

Concours Communs Polytechniques - Session 2012

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques II Filière MP

Arithmétique, étude de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto AM - MA$.

Corrigé par M.TARQI-http://alkendy.x10.mx

EXERCICE :

1. On a $3^1 \equiv 3[11]$, $3^2 \equiv 9[11]$, $3^3 \equiv 5[11]$, $3^4 \equiv 4[11]$ et $3^5 \equiv 1[11]$, donc $p = 5$.

2. On a $2012 = 5 \times 42 + 2$, donc :

$$\begin{aligned} 3^{n+212} - 9 \times 5^{2n} &\equiv 3^n \times 3^{5 \times 42 + 2} - 9 \times 5^{2n} \\ &\equiv 3^n \times 3^2 - 9 \times 5^{2n} \\ &\equiv 9 \times 3^n - 9 \times (5^2)^n \\ &\equiv 9 \times 3^n - 9 \times 3^n \equiv 0[11]. \end{aligned}$$

Donc $3^{n+212} - 9 \times 5^{2n}$ est divisible par 11.

PROBLÈME :

PARTI I. ÉTUDE DU CAS $n = 2$

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_A(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)A \\ &= \lambda(AM - MA) + \mu(AN - NA) \\ &= \lambda\varphi_A(M) + \mu\varphi_A(N). \end{aligned}$$

Donc φ_A est bien linéaire, de plus, $\varphi(I_2) = \varphi_A(A) = 0$, c'est à dire I_2 et A sont dans $\ker \varphi_A$.

2. Les calculs montrent que :

$$\begin{cases} \varphi_A(E_{11}) = cE_{21} - bE_{12} \\ \varphi_A(E_{12}) = -cE_{11} + (a-d)E_{12} + cE_{22} \\ \varphi_A(E_{21}) = bE_{11} + (d-a)E_{21} - bE_{22} \\ \varphi_A(E_{22}) = bE_{12} - cE_{21} \end{cases}$$

D'où la matrice de φ_A dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Le polynôme caractéristique de φ_A est donné par :

$$\chi_{\varphi_A}(X) = X^2(X^2 - (d - a)^2 - 4bc).$$

4. Si $(d - a)^2 + 4bc > 0$, on aura trois valeurs propres, 0 valeur propre double et les autres sont simples et comme $\text{Vect}(I_2, A) \subset E_0$ (E_0 le sous-espace propre associé à 0) et $A \neq \lambda I_2$, alors $\dim E_0 = 2$ est donc φ_A est diagonalisable.

Inversement, si φ_A est diagonalisable, alors nécessairement le polynôme caractéristique de φ_A admettra des racines réelles autres que 0, sinon $A = 0$, et donc $(d - a)^2 + 4bc > 0$.

5. Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - (a + d)X + ad - bc$. La matrice A étant différente de λI_2 , donc A est diagonalisable si et seulement si l'équation $X^2 - (a + d)X + ad - bc = 0$ admet deux racines réelles et distinctes, c'est à dire si et seulement si $(a + d)^2 - 4(ad - bc) = (d - a)^2 + 4bc > 0$ et ceci est équivalent à dire que φ_A est diagonalisable (la question 5.).

PARTIE II. ÉTUDE DU CAS GÉNÉRAL

6. (a) Écrivons D sous la forme $D = \sum_{l=1}^n \lambda_l E_{ll}$, donc

$$\begin{aligned} DE_{ij} - E_{ij}D &= \sum_{l=1}^n \lambda_l E_{ll} E_{ij} - \sum_{l=1}^n \lambda_l E_{ij} E_{ll} \\ &= \sum_{l=1}^n \lambda_l \delta_{li} E_{lj} - \sum_{l=1}^n \lambda_l \delta_{jl} E_{il} \\ &= \lambda_i E_{ij} - \lambda_j E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}. \end{aligned}$$

