

Preliminaires

1°) Soit E un espace vectoriel sur K et $x_1, \dots, x_n$, n éléments de E . Ils forment une famille libre de E si l'équation dans K^n : $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ n'admet que la solution $(0, 0, \dots, 0)$, autrement dit : $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

2°) • Dans $\mathcal{F}(\mathbf{R})$ soit la famille $\begin{cases} f_0 : x \mapsto 1 \\ f_1 : x \mapsto x \\ f_2 : x \mapsto x^2 \\ f_3 : x \mapsto x^3 \end{cases}$, cette famille est libre.

En effet, soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^4$ tel que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ fonction nulle sur $\mathbf{R}$. Alors, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 = 0$ et le polynome $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3$ aurait donc une infinité de racines. C'est le polynome nul et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ cqfd.

• Dans $\mathcal{F}(\mathbf{R})$ soit la famille $\begin{cases} f_0 : x \mapsto 1 \\ f_1 : x \mapsto \cos x \\ f_2 : x \mapsto \cos 2x \\ f_3 : x \mapsto \cos^2 x \end{cases}$, cette famille est liée.

En effet on a $f_2 - 2f_3 + f_0 = 0$.

• Dans $\mathcal{F}(\mathbf{R})$ soit la famille $\begin{cases} f_0 : x \mapsto 1 \\ f_1 : x \mapsto x^3 + 1 \\ f_2 : x \mapsto |x^3| \end{cases}$, cette famille est libre.

En effet, soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^3$ tel que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$ fonction nulle sur $\mathbf{R}$. Alors, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\lambda_0 + \lambda_1 (x^3 + 1) + \lambda_2 |x^3| = 0$ et donc on en déduit que:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 = 0 & (x = 0) \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (x = 1) \text{ d'où } \lambda_1 = 0 \text{ puis } \lambda_0 = 0 \text{ et enfin } \lambda_2 = 0. \text{ cqfd.} \\ \lambda_0 + \lambda_2 = 0 & (x = -1) \end{cases}$$

3°) Les dimensions des sous espaces engendrés par ces familles sont:

cas 1 : $\dim = 4$; cas 2 : $\dim = 3$; cas 3 : $\dim = 3$

Partie I

- 1°) Pour montrer que $\mathcal{G}$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, on prouve que $\mathcal{C}'$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}([-1,1])$. Or en effet, soient f_1 et f_2 deux éléments de $\mathcal{G}$ et λ_1 et λ_2 deux réels, alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est de classe C^2 sur $[-1,1]$ comme somme de deux fonctions ayant cette propriété, et si on note p_1, q_1 et p_2, q_2 les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à trois, restrictions de f_1 , (resp f_2) à $[-1,0[$, (resp $]0,1]$), alors les restrictions de $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ à $[-1,0[$, (resp $]0,1]$, sont $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$, (resp $\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2$) qui sont des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à trois et par suite $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est élément de $\mathcal{G}$. cqfd.
-

- 2°) Soit f définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \begin{cases} \alpha_1 x^3 + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x + \delta_1 & \text{si } x < 0 \\ \alpha_2 x^3 + \beta_2 x^2 + \gamma_2 x + \delta_2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ f est élément de $\mathcal{G}$ à condition que f soit continue en 0, dérivable en 0 et admette une dérivée seconde en 0. D'où $\delta_1 = \delta_2$ (continuité), $\gamma_1 = \gamma_2$ (dérivabilité), $\beta_1 = \beta_2$ (dérivée seconde). Une fonction f de $\mathcal{G}$ dépend donc de 5 paramètres, $\mathcal{G}$ est donc de dimension 5. On le verra plus précisément à la question suivante.
-

- 3°) Les fonctions f_0, f_1, f_2, f_3 sont celles définies dans le cas 1 des préliminaires (en restreignant leur domaine de définition à $[-1,1]$).

La fonction f_4 est définie par $f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Il est clair que f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 appartiennent à $\mathcal{G}$.

- Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbf{R}^5$ tel que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$ fonction nulle sur $[-1,1]$, alors :

$\forall x \in [-1,0[$, $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 = 0$ et le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3$ aurait donc une infinité de racines. C'est le polynôme nul et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Par suite pour $x = 1$ il reste $\lambda_4 = 0$ et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, cqfd.

- Montrons que cette famille est génératrice.

