Correction Centrale 2 - MP et MPI - 2024

Jean Nougayrède et Pierre Vandaële

27 juin 2024

1 Étude de l'opérateur différence finie

1. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}\Delta(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(X + 1) - (P + \lambda Q)(X)\\ &= P(X + 1) + \lambda Q(X + 1) - P(X) - \lambda Q(X)\\ &= P(X + 1) - P(X) + \lambda(Q(X + 1) - Q(X))\\ &= \Delta(P) + \lambda\Delta(Q)\end{aligned}$$

Ayant même ensemble de départ et d'arrivée :

$$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme.}}$$

2. $\boxed{\text{Si } \deg(P) \leqslant 0,\ \deg(\Delta(P)) = -\infty.}$

Si $n = \deg(P) \geqslant 1$, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

$\deg(\Delta(P)) \leqslant n$, le coefficient en X^n de $\Delta(P)$ est nul et celui en X^{n-1} est $na_n + a_{n-1} - a_{n-1} = na_n \neq 0$ donc $\deg(\Delta(P)) = n - 1$.

$$\boxed{\text{Si } \deg(P) \geqslant 1,\ \deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1.}$$

3. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Par question 2 :

$$\forall P \in \mathbb{K}_d[X],\ \deg(\Delta(P)) \leqslant \deg(P) - 1 = d - 1 \leqslant d$$

donc $\Delta(\mathbb{K}_d[X]) \subset \mathbb{K}_d[X]$.

$$\boxed{\text{Pour tout } d \in \mathbb{N}^*,\ \Delta \text{ induit un endomorphisme sur } \mathbb{K}_d[X].}$$

4. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On a remarqué dans la question 2 que $\mathbb{K} \subset \operatorname{Ker}(\Delta_d)$.

Pour tout $P \in \mathbb{K}_d[X] \setminus \mathbb{K}$, $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1 \geqslant 0$ donc $\Delta(P) \neq 0$.

Ainsi $\operatorname{Ker}(\Delta_d) = \mathbb{K}$.

$\operatorname{Im}(\Delta_d) = \operatorname{Vect}((\Delta(X^k))_{0 \leqslant k \leqslant n}) = \operatorname{Vect}((\Delta(X^k))_{1 \leqslant k \leqslant n})$ car $\Delta(1) = 0$. Pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, $\deg(\Delta(X^k)) = k - 1$ donc la famille à degrés échelonnés $(\Delta(X^k))_{1 \leqslant k \leqslant d}$ est libre, de cardinal d dans $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ de dimension d donc $(\Delta(X^k))_{1 \leqslant k \leqslant d}$ est une base de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ et ainsi $\operatorname{Im}(\Delta_d) = \mathbb{K}_{d-1}[X]$.

$$\boxed{\text{Pour tout } d \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{Ker}(\Delta_d) = \mathbb{K} \text{ et } \operatorname{Im}(\Delta_d) = \mathbb{K}_{d-1}[X].}$$

5. $\operatorname{Ker}(\Delta) = \displaystyle\bigcup_{d \in \mathbb{N}^*} \operatorname{Ker}(\Delta_d) = \mathbb{K}$ et $\operatorname{Im}(\Delta) = \displaystyle\bigcup_{d \in \mathbb{N}^*} \operatorname{Im}(\Delta_d) = \mathbb{K}[X]$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{K} \text{ et } \operatorname{Im}(\Delta) = \mathbb{K}[X].}$$

Soit $h \in \mathbb{K}[X]$.

Par surjectivité de Δ, il existe $P_h \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\Delta(P_h) = h$.

L'ensemble des solutions de l'équation linéaire (E_h) est alors

$$\Delta^{-1}(h) = P_h + \mathrm{Ker}(\Delta) = P_h + \mathbb{K}.$$

Si h est une fonction polynomiale, l'ensemble des solutions **polynomiales** de (E_h) est une droite affine dirigée par 1. Pour obtenir toutes les solutions, on ajoutera les fonctions 1-périodiques.

