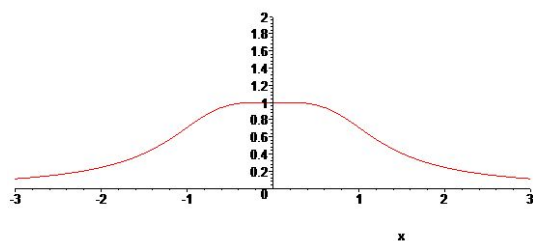


Corrigé de E3A 2011 PC math A

Partie I

1. (a) f est paire, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et a pour limite 0 en $+\infty$.



- (b) $f'(x) = -2x^3(1+x^4)^{-3/2}$ et $f''(x) = -6x^2(1+x^4)^{-3/2} - 2x^3 \times (-3/2) \times 4x^3(1+x^4)^{-5/2} = 6x^2(x^4-1)(1+x^4)^{-5/2}$. La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour $x = \pm 1$: il y a donc deux points d'inflexion de coordonnées $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$.
- (c) D'après le cours, $(1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{(-1/2) \times (-3/2)}{2}t^2 + o(t^2) = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + o(t^2)$ d'où l'on déduit en posant $t = x^4$: $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^8)$.
- (d) Puisque f est de classe C^∞ elle possède un DL à l'ordre 8 donné par la formule de Taylor-Young: $f(x) = \sum_{k=0}^8 f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + o(x^8)$. Par unicité des coefficients d'un DL on en déduit que $f^{(4)}(0) = -12$, $f^{(8)}(0) = 3 \times 7! = 15120$ et $f^{(k)}(0) = 0$ si k n'est pas multiple de 4.
2. (a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$ donc la suite (a_n) est décroissante.
- (b) La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite $l \geq 0$.
- (c) Immédiat puisque $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.
- (d) Posons $u_n = |a_n z^n|$. Pour $z \neq 0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} |z|$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |z|$. La règle de d'Alembert entraîne que la série $(\sum u_n)$ converge si $|z| < 1$ et diverge si $|z| > 1$. Par suite le rayon de convergence de $(\sum a_n z^n)$ est égal à 1.
3. (a) F est définie sur $\mathbb{R}$ car c'est une primitive de la fonction f continue sur $\mathbb{R}$ (toute fonction continue sur I possède une unique primitive s'annulant en un point a de I).
- (b) f est continue sur $\mathbb{R}_+$, positive et $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$. L'existence de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ entraîne l'existence de α .
- (c) On effectue le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ qui est bien une bijection de classe C^1 de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt = \int_1^0 \frac{-du}{u^2 \sqrt{1+(1/u)^4}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}$.
- (d) La relation de Chasles donne bien $\alpha = 2F(1)$.
- (e) i. $f(n) \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série converge par la règle de Riemann.

ii. Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ on a $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$ d'où

$$\sum_{n=0}^N f(n+1) \leq \int_0^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{n=0}^N f(n) \text{ et en faisant tendre } N \text{ vers } +\infty:$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq \int_0^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \text{ que l'on peut réécrire puisque } f(0) = 1:$$

$$\alpha \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leq \alpha + 1.$$

Partie II

1. $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$.

2. En posant $t = \frac{\pi}{2} - u$ on obtient $I_n = \int_{\pi/2}^0 (\sin u)^n \times (-du) = \int_0^{\pi/2} (\sin u)^n du$.

3. Puisque $\cos t \geq 0$ sur $[0, \pi/2]$ on a $I_n \geq 0$. De plus $I_n = 0$ entrainerait que $\cos t = 0$ sur $[0, \pi/2]$ ($\cos$ est continue) ce qui est faux; donc $I_n > 0$.

4. $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n (\cos t - 1) dt \leq 0$ car $\cos t \leq 1$. La suite (I_n) est donc décroissante, minorée par 0 par suite elle converge.