(b) On a, pour tout couple (i, j) :

$$\begin{aligned} \varphi_A(B_{ij}) &= AB_{ij} - B_{ij}A \\ &= APE_{ij}P^{-1} - PE_{ij}P^{-1}A \\ &= PDE_{ij}P^{-1} - PE_{ij}DP^{-1} \\ &= P(DE_{ij} - E_{ij}D)P^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)B_{ij}. \end{aligned}$$

(c) Les B_{ij} forment une famille de n^2 vecteurs propres de φ_A , de plus, la famille $(B_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est libre, en effet si $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{ij} B_{ij} = 0$, alors nécessairement $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{ij} E_{ij} = 0$, et comme la famille $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est libre (base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), il est de même pour la famille $(B_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, en conclusion φ_A est diagonalisable.

7. (a) i. Le polynôme caractéristique de φ_A est invariant par la passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$, donc les valeurs de φ_A , considéré comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sont les mêmes que de φ_A , considéré comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire elles sont réelles.
- ii. A et ${}^t A$ ont le même polynôme caractéristique, et comme les valeurs propres d'une matrice sont les racines de son polynôme caractéristique, alors A et ${}^t A$ ont les mêmes valeurs propres.
- iii. On a $\varphi_A(X^t Y) = AX^t Y - X^t Y A = zX^t Y - X^t ({}^t A Y) = zX^t Y - X \bar{z}^t Y = (z - \bar{z})X^t Y$, et comme $X^t Y \neq 0$, $z - \bar{z}$ est une valeur propre de φ_A .

- (b) On sait que 0 est une valeur propre de φ_A , car par exemple $\varphi_A(A) = 0$, donc il existe $z \in \mathbb{C}$, valeur propre de A , tel que $z - \bar{z} = 0$, donc z est un réel.
- (c) On a, pour tout (i, j) , $\varphi_A(P_{ij})X = \lambda_{ij}P_{ij}X$ ou encore $AP_{ij}X - P_{ij}AX = \lambda_{ij}P_{ij}X$, donc $AP_{ij}X = (\lambda + \lambda_{ij})P_{ij}X$, il suffit de prendre $\mu_{ij} = \lambda + \lambda_{ij}$.
- (d) Considérons l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{ccc} \Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MX \end{array}$$

Montrons que cette application est surjective, en effet, considérons un $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

- Si $Y = 0$, on prend $M = 0$;
- Si $Y \neq 0$, on complète X et Y pour avoir deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui commencent par X et Y , et soit v l'application linéaire qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ et M la matrice canoniquement associée à v , donc on a bien $Y = MX$.

La famille $(P_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc son image par Ψ est génératrice de $\text{Im } \Psi = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car Ψ est surjective, ainsi $(P_{i,j}X)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée par des vecteurs propres de A , de la quelle on peut extraire une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc A est diagonalisable.

PARTIE III : ÉTUDE DES VECTEURS PROPRES DE φ_A ASSOCIÉS À LA VALEUR PROPRE 0

8. Il est clair que $\varphi_A(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\text{Vect}(I, A, \dots, A^{m-1}) \subset \mathbb{R}[A]$. Soit maintenant P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, alors il existe Q et R des polynômes tels que :

$$P = Q\pi_A + R$$

avec $R = 0$ ou $\deg R < m$. Donc $P(A) = R(A) \in \text{Vect}(I, A, \dots, A^{m-1})$, d'où l'égalité.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_3$ des scalaires tels que $\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i A^i = 0$, si l'un des α_i est non nul, le polynôme

$\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i X^i$ contredit la définition du polynôme minimal de A , donc nécessairement $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{m-1} = 0$ et donc la famille $(I, A, \dots, A^{m-1})$ est base de $\mathbb{R}[A]$

9. Il est clair que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi_A(P(A)) = 0$ et donc $\mathbb{R}[A] \subset \ker(\varphi_A)$ et par conséquent $\dim \ker(\varphi_A) \geq \dim \mathbb{R}[A] = m$.
10. *Un cas d'égalité*