6. On remarque que $C_2 = \dfrac{X(X-1)}{2}$ vérifie $\Delta(C_2) = X$. Par 5 :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions polynomiales de } (E_h)\text{, où } h : x \mapsto x\text{, est } \frac{X(X-1)}{2} + \mathbb{K}.}$$

7. Par question 2, on montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \deg(\Delta^n(P)) \leqslant \deg(P) - n.$$

Ainsi $\Delta_d^{d+1} = 0$.

$$\boxed{X^{d+1} \text{ annule } \Delta_d.}$$

$\Delta_d(X) = 1 \neq 0$ donc Δ_d nilpotent non nul ne peut être diagonalisable.

$$\boxed{\Delta_d \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

2 Fonctions entières

2.1 Généralités

8. Voir dans son cours préféré.
9. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, $|a_n\omega(t)^n\omega(t)^{-k}| \leqslant |a_n|$ or le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est infini donc $\sum |a_n|$ converge. Ainsi $\sum\limits_n a_n\omega^n\omega^{-k}$ converge normalement sur $[0,1]$ et :

$$\int_0^1 f(\omega(t))\omega^{-k}(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 \omega(t)^{n-k}dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = k$, $\displaystyle\int_0^1 \omega(t)^{n-k}dt = 1$; si $n \neq k$, $\displaystyle\int_0^1 \omega(t)^{n-k}dt = \left[\frac{e^{2i\pi(n-k)t}}{2i\pi(n-k)}\right]_0^1 = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{Z},\ \int_0^1 f(\omega(t))\omega^{-k}(t)dt = \begin{cases} a_k \text{ si } k \in \mathbb{N} \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}}$$

2.2 Une intégrale

10. Soit $z \in \mathbb{C}$. $e^z = 1$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2i\pi k$.

Or $2i\pi\mathbb{Z} \cap \mathbb{U} = \varnothing$ donc $t \mapsto e^{\omega(t)} - 1$ ne s'annule pas sur $[0,1]$.

Ainsi pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto \dfrac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{Z},\ I_p \text{ est bien définie.}}$$

11. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{\frac{|z|^{n-1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^{n-2}}{n!}} = \dfrac{|z|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc de la règle de d'Alembert,

$$\beta : z \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^{n-2}}{n!} \in \mathcal{E}.$$

Du développement en série entière de l'exponentielle, on a bien :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z - 1 = z(1 + z\beta(z)).$$

Enfin pour tout $\zeta \in \mathbb{U}$: $|\beta(\zeta)| \leqslant \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}$.

$$\forall \zeta \in \mathbb{U},\ |\beta(\zeta)| \leqslant e - 2 \in]0,1[.$$

$$\boxed{\text{Il existe } \beta \in \mathcal{E} \text{ et } C \in]0,1[\text{ tels que : } \forall \zeta \in \mathbb{U}, \begin{cases} e^\zeta - 1 = \zeta(1 + \zeta\beta(\zeta)), \\ |\beta(\zeta)| \leqslant C \end{cases}}$$

12. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\displaystyle\frac{1}{1+z} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j z^j$.

    Soit $\zeta \in \mathbb{U}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Par question 10, $|\zeta\beta(\zeta)| < 1$ donc :

$$\frac{\zeta^p}{e^\zeta - 1} = \zeta^{p-1} \frac{1}{1 + \zeta\beta(\zeta)} = \zeta^{p-1} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j (\zeta\beta(\zeta))^j.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } \zeta \in \mathbb{U} \text{ et tout } p \in \mathbb{Z},\ \frac{\zeta^p}{e^\zeta - 1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \zeta^{j+p-1} \beta(\zeta)^j.}$$

13. Soit $p \in \mathbb{Z}$. ω est à valeurs dans $\mathbb{U}$ donc par question 11 :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |(-1)^n \omega(t)^{n+p} \beta(\omega(t))^n| \leqslant C^n.$$

    Or $C \in]0,1[$ donc la série $\displaystyle\sum_n C^n$ converge et ainsi $\displaystyle\sum_n (-1)^n \omega^{n+p} \beta(\omega)^n$ converge normalement sur $[0,1]$ vers $\displaystyle\frac{\omega^{p+1}}{e^\omega - 1}$ de sorte que :

$$I_p = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 \beta(\omega(t))^n \omega(t)^{n+p} dt$$

    Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta^n \in \mathcal{E}$: on applique donc la question 9. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$: si $n \geqslant 1$ ou $p \geqslant 1$ alors $-(n+p) \notin \mathbb{N}$ donc $\displaystyle\int_0^1 \beta(\omega(t))^n \omega(t)^{n+p} = 0$;

    si $n = p = 0$, $\displaystyle\int_0^1 \beta(\omega(t))^n \omega(t)^{n+p} = 1$. On conclut.

$$\boxed{I_0 = 1 \text{ et pour tout } p \in \mathbb{N}^*,\ I_p = 0.}$$

3 Polynômes de Bernoulli

3.1 Lien avec l'équation (E_h)

14. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$.