Soit f un élément de $\mathcal{G}$, alors $f(x) = \begin{cases} \alpha_1 x^3 + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x + \delta & \text{si } x < 0 \\ \alpha_2 x^3 + \beta_2 x^2 + \gamma_2 x + \delta & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ et on peut écrire :

$f = \delta f_0 + \gamma_1 f_1 + \beta_1 f_2 + \alpha_1 f_3 + (\alpha_2 - \alpha_1) f_4$ ce qui exprime que f s'exprime comme combinaison linéaire des f_i , cqfd.

La dimension de $\mathcal{G}$ est donc bien égale à 5.

Partie II

1°) Par un raisonnement analogue à celui de I1, S_{σ_n} est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ car c' est un sous espace de $\mathcal{S}([x_0, x_n])$.

2°) La dimension de S_{σ_1} est 4 car S_{σ_1} est en fait l' ensemble des fonctions polynomes définies sur $[x_0, x_1]$ de degré ≤ 3 .

3°) a) On suppose que S_{σ_n} est de dimension d et que $(f_1, \dots, f_n)$ en constitue une base.

Soit $f \in S_{\sigma_{n+1}}$. La restriction de f à $[x_0, x_n]$ est un élément de S_{σ_n} et donc il existe un unique d -uplet de réels $(a_1, \dots, a_d)$ tel que $f|_{[x_0, x_n]} = a_1 f_1 + \dots + a_d f_d$, c' est à dire tel que

$$\forall x \in [x_0, x_n], \quad f(x) = \sum_{i=1}^d a_i f_i(x).$$

b) Soit p_i la fonction polynome (définie sur $\mathbf{R}$ à priori) de degré inférieur ou égal à 3 telle que

$\forall x \in]x_{n-1}, x_n[, \quad f_i(x) = p_i(x)$ (ceci pour éviter les confusions entre polynome, fonction polynome associée et restriction d' une telle fonction à divers intervalles).

Il est dommage que le texte parle de $f_i|_{]x_{n-1}, x_n[} = p_i$ ce qui définit p_i comme fonction polynome

avec pour domaine de définition $]x_{n-1}, x_n[$ et qu' ensuite on parle de $p_i(x)$ pour $x \in [x_n, x_{n+1}]$. Bon ceci n' est pas dramatique!

$$\text{Soit enfin les fonctions } \tilde{f}_i \text{ définies par : } \forall i \leq d, \quad \tilde{f}_i(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{si } x \in [x_0, x_n] \\ p_i(x) & \text{si } x \in [x_n, x_{n+1}] \end{cases}$$

$$\tilde{f}_{d+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [x_0, x_n] \\ (x - x_n)^3 & \text{si } x \in [x_n, x_{n+1}] \end{cases}$$

$$\text{et } F = f - \sum_{i=1}^d a_i \tilde{f}_i.$$

Mais alors $\forall x \in [x_n, x_{n+1}]$, $F(x) = \alpha_n x^3 + \beta_n x^2 + \gamma_n x + \delta_n - \sum_{i=1}^d a_i p_i(x)$ et la restriction de F à $[x_n, x_{n+1}]$ est donc bien une fonction polynome de degré ≤ 3 . De plus:

• La continuité de f en x_n se traduit par $\lim_{x \rightarrow x_n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_n^-} f(x)$ soit :

$$\alpha_n x_n^3 + \beta_n x_n^2 + \gamma_n x_n + \delta_n = \sum_{i=1}^d a_i f_i(x_n) = \sum_{i=1}^d a_i p_i(x_n) \quad \text{et donc } F(x_n) = 0.$$

• La dérivabilité de f en x_n se traduit par $\lim_{x \rightarrow x_n^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_n^-} f'(x)$ soit :

$$3\alpha_n x_n^2 + 2\beta_n x_n + \gamma_n = \sum_{i=1}^d a_i f_i'(x_n) = \sum_{i=1}^d a_i p_i'(x_n) \quad \text{et donc } F'(x_n) = 0.$$

• L' existence de la dérivée seconde de f en x_n se traduit par $\lim_{x \rightarrow x_n^+} f''(x) = \lim_{x \rightarrow x_n^-} f''(x)$ soit :

$$6\alpha_n x_n + 2\beta_n = \sum_{i=1}^d a_i f_i''(x_n) = \sum_{i=1}^d a_i p_i''(x_n) \quad \text{et donc } F''(x_n) = 0.$$

c) Montrons que $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{d+1})$ est une base de $S_{\sigma_{n+1}}$.

- Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}) \in \mathbf{R}^{d+1}$ tel que $\lambda_1 \tilde{f}_1 + \dots + \lambda_{d+1} \tilde{f}_{d+1} = 0$ fonction nulle sur $[x_0, x_{n+1}]$, alors c' est en particulier la fonction nulle sur $[x_0, x_n]$ et donc $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_d f_d = 0$ sur $[x_0, x_n]$ ce qui implique que $\lambda_1 = \dots = \lambda_d = 0$ et par suite $\lambda_{d+1} = 0$. cqfd.

- Montrons que cette famille est génératrice.

Soit $f \in S_{\sigma_{n+1}}$, notons $f|_{[x_0, x_n]} = \sum_{i=1}^d a_i f_i$, on peut alors écrire :

$$f = \left(f - \sum_{i=1}^d a_i \tilde{f}_i \right) + \sum_{i=1}^d a_i \tilde{f}_i \text{ et on a } \left(f - \sum_{i=1}^d a_i \tilde{f}_i \right) \text{ est la fonction nulle sur } [x_0, x_n].$$

C' est une fonction polynome de degré ≤ 3 sur $[x_n, x_{n+1}]$ qui s' annule, ainsi que ses deux premières dérivées au point x_n , elle vaut donc sur ce dernier intervalle $a_d (x - x_n)^3$ et

finalement on peut écrire $f = \sum_{i=1}^{d+1} a_i \tilde{f}_i$ cqfd.

d) On a donc la relation $\dim(S_{\sigma_{n+1}}) = \dim(S_{\sigma_n}) + 1$, et comme $\dim(S_{\sigma_1}) = 4$ on a :

$$\dim(S_{\sigma_n}) = n + 3$$

4°) a) Un polynome p s' écrit de manière unique, au moyen de la formule de Taylor sous la forme :

$$p(X) = p(a) + p'(a)(X - a) + \frac{p''(a)}{2}(X - a)^2 + \frac{p'''(a)}{6}(X - a)^3 \text{ et par conséquent le}$$

polynome cherché s' écrit $p(X) = \alpha + \beta(X - a) + \frac{\gamma}{2}(X - a)^2 + K(X - a)^3$ et la relation

$$p(b) = \delta \text{ fournit } K = \frac{\delta - \alpha - \beta(b - a) - \frac{\gamma}{2}(b - a)^2}{(b - a)^3} \text{ ce qui assure l' existence et l' unicité du}$$

polynome cherché.

b) Soit $(y_0, \dots, y_n, \alpha, \beta)$ un $n + 3$ -uplet de réels fixé.

Cas $n = 1$. S_{σ_1} est constitué de fonctions polynomes de degré ≤ 3 et le problème consiste donc à trouver p tel que

$$p(x_0) = y_0 ; \quad p'(x_0) = \alpha ; \quad p''(x_0) = \beta ; \quad p(x_1) = y_1$$

C' est exactement le problème résolu au a) précédent.

Hypothèse de récurrence: On suppose qu' étant donné $(y_0, \dots, y_n, \alpha, \beta)$ un $n + 3$ -uplet de réels fixé, il existe une unique fonction $f \in S_{\sigma_n}$ telle que :

$\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad f(x_i) = y_i ; \quad f'(x_0) = \alpha ; \quad f''(x_0) = \beta .$

Soit alors $(y_0, \dots, y_{n+1}, \alpha, \beta)$ un $n+4$ -uplet de réels fixé.

Soit alors $f \in S_{\sigma_n}$ associé de manière unique à $(y_0, \dots, y_n, \alpha, \beta)$, alors $f = \sum_{i=1}^d a_i f_i$.

Cherchons a_{d+1} tel que $\tilde{f} = \sum_{i=1}^{d+1} a_i \tilde{f}_i$ réponde à la question.

$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad \tilde{f}(x_i) = y_i ; \quad \tilde{f}'(x_0) = \alpha ; \quad \tilde{f}''(x_0) = \beta$ sont vérifiées, car on a :

$\tilde{f}(x_i) = f(x_i) = y_i ; \quad \tilde{f}'(x_0) = f'(x_0) = \alpha ; \quad \tilde{f}''(x_0) = f''(x_0) = \beta .$

Il reste à utiliser la relation $\tilde{f}(x_{n+1}) = y_{n+1}$ qui se traduit par

$$y_{n+1} = \sum_{i=1}^d a_i p_i(x_{n+1}) + a_{d+1} (x_{n+1} - x_n)^3 \text{ et qui fournit } a_{d+1} = \frac{y_{n+1} - \sum_{i=1}^d a_i p_i(x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_n)^3} . \text{ D' où}$$

l' existence de $\tilde{f}$ répondant à la question.