- (a) Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_3$ des scalaires tels que (*) $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_i = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^{n-i}(y) = 0$, si on applique u^{n-1} , l'égalité (*) devient $\alpha_0 u^{n-1}(y) = 0$ et donc $\alpha_0 = 0$, on applique une autre fois u^{n-2} à (*) on obtient $\alpha_1 = 0$ et par le même raisonnement, on appliquant à chaque fois u^{n-i} ($0 \leq i \leq n-1$), on obtient $\alpha_i = 0$ pour tout i . La famille est donc bien libre.

- (b) Posons $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}$. Puisque $(y, u(y), \dots, u^{n-1}(y))$ est une base de $\mathbb{R}^n$, il suffit donc de montrer que

$$v(u^i(y)) = w(u^i(y)),$$

pour tout $i = 0, 1, \dots, n-1$.

On a déjà $v(y) = w(y)$. Comme v et w commutent avec u ($B \in \ker(\varphi_A)$), alors ils commutent avec tous les u^i , $i \in \mathbb{N}$. Donc

$$v(u^i(y)) = u^i(v(y)) = u^i(w(y)) = w(u^i(y)),$$

et par conséquent $v = w = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-1}$.

- (c) Il est évident que $\text{Vect}\{I_n, A, \dots, A^{n-1}\} \subset \ker(\varphi_A)$. Soit $B \in \ker(\varphi_A)$ et v l'endomorphisme canoniquement associé à B , alors il existe des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ (les composantes de $v(y)$ dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ tels que $v(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^{n-i}(y)$), et donc, d'après la question

$$10.(b), v = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^{n-i}.$$

Matriciellement, $B = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^{n-i} \in \text{Vect}\{I_n, A, \dots, A^{n-1}\}$ et par conséquent :

$$\ker \varphi_A = \text{Vect}\{I_n, A, \dots, A^{n-1}\}.$$

11. Cas où u est diagonalisable

- (a) $B \in \ker \varphi_A$ si et seulement si u et v commutent. Soit $1 \leq k \leq p$ et $x \in E_u(\lambda_k)$, alors $u(x) = \lambda_k x$ et donc

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda_k x) = \lambda_k v(x),$$

donc $v(x) \in E_u(\lambda_k)$, d'où $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$.

Inversement, puisque u est diagonalisable, on a $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^p E_u(\lambda_k)$. Pour montrer que $uv = vu$, il suffit de montrer que pour tout $1 \leq k \leq p$, $\forall x \in E_u(\lambda_k)$, $uv(x) = vu(x)$. On a

$$\forall x \in E_u(\lambda_k), vu(x) = v(\lambda_k x) = \lambda_k v(x) = uv(x).$$

D'où le résultat.

- (b) Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p)$ une base adaptée à la décomposition précédente, la matrice de v est donc de la forme :

$$M(v, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} B_1 & O & \cdots & O \\ O & B_2 & \cdots & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & B_p \end{pmatrix}$$

avec $B_k = \text{Mat}(v|_{E_u(\lambda_k)}, \mathcal{B}_k)$.

Inversement, toutes les matrices de type sont dans $\ker(\varphi_A)$ (d'après l'équivalence démontrée dans la question 11.(a)).