    Comme mentionné dans la question 10, $t \mapsto \displaystyle\frac{\omega(t)^{1-n}}{e^{\omega(t)} - 1}$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc y est bornée. Il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall t \in [0,1],\ \left| \frac{1}{(e^{\omega(t)} - 1)\omega(t)^{n-1}} \right| \leqslant M.$$

Ainsi : $\forall t \in [0,1], \forall k \in \mathbb{N}, \ \left| \dfrac{z^k \omega(t)^k}{k!(e^{\omega(t)}-1)\omega(t)^{n-1}} \right| \leqslant \dfrac{|z|^k}{k!}$.

Or la série $\displaystyle\sum_k \frac{|z|^k}{k!}$ converge donc $\displaystyle\sum_k \frac{z^k \omega^k}{k!(e^{\omega}-1)\omega^{n-1}}$ converge normalement sur $[0,1]$ vers $\dfrac{e^{z\omega}}{(e^{\omega}-1)\omega^{n-1}}$ et par conséquent :

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} I_{k-n}.$$

Or pour tout entier $k > n$, $k - n \in \mathbb{N}^*$ donc $I_{k-n} = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } z \in \mathbb{C},\ B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} I_{n-k}.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. De l'expression trouvée, $B_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et le coefficient en X^n de B_n est $n! \dfrac{1}{n!} I_0 = 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ B_n \text{ est unitaire de degré } n.}$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$B_n' = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{kX^{k-1}}{k!} I_{n-k} = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} I_{n-k} = n(n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X^i}{i!} I_{n-1-i} \text{ en posant } i = k-1.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ B_n' = nB_{n-1}.}$$

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.

$f : s \mapsto e^{zs} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} s^k \in \mathcal{E}$ et $n-1 \in \mathbb{N}$ donc par question 9 :

$$B_n(z+1) - B_n(z) = n! \int_0^1 \frac{e^{(z+1)\omega(t)} - e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)}-1)\omega(t)^{n-1}} dt = n! \int_0^1 f(\omega(t))\omega(t)^{-(n-1)} dt = n! \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = nz^{n-1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } z \in \mathbb{C},\ B_n(z+1) - B_n(z) = nz^{n-1}.}$$

17. Par question 16, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{B_{k+1}}{k+1}$ est un antécédent de X^k par Δ donc par linéarité de Δ :

$$\boxed{\text{Pour tout } h = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X],\ \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} B_{k+1} \text{ est une solution polynomiale de } (E_h).}$$

3.2 Unicité

18. Existence : il est clair que $B_0 = 1$ (unitaire de degré 0) et on a déjà montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n' = nB_{n-1}$. Enfin pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 B_n(t)dt = \frac{1}{n+1} \int_0^1 B_{n+1}'(t)dt = \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n+1} = 0^n = 0.$$

Unicité : il suffit de montrer que l'application linéaire $f : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}$ qui à $Q \in \mathbb{C}[X]$ associe $\left(Q', \displaystyle\int_0^1 Q(t)dt\right)$ est injective pour conclure.

Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ telle que $Q' = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 Q(t)dt = 0$.

Il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $Q = z$ et $0 = \displaystyle\int_0^1 Q(t)dt = z$ donc $Q = 0$.

$\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ d'où l'injectivité de f.

$$\boxed{(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est l'unique suite de } \mathbb{C}[X] \text{ telle que } B_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} B_n' = nB_{n-1} \\ \displaystyle\int_0^1 B_n(t)dt = 0. \end{cases}}$$

19. $H_0 = (-1)^0 B_0(1-X) = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$H_n' = (-1)^n(-B_n'(1-X)) = (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1-X) = nH_{n-1}.$$

$\displaystyle\int_0^1 H_n(t)dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(u)du = 0$ en posant $u = 1-t$.