Prouvons maintenant l' unicité de cette solution. Soit f une solution, alors sa restriction à $[x_0, x_n]$

répond au problème associé à $(y_0, \dots, y_n, \alpha, \beta)$. $f|_{[x_0, x_n]} = \sum_{i=1}^d a_i f_i$ est donc unique, et le calcul

précédent donnant l' unicité de a_{d+1} assure l' unicité de f .

c) $S_{\sigma_n}^0$ est un sous espace vectoriel de S_{σ_n} de manière évidente. Dès lors l' application $\hat{\Phi}$ définie

par : $\hat{\Phi} : \mathbf{R}^2 \rightarrow S_{\sigma_n}^0$ où f est l' unique solution du problème précédent pour $(0, \dots, 0, \alpha, \beta)$
 $(\alpha, \beta) \mapsto f$

est un isomorphisme d' espaces vectoriels, ce qui fait que $\dim(S_{\sigma_n}^0) = 2$.

En effet : • $\hat{\Phi}$ est linéaire:

Soit (α_1, β_1) et (α_2, β_2) deux éléments de $\mathbf{R}^2$ d' image par $\hat{\Phi}$, f_1 et f_2 .

$f = \hat{\Phi}(\lambda_1(\alpha_1, \beta_1) + \lambda_2(\alpha_2, \beta_2))$ est l' unique élément de $S_{\sigma_n}^0$ vérifiant :

$f'(x_0) = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2$ et $f''(x_0) = \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2$.

Or $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est élément de $S_{\sigma_n}^0$ et vérifie :

$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(x_0) = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2$ et $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)''(x_0) = \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2$ ce qui assure que

$\hat{\Phi}(\lambda_1(\alpha_1, \beta_1) + \lambda_2(\alpha_2, \beta_2)) = \lambda_1 \hat{\Phi}((\alpha_1, \beta_1)) + \lambda_2 \hat{\Phi}((\alpha_2, \beta_2))$ cqfd.

• $\hat{\Phi}$ est bijective:

Elle est surjective. Soit $f \in S_{\sigma_n}^0$, alors $f = \hat{\Phi}((f'(x_0), f''(x_0)))$.

Elle est injective. Soit $(\alpha_1, \beta_1) \neq (\alpha_2, \beta_2)$, par exemple $\alpha_1 \neq \alpha_2$ alors $f_1 = \hat{\Phi}((\alpha_1, \beta_1))$

est différent de $f_2 = \hat{\Phi}((\alpha_2, \beta_2))$ car $f_1'(x_0) \neq f_2'(x_0)$. Même raisonnement si $\beta_1 \neq \beta_2$ alors $f_1''(x_0) \neq f_2''(x_0)$ qui permet de conclure.

Conclusion : $\dim(S_{\sigma_n}^0) = 2$

5°) a) Soit $f \in S_{\sigma_n}^0$. $f^{(4)}(x) = 0$ pour $x \in]x_i, x_{i+1}[$ car sur un tel intervalle, f coïncide avec une fonction polynôme de degré ≤ 3 .

b) Calculons la dérivée de $f' f''$ sur $]x_i, x_{i+1}[$.

$(f' f'')' = f''^2 + f' f'''$ et on peut donc écrire que :

$$\int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2 dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((f' f'')'(x) - (f' f''')(x)) dx \text{ soit :}$$

$$\int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2 dx = \sum_{i=0}^{n-1} [f'(x) f''(x)]_{x_i}^{x_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x) f'''(x) dx. \text{ Or on a, en intégrant par}$$

parties l' une des intégrales de la dernière somme :

$$\begin{cases} u = f''' & u' = 0 \\ v = f' & v = f \end{cases} \text{ d' où } \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x) f'''(x) dx = [f(x) f'''(x)]_{x_i}^{x_{i+1}} - 0 = 0 - 0 - 0 - 0 = 0 \text{ d' où}$$

$$\int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2 dx = \sum_{i=0}^{n-1} [f'(x_{i+1}) f''(x_{i+1}) - f'(x_i) f''(x_i)] = f'(x_n) f''(x_n) - f'(x_0) f''(x_0).$$

c) Soit Φ définie par

$$\begin{array}{ccc} \Phi: S_{\sigma_n}^0 & \rightarrow & \mathbf{R}^2 \\ \varphi & \mapsto & (\varphi'(x_0), \varphi'(x_n)) \end{array}$$

• Φ est injective:

En effet, supposons $\begin{cases} \varphi'(x_0) = 0 \\ \varphi'(x_n) = 0 \end{cases}$, alors $\int_{x_0}^{x_n} (\varphi''(x))^2 dx = 0$ et comme φ'' est continue sur

$[x_0, x_n]$, on en déduit que φ'' est identiquement nulle sur $[x_0, x_n]$.