5. Intégrons par parties pour $n \geq 2$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)(\cos t)^{n-1} dt = [(\sin t)(\cos t)^{n-1}]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\sin t) \times (-(n-1)\sin t)(\cos t)^{n-2} dt =$$

$$(n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - (\cos t)^2)(\cos t)^{n-2} dt = (n-1)(I_{n-2} - I_n). \text{ On en déduit } nI_n = (n-1)I_{n-2}.$$

6. $u_n = (n+1)I_{n+1} \times I_n = nI_{n-1}I_n = u_{n-1}$: la suite (u_n) est donc constante d'où $u_n = u_0 = I_1I_0 = \frac{\pi}{2}$.

7. • $\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ donc la suite $\frac{I_{2n}}{a_n}$ est constante et égale à sa valeur en 0: $\frac{\pi}{2}$.
 • $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \frac{2n}{2n+1}$ et $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n-1}{2n}$ d'où $\frac{(2n+1)I_{2n+1}a_n}{(2n-1)I_{2n-1}a_{n-1}} = \frac{2n+1}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-1}{2n} = 1$. La suite $(2n+1)I_{2n+1}a_n$ est donc constante et égale à sa valeur en 0: 1.

8. (a) Immédiat puisque la suite (I_n) est décroissante et $I_n > 0$.

(b) $\frac{I_{n-2}}{I_n} = \frac{n}{n-1}$ a pour limite 1 donc par le théorème d'encadrement $\frac{I_{n-1}}{I_n}$ aussi. $nI_n^2 = nI_nI_{n-1} \times \frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{I_n}{I_{n-1}}$ a donc pour limite $\frac{\pi}{2}$.

(c) On en déduit $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

9. (a) De $nI_n^2 \leq nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ on tire $I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. On en déduit $a_n = \frac{2}{\pi}I_{2n} \leq \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

$$\text{Puis } a_n = \frac{1}{(2n+1)I_{2n+1}} \geq \frac{1}{2n+1} \sqrt{\frac{2(2n+1)}{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}.$$

(b) $a_n = \frac{2}{\pi}I_{2n} \sim \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

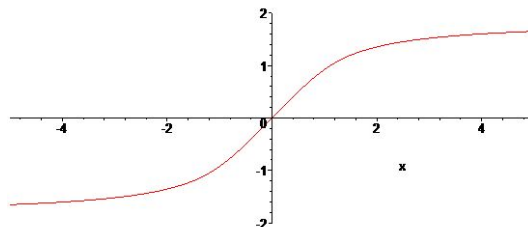
(c) i) $a_n \sim \frac{C}{n^{1/2}}$ donc la série $(\sum a_n)$ diverge par la règle de Riemann.

ii) $\frac{a_n}{4n+1} \sim \frac{C'}{n^{3/2}}$ donc la série $(\sum \frac{a_n}{4n+1})$ converge par la règle de Riemann.

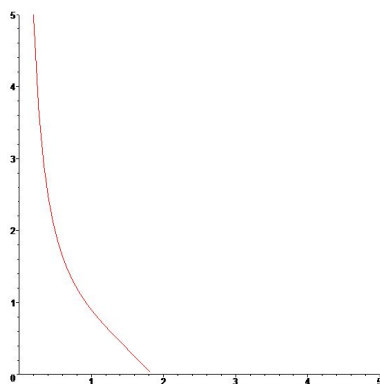
- iii) La série $(\sum (-1)^n a_n)$ est alternée car $a_n > 0$. De plus, la suite (a_n) est décroissante et a pour limite 0 donc la série alternée converge.
- iv) La série $\left(\sum \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}\right)$ est absolument convergente par le ii).

