0.1 Corrigé du Pb Centrale 07 PC 1

Transformation de Laplace et convolution.

0.1.1 Partie I

I A IA1) La fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et dominée au voisinage de $\pm\infty$ par la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, donc est intégrable sur $\mathbb{R}$.

IA2) La fonction $x \mapsto x f(x)$ est impaire, donc son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle: $\boxed{m_1 = 0}$

IA3) Intégrons par parties sur un segment $[-a, a]$:

$$\int_{-a}^{a} x^{n-1} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[-x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-a}^{a} + \int_{-a}^{a} (n-1) x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, et en divisant par $\sqrt{2\pi}$, il vient: $\boxed{m_n = (n-1)m_{n-2}}$

.

Partant de $m_0 = 1$, on obtient: $m_{2n} = (2n-1)(2n-3)...3.1$.
Et partant de $m_1 = 0$, $m_{2n+1} = 0$.

$$\boxed{m_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}\ , \quad m_{2n+1} = 0}$$

I B La fonction $x \mapsto e^{-tx} f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et dominée au voisinage de $\pm\infty$ par la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, donc est intégrable sur $\mathbb{R}$.

$-\frac{x^2}{2} - tx = -\frac{1}{2}(x+t)^2 + \frac{1}{2}t^2$, d'où $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+t)^2} dx.$

Le changement de variable $u = x + t$ donne: $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x) dx = e^{\frac{t^2}{2}}}$

I C IC1) D'après le développement en série entière de la fonction exponentielle:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = e^{-tx} f(x)$$

IC2) $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|S_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|tx|^k}{k!} f(x) \leq e^{|tx|} f(x)$

La fonction $x \mapsto e^{|tx|} f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc cette hypothèse de domination , jointe à la convergence simple du C1), nous donne:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} S_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x)dx$$

Mais comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} S_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^k}{k!}\int_{\mathbb{R}} x^k f(x)dx$ par linéarité de l'intégrale,

l'égalité ci-dessus se récrit: $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} m_k}$

IC3) en remplaçant m_k par sa valeur obtenue en A3), il vient:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\frac{(2k)!}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k = e^{\frac{t^2}{2}}$$

On retrouve bien le résultat du B).

0.1.2 Partie II

II A E est une partie du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non vide (elle contient la fonction nulle).

Soit $(g,h) \in E^2$ et $p \in \mathbb{R}$. Montrons que $g + ph \in E$.

On a l'existence de M, N positifs, λ et μ strictement positifs, tels que:

$\forall x \in \mathbb{R},\ |g(x)| \le M f(\lambda x)$ et $|h(x)| \le N f(\mu x)$

Soit $\rho = \min(\lambda, \mu)$.

Puisque $-\dfrac{\lambda^2 x^2}{2} \le -\dfrac{\rho^2 x^2}{2}$ et $-\dfrac{\mu^2 x^2}{2} \le -\dfrac{\rho^2 x^2}{2}$, on obtient:

$\forall x \in \mathbb{R},\ |(g+ph)(x)| \le (M + |p|N) f(\rho x)$. Donc $g + ph \in E$.

Ainsi, E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. C'est donc lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Enfin, il est clair que la fonction f est dans E.

II B IIB1) Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(t)v(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On a l'existence de M, N positifs, λ et μ strictement positifs, tels que:

$\forall t \in \mathbb{R},\ |u(t)| \le M f(\lambda t)$ et $|v(x-t)| \le N f(\mu(x-t))$.

Donc: $\displaystyle\forall t \in \mathbb{R},\ |u(t)v(x-t)| \le \frac{MN}{2\pi}\exp\left(-\frac{\lambda^2 t^2}{2} - \frac{\mu^2 (x-t)^2}{2}\right)$

$$|u(t)v(x-t)| \le \frac{MN}{2\pi}\exp\left(-\frac{(\lambda^2+\mu^2)t^2}{2} + \mu^2 xt - \frac{\mu^2 x^2}{2}\right)$$

Cette fonction est dominée au voisinage de $\pm\infty$ par la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$, donc est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout x dans $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(t)v(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $u * v$ est définie sur $\mathbb{R}$.

