positifs. Et c'est même > 0 puisqu'au moins un des termes est > 0 .

12. En déduire que g possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution: g est croissante sur $[1, +\infty[$ (puisque sa dérivée y est positive) et par le théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite en $+\infty$. De plus cette limite est infinie lorsque g n'est pas majorée et finie sinon.

De plus, pour $x \geq 1$, par croissance de l'intégrale, on a $g(x) \leq \int_1^x \frac{dt}{t(1+t)^2}$. Or, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)^2}$ converge car c'est l'intégrale généralisée d'une fonction positive, continue et équivalent en $+\infty$ à $\frac{1}{t^3}$ qui est intégrable par Riemann.

Finalement, comme $\frac{1}{t(1+t)^2} \geq 0$, on $g(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)^2}$.

Cela prouve que g est majorée et qu'ainsi sa limite en $+\infty$ est finie.

13. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X(1+X)^2}$.

Solution: On sait qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\frac{1}{X(1+X)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}$$

Par les méthodes classiques, on obtient $a = 1$ et $c = -1$.

Puis en faisant $\times X$ puis en passant aux fonctions rationnelles et en faisant tendre $x \rightarrow +\infty$, on obtient $0 = a + b$ donc $b = -1$.

On conclut

$$\frac{1}{X(1+X)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2}$$

14. Démontrer que pour tout $x > 1$, on a :

$$g(x) \leq \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} + \ln(2) - \frac{1}{2}$$

Solution: En reprenant la majoration de la question 12, et en utilisant la croissance de l'intégrale, on obtient pour $x > 1$, $g(x) \leq \int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} dt$ ce qui donne par calcul

$$g(x) \leq \ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2} + \ln 2$$

ce qui est bien l'inégalité demandée.

15. En déduire que g est majorée par $\ln(2)$ sur $]0, +\infty[$.

Solution: g est négative sur $]0, 1]$ donc majorée par $\ln 2$. Si $x \geq 1$, on a $\ln \frac{x}{x+1} \leq 0$ puisque $\frac{x}{x+1} \leq 1$, $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$ et finalement, $g(x) \leq \ln 2$.