Par question 18 :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ H_n = B_n.}$$

3.3 Une application analytique

20. Tout d'abord, la fonction ψ ne s'annule jamais et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{\psi(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}.$$

Comme $\dfrac{1}{\psi}$ est développable en série entière, de rayon de convergence infini, sa somme est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (l'intervalle ouvert de convergence). Par passage à l'inverse, la fonction ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $(x,t) \mapsto x$ est de classe C^∞ car polynomiale, donc par composition :

$$(x,t) \mapsto \psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

La fonction $(x,t) \mapsto tx$ est également de classe C^∞ car polynomiale donc, par composition :

$$(x,t) \mapsto e^{tx} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

On conclut par produit :

$$\boxed{u : (x,t) \mapsto \psi(x)e^{tx} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).}$$

21. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \psi(x)xe^{tx} = xu(x,y).}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Du théorème de Schwarz, $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = \dfrac{\partial^n}{\partial x^n}\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$.

De la formule de Leibniz, les fonctions $p : (x,t) \mapsto x$ et u étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^n(pu)}{\partial x^n}(x,t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^k p}{\partial x^k}(x,t)\frac{\partial^{n-k} u}{\partial x^{n-k}}(x,t) = \binom{n}{0} p(x,t)\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + \binom{n}{1}\frac{\partial p}{\partial x}(x,t)\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t)$$

$$\boxed{\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = x\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + n\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t).}$$

22. On a $A_0 : t \mapsto u(0,t) = \psi(0) = 1$.

Par question 21, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n' = nA_{n-1}$.

Pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 u(x,t)dt = \psi(x)(e^x - 1) = x$ (l'égalité est bien valable pour x nul).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto u(x,t)$ est de classe C^n sur $[0,1]$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc intégrable.

Enfin pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$ est continue sur le compact $[0,1]^2$ donc il existe $M_k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in [0,1]$: $\forall t \in [0,1]$, $\left|\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant M_k$ et $t \mapsto M_k$ est intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi $I : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 u(x,t)dt = x$ est de classe C^n sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 = I^{(n)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)dt$$

En particulier en évaluant en 0 : $0 = \displaystyle\int_0^1 A_n(t)dt$.

$A_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n' = nA_{n-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 A_n(t)dt = 0$ donc par question 18 (de la relation de récurrence, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est polynomiale) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = B_n.}$$

4 Solution entière de l'équation (E_h)

4.1 Une inégalité de contrôle

23. On suppose par l'absurde que :

$$\forall c > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{C},\ |z| = (2n+1)\pi \text{ et } |e^z - 1| < c.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. $2^{-p} > 0$ donc il existe $n_p \in \mathbb{N}$ et $z_p \in \mathbb{C}$ tels que

$$|z_p| = (2n_p+1)\pi \text{ et } |e^{z_p} - 1| \leqslant 2^{-p}.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|e^{z_p} - 1| \leqslant 2^{-p}$ et $2^{-p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc par encadrement :

$$e^{z_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1.$$

$$\boxed{\text{Il existe } (n_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ et } (z_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ telles que } \begin{cases} \forall p \in \mathbb{N},\ |z_p| = (2n_p+1)\pi, \\ e^{z_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1. \end{cases}}$$

24. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|e^{a_p} - 1| = ||e^{z_p}| - |1|| \leqslant |e^{z_p} - 1|$ or $|e^{z_p} - 1| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc par encadrement : $e^{a_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$. Par continuité du logarithme en 1 :

$$\boxed{a_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $||z_p| - |b_p|| = ||z_p| - |ib_p|| \leqslant |z_p - ib_p| = |a_p|$ or $a_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc par encadrement :

$$\boxed{|z_p| - |b_p| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.}$$

25. D'une part $e^{z_p - i\varepsilon_p|z_p|} = e^{z_p}e^{-i\varepsilon_p(2n_p+1)\pi} = -e^{z_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} -1$ par 23.

D'autre part $e^{z_p - i\varepsilon_p|z_p|} = e^{a_p + i\varepsilon_p(|b_p|-|z_p|)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} e^0 = 1$ par question 24 et continuité de l'exponentielle en 0.

Par unicité de la limite $1 = -1$. Absurde !

$$\boxed{\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C},\ |z| = (2n+1)\pi \Rightarrow |e^z - 1| \geqslant c.}$$

4.2 Une solution à (E_h)

26. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

Par question 25, tout $t \in [0,1]$, $|e^{\gamma_n(t)} - 1| \geqslant c > 0$ et γ_n ne s'annule pas donc $t \mapsto \dfrac{e^{z\gamma_n(t)}}{(e^{\gamma_n(t)}-1)\gamma_n(t)^{n-1}}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient bien défini de fonctions qui le sont. Ainsi $Q_n(z)$ est bien défini.