IIB2) le changement de variable $s = \varphi(t) = x - t$, bijection C^1 de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, avec $|\varphi'(t)| = 1$, donne de suite le résultat:

$$\boxed{u * v = v * u}$$

IIB3) $(f * f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{t^2}{2} - \frac{(x-t)^2}{2}\right) dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-t^2 + xt\right) dt.$

Faisons le changement de variable $u = \sqrt{2}t$:

$$(f * f)(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{u^2}{2} + \frac{xu}{\sqrt{2}}\right) du = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{xu}{\sqrt{2}}\right) f(u) du$$

D'où, avec IB): $(f * f)(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{x^2}{4}}$ $\quad \boxed{(f * f)(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} f\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)}$

IIB4) Il faut d'abord montrer que $u * v$ est continue sur $\mathbb{R}$:
Pour cela, on remarque que:

- Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(t)v(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour t fixé dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto u(t)v(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- domination locale: soit $J = [-A, A]$ un segment de $\mathbb{R}$. En reprenant la majoration du IIB1), on a:

$$\forall x \in J,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \ |u(t)v(x-t)| \leq \frac{MN}{2\pi} \exp\left(-\frac{(\lambda^2 + \mu^2)t^2}{2} + \mu^2 A|t|\right)$$

La fonction majorante obtenue ne dépend pas de x et elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ (dominée au voisinage de l'infini par la fonction habituelle $t \mapsto t^{-2}$).

Ces trois hypothèses nous permettent de conclure que <u>$u * v$ est continue sur $\mathbb{R}$</u>

Puis majorons $|(u*v)(x)|$ en utilisant: $|u(t)| \leq M(u) f(\lambda t)$ et $|v(x-t)| \leq M(v) f(\mu(x-t))$

En posant $\rho = \min(\lambda, \mu)$, il vient : $|(u*v)(x)| \leq M(u)M(v)\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(\rho t)\ f(\rho(x-t))\, dt$

Posons $s = \rho t$: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(\rho t)\ f(\rho(x-t))\, dt = \frac{1}{\rho}\int_{\mathbb{R}} f(s)\ f(\rho x - s)\, ds$

$$= \frac{1}{\rho}(f * f)(\rho x) = \frac{1}{\rho\sqrt{2}} f\left(\frac{\rho x}{\sqrt{2}}\right).$$

Donc: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |(u * v)(x)| \leq \dfrac{M(u)M(v)}{\rho\sqrt{2}} f\left(\dfrac{\rho x}{\sqrt{2}}\right)$ Ainsi: <u>$u * v \in E$</u>

II C IIC1) Soit $u \in E$ et $t \in \mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto e^{-tx}u(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et dominée au voisinage de l'infini par la fonction $x \mapsto x^{-2}$, donc est intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\widehat{u}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

IIC2) La fonction $U : (t,x) \mapsto e^{-tx}u(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (produit de deux fonctions de classe C^2).

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) = -xe^{-tx}u(x) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t) = x^2e^{-tx}u(x) \quad .$$

Domination locale: soit $J = [-A, A]$ un segment de $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in J, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)\right| \leq xe^{A|x|}u(x) \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t)\right| \leq x^2e^{A|x|}u(x) \quad .$$

Ces deux fonctions dominantes sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction $\widehat{u}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, avec:

$$\boxed{\widehat{u}'(t) = -\int_{\mathbb{R}} xe^{-tx}u(x)dx \qquad \text{et} \quad \widehat{u}''(t) = \int_{\mathbb{R}} x^2e^{-tx}u(x)dx}$$

II D IID1) Allez, utilisons nos connaissances d'algèbre!

$t^2 + (x-t)^2 = 2t^2 - 2xt + x^2 = {}^tXAX$, en posant: $X = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Réduisons cette forme quadratique en diagonalisant la matrice symétrique A dans le groupe orthogonal.

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 3\lambda + 1$.

Ce trinôme en λ possède deux racines réelles λ_1 et λ_2 strictement positives, puisque:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 3 \quad \text{et} \quad \lambda_1\lambda_2 = 1.$$

Il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Soit $X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$.