Partie III

- F est de classe C^∞ puisque sa dérivée f l'est aussi.
 - $F'(x) = f(x) > 0$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 - $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt = \int_0^x f(-u) \times (-du)$ par le changement de variable $t = -u$. Puisque f est paire on a donc $F(-x) = -F(x)$: F est impaire.
 - De $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq \frac{1}{t^2}$ on déduit en intégrant sur $[1, x]$: $F(x) - F(1) \leq \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$.
 - Toute fonction croissante et majorée sur $[A, +\infty[$ possède une limite en $+\infty$.
 - F est croissante sur $[1, +\infty[$ et y est majorée par $F(1) + 1$ donc elle possède une limite en $+\infty$.
- Puisque f est continue et possède un DL à l'ordre 8, on peut intégrer terme à terme ce DL pour obtenir le DL de F à l'ordre 9: $F(x) = x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9 + o(x^9)$ (car de plus $F(0) = 0$).
 - L'équation de la tangente en 0 est: $y = x$. Comme $F(x) - x \sim -\frac{1}{10}x^5$ quand x tend vers 0 on en déduit que pour $x > 0$ la courbe (C) est au dessous de T alors que pour $x < 0$ elle est au dessus de T.
 - $F''(x) = f'(x) = -2x^3(1+x^4)^{-3/2}$ s'annule en changeant de signe pour $x = 0$; (C) a donc un unique point d'inflexion, le point O.
- Le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ donne $F(x) - F(1) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt = \int_1^{1/x} \frac{-\frac{du}{u^2}}{\sqrt{1+(1/u)^4}} = \int_{1/x}^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^4}} = F(1) - F(1/x)$.
 - Puisque F est continue la limite en $+\infty$ de $F(1/x)$ est égale à $F(0) = 0$ donc la limite en $+\infty$ de $F(x)$ est égale à $2F(1)$.
 - On retrouve ainsi le résultat de la question I)3d): $\alpha = 2F(1)$ (mais on a refait la même démonstration!).
- La tangente à (C) au point d'abscisse 1 est: $y = \frac{x-1}{\sqrt{2}} + F(1)$. Les droites d'équation $y = \alpha$ et $y = -\alpha$ sont asymptotes à (C).



5. (a) (E) s'écrit $y' + \frac{2t^3}{1+t^4}y = \frac{1}{1+t^4}$. Une primitive de $t \mapsto \frac{2t^3}{1+t^4}$ est $\varphi(t) = \frac{1}{2} \ln(1+t^4)$. En multipliant l'équation par $e^{\varphi(t)} = \sqrt{1+t^4}$ on obtient: $(y\sqrt{1+t^4})' = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ d'où $y\sqrt{1+t^4} = F(t) + C$ et donc $y = \frac{F(t) + C}{\sqrt{1+t^4}}$.
- (b) i. On a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ donc la courbe possède O comme centre de symétrie et on peut se limiter à $t > 0$.
- ii. Sur $]0, +\infty]$, x croît strictement de 0 à α alors que y décroît strictement de $+\infty$ à 0. La droite d'équation $x = 0$ est donc asymptote à la courbe.
- iii. Quand t tend vers $+\infty$ on peut écrire avec la question III)3a) en posant $u = \frac{1}{t}$: $x(t) = F(t) = \alpha - F(u) = \alpha - u + \frac{1}{10}u^5 + o(u^5)$ et $y(t) = u$. On en déduit qu'il y a un point limite de coordonnées $(\alpha, 0)$ et que la courbe y possède une tangente d'équation $y = \alpha - x$. On peut même dire que la courbe est au dessus de cette tangente puisque $x(t) > \alpha - y(t)$.
- iv.



- (c) i. $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.
Pour tout réel t on a $0 \leq f(t) \leq 1$ donc $0 \leq f(xy) \leq 1$.
En intégrant $0 \leq f(t) \leq 1$ sur $[0, x]$ pour $x > 0$ on obtient $0 \leq F(x) \leq x$ d'où puisque F est impaire: $|F(x)| \leq |x|$ et donc $|F(xy)| \leq |xy|$.
- ii. φ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ puisque F est continue sur $\mathbb{R}$; $|\varphi(x, y)| \leq |F(xy)| \leq |xy|$ montre que $\varphi(x, y)$ a pour limite 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$. φ est donc continue en $(0, 0)$ donc continue sur $\mathbb{R}^2$.
- iii. $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} F(xy) + \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} f(xy)$.
 $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{-2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} F(xy) + \frac{x^3}{x^2 + y^2} f(xy)$.
- iv. $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right| \leq \frac{2x^2 |y|^3}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq 3|y|$ et $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{2|x|^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{|x|^3}{x^2 + y^2} \leq 3|x|$.
Les deux dérivées partielles ont donc pour limite 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$. Puisque $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ et de même $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0) = 0$, on peut conclure que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Partie IV