Pour tout $t \in [0,1]$, et tout $k \in \mathbb{N}$ $\left|\dfrac{z^k\gamma_n(t)^k}{k!(e^{\gamma_n(t)}-1)\gamma_n(t)^{n-1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{c_n}\dfrac{|(2n+1)\pi z|^k}{k!}$ où $c_n = c((2n+1)\pi)^{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|(2n+1)\pi z|^k}{k!} = e^{|(2n+1)\pi z|} < +\infty$ donc $\displaystyle\sum_k \frac{z^k\gamma_n^k}{k!(e^{\gamma_n}-1)\gamma_n^{n-1}}$ converge normalement vers $\dfrac{e^{z\gamma_n}}{(e^{\gamma_n}-1)\gamma_n^{n-1}}$ sur $[0,1]$ et ainsi $Q_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q_{n,k}z^k$ en posant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $q_{n,k} = n!\displaystyle\int_0^1 \frac{\gamma_n(t)^k}{(e^{\gamma_n(t)}-1)\gamma_n(t)^{n-1}}dt$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} q_{n,k}z^k$ converge vers $Q_n(z)$ donc $Q_n \in \mathcal{E}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ Q_n \in \mathcal{E}.}$$

27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.

$f_n : s \mapsto e^{z(2n+1)\pi s} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z(2n+1)\pi)^k}{k!}s^k \in \mathcal{E}$ et $n-1 \in \mathbb{N}$ donc par 9 :

$$\begin{aligned} Q_n(z+1) - Q_n(z) &= \frac{n!}{((2n+1)\pi)^{n-1}}\int_0^1 f_n(\omega(t))\omega(t)^{-(n-1)}dt \\ &= \frac{n!}{((2n+1)\pi)^{n-1}}\frac{(z(2n+1)\pi)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= nz^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } z \in \mathbb{C},\ Q_n(z+1) - Q_n(z) = nz^{n-1}.}$$

28. On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| \leqslant e^{|z|}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Intégrant dans le sens des bornes croissantes :

$$|Q_n(z)| \leqslant n!\int_0^1 \frac{e^{|z(2n+1)\pi|}}{c((2n+1)\pi)^{n-1}}dt \leqslant u_n e^{bn|z|}$$

où $b = 3\pi > 0$ et $u_n = \dfrac{n!}{c((2n+1)\pi)^{n-1}} = \dfrac{1}{c}\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k}{(2n+1)\pi} \leqslant \frac{1}{c}$.

Ainsi $a = \dfrac{1}{c} > 0$ convient.

$$\boxed{\text{Il existe } (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \text{ tel que : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, |Q_n(z)| \leqslant ae^{bn|z|}.}$$

29. Soit $h \in \mathcal{E}$ de développement en série entière $\sum h_n z^n$ et H l'élément de $\mathcal{E}$ de développement $\sum |h_n| z^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\displaystyle\sum_k q_{n,k} z^k$ le développement en série entière de Q_n.

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $r = |z| + 1$.

Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. $Q_n(r\cdot) \in \mathcal{E}$ donc par 9, $q_{n,k} r^k = \displaystyle\int_0^1 Q_n(r\omega(t))\omega(t)^{-k} dt$ puis par 28, $|q_{n,k} r^k| \leqslant a e^{bnr}$.

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ |q_{n,k}| \leqslant a \frac{e^{bnr}}{r^k}.$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n,k \geqslant 0} \left| \frac{q_{n+1,k}}{n+1} h_n z^k \right| \leqslant a e^{br} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |h_n| (e^{br})^n \left(\frac{|z|}{r}\right)^k = a e^{br} \frac{H(e^{br})}{1 - \frac{|z|}{r}} < +\infty$ car $\dfrac{|z|}{r} \in]0,1[$.

La famille $\left(\dfrac{q_{n+1,k}}{n+1} h_n z^k\right)$ est sommable donc en posant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q_{n+1,k}}{n+1} h_n \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h_n}{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} q_{n+1,k} z^k = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n \frac{Q_{n+1}(z)}{n+1}.$$

Ainsi l'application $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h_n \frac{Q_{n+1}}{n+1}$ est bien définie, appartient à $\mathcal{E}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, par 27 :

$$f(z+1) - f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n \frac{Q_{n+1}(z+1) - Q_{n+1}(z)}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n z^n = h(z).$$

$$\boxed{\text{Pour tout } h \in \mathcal{E},\ (E_h) \text{ admet une solution dans } \mathcal{E}.}$$