On a: ${}^tXAX = {}^t(PX')\,A(PX') = {}^tX'P^{-1}APX' = \lambda_1 t'^2 + \lambda_2 x'^2$.

Posons $a = \min(\lambda_1, \lambda_2)$: alors $\lambda_1 t'^2 + \lambda_2 x'^2 \geq a\left(t'^2 + x'^2\right)$.

De plus: $t'^2 + x'^2 = {}^tX'X' = {}^tXX = t^2 + x^2$.

On a bien trouvé un réel a strictement positif tel que:

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad t^2 + (x-t)^2 \geq a\left(t^2 + x^2\right).$$

IID2) les fonctions u et v sont dans E, donc $u * v$ aussi (IIB4).

Donc $u * v$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (IIC1).

On souhaite appliquer le résultat d'interversion donné par l'énoncé à la fonction F :

$$F(x,t) = u(t)v(x-t).$$

F est bien continue sur $\mathbb{R}^2$.

Reprenons la majoration du IIB; en posant $K = \dfrac{MN}{2\pi}$ et $\rho = \min(\lambda, \mu)$, on a:

$|F(x,t)| \leq K \exp\left(-\rho^2 t^2 - \rho^2 (x-t)^2\right) \leq K \exp\left(-a\rho^2\left(t^2 + x^2\right)\right)$.

En notant: $h_1(t) = K \exp\left(-a\rho^2 t^2\right)$ et $h_2(x) = \exp\left(-a\rho^2 x^2\right)$, on a bien l'hypothèse de l'énoncé (h_1 et h_2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$). Donc:

$$\int_{\mathbb{R}} (u*v)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t)dt\right) dx = \int_{\mathbb{R}} u(t) \left(\int_{\mathbb{R}} v(x-t)dx\right) dt.$$

Le changement de variable $s = x - t$ dans l'intégrale intérieure donne:

$$\int_{\mathbb{R}} v(x-t)dx = \int_{\mathbb{R}} v(s)ds.$$

D'où: $$\boxed{\int_{\mathbb{R}} (u*v)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)dx \int_{\mathbb{R}} v(x)dx}$$

IID3) Cette égalité peut encore s'écrire: $\widehat{u*v}(0) = \widehat{u}(0)\widehat{v}(0)$.
Généralisons:

$$\widehat{u*v}(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta x}(u*v)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t)e^{-\theta x}dt\right) dx.$$

Soit $G(x,t) = u(t)v(x-t)e^{-\theta x}$. G est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$|G(x,t)| \leq K e^{-\theta x} \exp\left(-a\rho^2\left(t^2 + x^2\right)\right)$

On a bien encore les hypothèses pour intervertir les deux intégrales, en posant cette fois:

$h_1(t) = K \exp\left(-a\rho^2 t^2\right)$ et $h_2(x) = \exp\left(-a\rho^2 x^2 - \theta x\right)$. donc:

$$\widehat{u*v}(\theta) = \int_{\mathbb{R}} u(t) \left(\int_{\mathbb{R}} v(x-t)e^{-\theta x}dx\right) dt.$$

Le changement de variable $s = x - t$ dans l'intégrale intérieure donne:

$$\int_{\mathbb{R}} v(x-t)e^{-\theta x}dx = \int_{\mathbb{R}} v(s)e^{-\theta(s+t)}ds = e^{-\theta t}\widehat{v}(\theta).$$

Et finalement: $$\boxed{\widehat{u*v}(\theta) = \widehat{u}(\theta)\,\widehat{v}(\theta)}$$

0.1.3 Partie III

$\boxed{\textbf{III A}}$ Soit h dans E_1.

IIIA1) Soit $\mathcal{P}(n) : h_n \in E_1$. $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$.
Alors $h_{n+1} = h_n * h$ est bien définie et appartient à E (IIB).

De plus $\int_{\mathbb{R}} h_{n+1}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} h_n(x)dx \int_{\mathbb{R}} h(x)dx = 1$. Donc $h_{n+1} \in E_1$.