- (c) Soit $B \in \ker(\varphi_A)$. Notons u_k (resp. v_k) l'endomorphisme de $E_u(\lambda_k)$ induit par u (resp. v). D'après ce qui précède $vu = uv$ si et seulement si pour tout $k = 1, 2, \dots, p$, $v_k u_k = u_k v_k$. Mais $u_k = \lambda_k I_{E_u(\lambda_k)}$, alors tout élément de $\mathcal{L}(E_u(\lambda_k))$ commute avec u_k , soit donc φ l'application de $\ker(\varphi_A)$ dans $\prod_{k=1}^p \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\varphi(B) = (B_1, B_2, \dots, B_p)$$

On vérifie facilement que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, donc

$$\dim \ker(\varphi_A) = \sum_{k=1}^p \dim \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^p m_k^2.$$

- (d) • Si $p = 7$, toutes les valeurs propres sont simples, donc $\sum_{k=1}^p m_k^2 = \sum_{k=1}^7 1^2 = 7$.
- Si $p = 6$, 5 valeurs propres simples et 1 valeur propre double, donc $\sum_{k=1}^6 m_k^2 = 5 \times 1^2 + 2^2 = 9$.
- Si $p = 5$, 3 valeurs propres simples et 2 valeurs propres doubles, donc $\sum_{k=1}^5 m_k^2 = 3 \times 1^2 + 2 \times 2^2 = 11$.
- Si $p = 4$, 1 valeur propre simple et 3 valeurs propres doubles, donc $\sum_{k=1}^4 m_k^2 = 1 \times 1^2 + 3 \times 2^2 = 13$.
- Si $p = 3$, 1 valeur propre simple et 2 valeurs propres triples, donc $\sum_{k=1}^3 m_k^2 = 1 \times 1^2 + 2 \times 3^2 = 19$.
- Si $p = 2$, 1 valeur propre simple et 1 valeur propre d'ordre 5, donc $\sum_{k=1}^2 m_k^2 = 1 \times 1^2 + 1 \times 5^2 = 26$.
- Si $p = 1$, 1 valeur propre 7, donc $\sum_{k=1}^1 m_k^2 = 1 \times 7^2 = 49$, dans ce cas $\ker(\varphi_A) = \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$.

PARTIE IV : ÉTUDE DES VECTEURS DE φ_A ASSOCIÉS À UNE VALEUR PROPRE NON NULLE

12. On a : $\varphi_A(I_n) = 0$ et puisque B est vecteur propre de φ_A associé à α , $\varphi_A(B) = AB - BA = \alpha B$, donc la propriété $p(k) : \varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$ est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$, supposons qu'elle est vraie à l'ordre k . On a :

$$\begin{aligned} AB^{k+1} - B^{k+1}A &= (AB^k - B^kA)B + B^k(AB - BA) \\ &= \alpha k B^k B + B^k \alpha B \\ &= \alpha(k+1)B^k. \end{aligned}$$

Ainsi, par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$.

13. Posons $P(B) = \sum_{k=0}^m \alpha_k B^k$. Par linéarité de φ_A et le résultat démontré dans la question 12, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_A(P(B)) &= \sum_{k=0}^m \alpha_k \varphi_A(B^k) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^m \alpha_k k B^k \\ &= \alpha \sum_{k=1}^m k B^{k-1} = \alpha P'(B)B. \end{aligned}$$

14. On a $\pi_B(B) = 0$ et donc $0 = \varphi_A(\pi(B)) = \alpha \pi'_N(B)B$, donc le polynôme $X\pi'_B - d\pi_B$ est un polynôme annulateur de B et de degré est strictement inférieure à $\deg \pi_B$, donc il est nul.
15. D'après la question 14., on a : $X\pi'_B = d\pi_B$ donc X divise π_B . On reprend le même raisonnement mais cette fois avec le polynôme $X\pi'_B$ au lieu de π_B , on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_A((X\pi'_B)(B)) = \alpha(X\pi'_B)'(B)B \\ &= \alpha \pi'(B)B + \alpha B \pi''_B(B)B \\ &= \alpha B^2 \pi''_B(B) \end{aligned}$$

On montre ensuite que $X^2\pi_B'' - d(d-1)\pi_B$ est le polynôme nul, donc X^2 divise π_B . Un raisonnement par récurrence descendant, montre que X^d divise π_B , et par unicité du polynôme minimal, $\pi_B = X^d$ et donc $B^d = 0$.

• • • • •