On aurait donc $\forall x \in [x_0, x_n]$, $\varphi(x) = ax + b$ et alors $\varphi'(x_0) = a = 0$ puis $\varphi(x_0) = b = 0$ et finalement φ est la fonction nulle sur $[x_0, x_n]$.

• Φ est bijective:

En effet, Φ est évidemment linéaire entre $S_{\sigma_n}^0$ et $\mathbf{R}^2$, deux espaces vectoriels de même dimension 2, et donc injective $\Leftrightarrow$ bijective.

d) Montrons qu' il existe une unique fonction $f \in S_{\sigma_n}$ telle que :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} f(x_i) = y_i ; \quad f'(x_0) = \alpha ; \quad f'(x_n) = \beta .$$

On pourrait faire un raisonnement voisin de celui de la question 5c) en envisageant l' application Ψ allant de S_{σ_n} dans $\mathbf{R}^{n+3}$, qui à f associe $(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_0), f'(x_n))$.

Montrer que cette application est linéaire, injective, donc bijective vu les dimensions ce qui fournit le résultat cherché.

Je propose une solution plus rudimentaire.

On montre l' unicité

Supposons que l' on ait deux solutions f_1 et f_2 . Alors $f_1 - f_2 \in S_{\sigma_n}^0$ et vérifie

$$\Phi(f_1 - f_2) = (0, 0) \text{ donc } f_1 - f_2 = 0, \text{ c' est à dire } f_1 = f_2 .$$

On montre l' existence d' une solution

Soit f l' unique fonction de S_{σ_n} vérifiant :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad f(x_i) = y_i ; \quad f'(x_0) = 0 ; \quad f''(x_0) = 0 . \quad (\text{Cf 4b}).$$

Soit φ l' unique fonction de $S_{\sigma_n}^0$ vérifiant : $\varphi'(x_0) = \alpha$; $\varphi'(x_n) = \beta - f'(x_n)$, alors

$$g = f + \varphi \in S_{\sigma_n} \text{ et vérifie : } \forall i \in \{0, \dots, n\} \quad g(x_i) = y_i ; \quad g'(x_0) = \alpha ; \quad g'(x_n) = \beta \quad \text{cqfd.}$$

Partie III

1°) a) Soit f de classe C^2 sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

La fonction g , 2-périodique, impaire telle que $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = f(x)$ est de classe C^1 sur

$\mathbf{R}$. Elle vérifie donc les hypothèses du théorème de Dirichlet-Jordan. Sa série de Fourier

converge en tout point x de $\mathbf{R}$ et a pour somme $g(x)$, vu la continuité.

$$\text{Ainsi } \forall x \in \mathbf{R}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(n\pi x) \quad (\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi) \text{ avec}$$

$$c_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx .$$

$$\text{Deux intégrations par parties pour calculer } c_n \text{ fournissent : } c_n = -\frac{2}{n^2 \pi^2} \int_0^1 f''(x) \sin(n\pi x) dx .$$

b) Tout ce que l' on peut dire, c' est continue par morceaux, impaire comme g , sur $\mathbf{R}$. Il se pose d' ailleurs la question de la définition de g'' en les points de $\mathbf{Z}$.

On peut cependant envisager la série de Fourier de g'' , mais on ne peut pas garantir que g'' est égale à la somme de sa série de Fourier.

$$\text{Les coefficients de Fourier de } g'' \text{ sont : } a_n = 0 ; \quad b_n = 2 \int_0^1 f''(x) \sin(n\pi x) dx = -n^2 \pi^2 c_n$$

$$\text{La série de Fourier de } g'' \text{ est donc } -\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 c_n \sin(n\pi x) .$$

c) Nous admettrons que la formule de Parseval-Bessel reste valable pour une fonction continue par morceaux (donnée pour une fonction continue dans le programme).

$$\text{On a alors } 2 \int_0^1 (f''(x))^2 dx = \frac{2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n^4 \pi^4 c_n^2 \text{ soit : } \int_0^1 (f''(x))^2 dx = \frac{\pi^4}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n^4 c_n^2 .$$

d) Dire que les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ sont convergentes, c' est dire que les sommes partielles

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k^2 \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^n b_k^2 \text{ sont majorées par } A \text{ et } B . \quad (\text{Cf théorèmes sur les séries à termes}$$

positifs)

Mais alors l' inégalité de Schwartz donne

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2} = \sqrt{A_n} \sqrt{B_n} \leq \sqrt{AB} \text{ ce qui assure la convergence de la série}$$

$$\text{à termes positifs } \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n| \text{ et on a : } \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \right)^{1/2}.$$

d) Soit $a_n = n^2 c_n$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge et a pour somme $\frac{2}{\pi^4} \|f\|^2$.