Par réurrence, on a bien montré: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \in E_1$.

IIIA2) Avec IID3, on a: $\widehat{h_n}(x) = \widehat{h_{n-1}}(x)\widehat{h}(x)$, d'où, par une récurrence évidente:

$$\boxed{\widehat{h_n}(x) = \left(\widehat{h}(x)\right)^n}$$

III B suite (f_n) associée à f :

IIIB1) le calcul de $f_2 = f * f$ a été fait en IIB3): $f_2(x) = K_2 e^{-\frac{x^2}{4}}$, avec $K_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

IIIB2) Supposons qu'il existe une constante K_n telle que $f_n(x) = K_n \exp\left(-\dfrac{x^2}{2n}\right)$.

$$\text{Alors } f_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\, f_1(x-t)dt = \frac{K_n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{t^2}{2n} - \frac{(x-t)^2}{2}\right) dt$$

$$= \frac{K_n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-t^2\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\right) + xt\right) dt$$

Faisons le changement de variable $s = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}t$.

$$f_{n+1}(x) = \frac{K_n}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{s^2}{2} + x\sqrt{\frac{n}{n+1}}s\right) ds.$$

$$\text{Avec IB): } f_{n+1}(x) = K_n\sqrt{\frac{n}{n+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(\frac{n}{n+1}\frac{x^2}{2}\right) = K_n\sqrt{\frac{n}{n+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(n+1)}\right)$$

$$\text{Donc} \quad f_{n+1}(x) = K_{n+1} \exp\left(-\frac{x^2}{2(n+1}\right), \quad \text{avec } K_{n+1} = K_n\sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Par récurrence, on a bien montré, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'une constante K_n telle que:

$f_n(x) = K_n \exp\left(-\dfrac{x^2}{2n}\right)$. De plus, partant de $K_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, on obtient:

$$K_n = \prod_{p=1}^{n-1} \sqrt{\frac{p}{p+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \qquad \boxed{f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right)}$$

$$\text{IIIB3)} \quad \widehat{f_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[\ \widehat{f}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[\exp\left(\frac{t^2}{2n}\right)\right]^n = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

La suite proposée est constante, sa limite vaut $\exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

III C suite (g_n) associée à g : $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cos(x) & \text{si } x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

IIIC1) g est clairement continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{|g(x)|}{f(x)} \leq \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{\pi^2}{8}\right)$.

Et comme g est nulle en dehors de ce segment, g vérifie bien une majoration requise pour être dans E, avec par exemple $\lambda = 1$ et $M(g) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{\pi^2}{8}\right)$.

Enfin: $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)dx = \frac{1}{2}[\sin(x)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1$. Donc $g \in E_1$.

IIIC2) $(g * g)(-x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)g(-x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} g(-u)g(-x+u)du$.

Puisque g est paire: $(g * g)(-x) = \int_{\mathbb{R}} g(u)g(x-u)du = (g * g)(x)$.

Donc $g * g$ est paire.

Supposons $x \geq \pi$. Alors, puisque $t + (x - t) = x$, l'un des nombres t ou $x - t$ est supérieur ou égal à $\pi/2$, donc $g(t)g(x-t) = 0$. Ainsi $g * g$ est nulle sur $[\pi, +\infty[$.

Soit $x \in [0, \pi]$. $(g * g)(x) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\, g(x-t)dt$.

$x - t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \iff t \in \left[x - \frac{\pi}{2}, x + \frac{\pi}{2}\right]$. Comme $-\frac{\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2}$,

il vient: $(g * g)(x) = \frac{1}{4}\int_{x-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\cos(x-t)\, dt = \frac{1}{8}\int_{x-\pi/2}^{\pi/2} [\cos(x) + \cos(2t - x)]\, dt$

$$= \frac{1}{8}\left((\pi - x)\cos(x) + \frac{1}{2}[\sin(2t - x)]_{x-\pi/2}^{\pi/2}\right).$$

$$\boxed{(g * g)(x) = \frac{1}{8}((\pi - x)\cos(x) + \sin(x)) \text{ si } x \in [0, \pi], \quad (g * g)(x) = 0 \text{ si } x \geq \pi}$$

IIIC3) Soit $\mathcal{P}(n)$: g_n est paire, et nulle en dehors d'un segment $[-a_n, a_n]$.