1. (a) Posons $v_n = \left| \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^n \right|$. Pour $x \neq 0$: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{4n+1}{4n+5} |x|$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = |x|$.
La règle de d'Alembert entraîne que la série $(\sum v_n)$ converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$.
Par suite le rayon de convergence de $\left(\sum \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^n \right)$ est égal à 1.
- (b) Pour $x = \pm 1$ on a $\left| \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^n \right| = \frac{a_n}{4n+1} \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi} n^{3/2}}$ donc la série converge absolument par la règle de Riemann: $h(1)$ et $h(-1)$ existent.

- (c) Si la série entière a un rayon de convergence égal à R et si elle converge au point R alors la fonction somme est continue sur $[0, R]$. De même si elle converge au point $-R$ alors la fonction somme est continue sur $[-R, 0]$. C'est bien le cas ici avec $R = 1$ donc h est continue sur $[-1, 1]$.
- (d) Pour $x \in [-1, 1]$ on a $\left| \frac{(-1)^n a_n x^n}{4n+1} \right| \leq \frac{a_n}{4n+1}$ terme général d'une série convergente; il y a donc convergence normale sur $[-1, 1]$. Le terme général de la série étant une fonction continue sur $[-1, 1]$ et la série convergeant normalement sur $[-1, 1]$ la somme de la série est continue sur $[-1, 1]$.
2. (a) $b(x) = (1+x)^\beta = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)}{n!} x^n$ valable pour tout x réel si $\beta \in \mathbb{N}$ et pour $x \in]-1, 1[$ sinon.
- (b) Avec $\beta = -\frac{1}{2}$ on en déduit pour $x \in]-1, 1[$: $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)(-3)\dots(-2n+1)}{2^n n!} x^{4n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2} x^{4n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \binom{2n}{n}}{4^n} x^{4n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^{4n}$.
- En intégrant (ce qui est possible sur $] -1, 1[$) on obtient: $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1} = h(x)$.
- (c) Comme F et h sont continues sur $[-1, 1]$ l'égalité $F(x) = h(x)$ s'étend à $[-1, 1]$.
- (d) Pour $x = 1$ on obtient $\alpha = 2F(1) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$.
3. (a) La série est une série alternée qui vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées: la suite $b_n = a_n \times \frac{1}{4n+1}$ est décroissante (puisque (a_n) et $(\frac{1}{4n+1})$ le sont et sont positives) et tend vers 0. On a donc $\left| \frac{\alpha}{2} - S_p \right| \leq |b_{p+1}|$ donc $|\alpha - 2S_p| \leq \frac{2}{4p+5} a_{p+1}$.
- (b) Avec le II)9a) on déduit $|\alpha - 2S_p| \leq \frac{2}{(4p+5)\sqrt{\pi(p+1)}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}(p+1)^{3/2}}$.
- (c) $2\sqrt{\pi}(p+1)^{3/2} \geq 10^6 \Leftrightarrow 4\pi(p+1)^3 \geq 10^{12} \Leftrightarrow p+1 \geq \frac{10^4}{(4\pi)^{1/3}}$. Sans calculatrice on peut prendre $p = 5000$ puisque $(4\pi)^{1/3} > 2$ (avec une calculatrice $p = 4300$ suffirait).
- Remarque: une calculatrice donne instantanément $2F(1) = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \approx 1.85407467730$ qui est une valeur approchée de α à 10^{-12} près.