Soit $b_n = \frac{1}{n^2}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ converge et a pour somme $\frac{\pi^4}{90}$.

On en déduit que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|$ converge et que sa somme est inférieure ou égale à

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{\pi^2}{\sqrt{90}} \|f\| = \frac{\|f\|}{3\sqrt{5}}.$$

Mais alors comme $\forall x \in [0,1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(\pi n x), \forall x \in [0,1], |f(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| \leq \frac{\|f\|}{3\sqrt{5}}.$

2°) a) Soit $g_i(t) = (f - \varphi)(x_i + th_i)$. g_i est de classe C^2 sur $[0,1]$.

On peut appliquer le résultat précédent et on a donc : $\forall t \in [0,1], |g_i(t)| \leq \frac{\|g_i\|}{3\sqrt{5}}.$

$g_i''(t) = h_i^2 (f - \varphi)''(x_i + th_i)$ d' où $\|g_i\| = \sqrt{\int_0^1 [(f - \varphi)''(x_i + th_i)]^2 h_i^4 dt}$. On pose alors

$u = x_i + th_i, du = h_i dt$ et $\|g_i\| = h_i^{\frac{3}{2}} \sqrt{\int_{x_i}^{x_{i+1}} [(f - \varphi)''(u)]^2 du} \leq h_i^{\frac{3}{2}} \|f - \varphi\|$ puisque l' on intègre sur $[x_i, x_{i+1}] \subset [0,1]$.

$$\text{Conclusion : } \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x) - \varphi(x)| = \sup_{t \in [0,1]} |(f - \varphi)(x_i + th_i)| \leq \frac{\|f - \varphi\|}{3\sqrt{5}} h_i^{\frac{3}{2}}.$$

b) Soit à calculer $I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(t) - \varphi''(t)) \varphi''(t) dt$. Une première intégration par parties fournit :

$$\begin{cases} u = \varphi'' , & u' = \varphi''' \\ v' = f'' - \varphi'' , & v = f' - \varphi' \end{cases} \text{ d' où } I = [(f'(t) - \varphi'(t)) \varphi''(t)]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(t) - \varphi'(t)) \varphi'''(t) dt.$$

Une deuxième intégration par parties fournit :

$$\begin{cases} u = \varphi''' , & u' = \varphi^{(4)} = 0 \\ v' = f' - \varphi' , & v = f - \varphi \end{cases} \text{ d' où}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(t) - \varphi'(t)) \varphi'''(t) dt = [(f(t) - \varphi(t)) \varphi'''(t)]_{x_i}^{x_{i+1}} - 0 = 0 \text{ et par suite :}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(t) - \varphi''(t)) \varphi''(t) dt = [(f' - \varphi') \varphi'']_{x_{i+1}} - [(f' - \varphi') \varphi'']_{x_i}.$$

Mais alors $\int_0^1 (f''(t) - \varphi''(t))\varphi''(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} ([(f' - \varphi')\varphi''](x_{i+1}) - [(f' - \varphi')\varphi''](x_i))$ soit

$$\int_0^1 (f''(t) - \varphi''(t))\varphi''(t) dt = [(f' - \varphi')\varphi''](1) - [(f' - \varphi')\varphi''](0) = 0$$

On peut alors écrire:

$$\int_0^1 (f''(t))^2 dt = \int_0^1 (f''(t) - \varphi''(t) + \varphi''(t))^2 dt = \int_0^1 (f''(t) - \varphi''(t))^2 dt + \int_0^1 (\varphi''(t))^2 dt + 0.$$

$$\text{D' où } \|f - \varphi\|^2 = \|f\|^2 - \|\varphi\|^2.$$

c) $\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\|f - \varphi\|}{3\sqrt{5}} h^{\frac{3}{2}}$ d' après a) et $\|f - \varphi\| \leq \|f\|$ d' après b) d' où

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\|f\|}{3\sqrt{5}} h^{\frac{3}{2}}$$

FIN