$\mathcal{P}(1)$ est vraie, avec $a_1 = \frac{\pi}{2}$, $\mathcal{P}(2)$ est vraie, avec $a_2 = \pi$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
Alors $g_{n+1} = g_n * g$ est paire (même démonstration qu'au début du IIIC2).

Soit $x \geq a_n + \frac{\pi}{2}$. Alors, puisque $t + (x - t) = x$, on a nécessairement $t \geq a_n$ ou $x - t \geq \frac{\pi}{2}$ donc $g_n(t)g(x-t) = 0$. Ainsi g_{n+1} est nulle sur $[a_n + \frac{\pi}{2}, +\infty[$.

Donc g_{n+1} est nulle en dehors de $[-a_{n+1}, a_{n+1}]$, avec $a_{n+1} = a_n + \frac{\pi}{2}$.

Par récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est paire est nulle en dehors du segment $\left[-\frac{n\pi}{2}, \frac{n\pi}{2}\right]$.

IIIC4) $\widehat{g}(t) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\, e^{-xt} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{(-t+i)x} dx\right)$.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{(-t+i)x} dx = \left[\frac{e^{(-t+i)x}}{-t+i}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{t+i}{t^2+1}\left(ie^{-t\pi/2} + ie^{t\pi/2}\right)$$

D'où: $$\boxed{\widehat{g}(t) = \frac{1}{t^2+1} \operatorname{ch}\left(\frac{t\pi}{2}\right)}$$

IIIC5) $\widehat{g_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[\widehat{g}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$. Prenons le logarithme ($\widehat{g}$ est strictement positive).

$\ln\left(\widehat{g_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = n \ln \widehat{g}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = n\left[\ln\left(\operatorname{ch}\frac{t\pi}{2\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)\right]$.

Faisons un développement limité pour n tendant vers l'infini:

$\ln\left(\operatorname{ch}\frac{t\pi}{2\sqrt{n}}\right) = \ln\left(1 + \frac{t^2\pi^2}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{t^2\pi^2}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

D'où: $\ln\left(\widehat{g_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = n\left(\frac{t^2\pi^2}{8n} - \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$,

et $\lim \ln\left(\widehat{g_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) t^2$. $\boxed{\lim_{n\to\infty} \widehat{g_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left(\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) t^2\right)}$

0.1.4 Partie IV

IV A IVA1) On applique le IIC2 à la fonction h_n, qui est dans E :

$\widehat{h_n}$ est C^2, donc admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$\widehat{h_n}(t) = 1 + \widehat{h_n}'(0)t + \frac{1}{2}\widehat{h_n}''(0)t^2 + o(t^2) = 1 - M_{1,n}t + \frac{1}{2}M_{2,n}t^2 + o(t^2)$.

IVA2) Par ailleurs: $\widehat{h_n}(t) = \left(\widehat{h}(t)\right)^n = \left(1 - M_{1,1}t + \frac{1}{2}M_{2,1}t^2 + o(t^2)\right)^n$

$$= 1 - nM_{1,1}t + \left(\frac{n}{2}M_{2,1} + \frac{n(n-1)}{2}M_{1,1}^2\right)t^2 + o(t^2).$$

Par unicité du D.L., on en déduit: $M_{1,n} = nM_{1,1}$ et $M_{2,n} = nM_{2,1} + n(n-1)M_{1,1}^2$,

donc $V_n = M_{2,n} - M_{1,n}^2 = nM_{2,1} - nM_{1,1}^2 = nV_1$.

$$\boxed{M_{1,n} = nM_{1,1} \quad \text{et} \quad V_n = nV_1}$$

IV B $\widehat{h_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[\widehat{h}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$

Pour n tendant vers l'infini: $\widehat{h}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{M_{2,1}t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (M_{1,1} = 0)$.

Donc $\widehat{h}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ est strictement positif pour n assez grand. On peut prendre le logarithme:

$$\ln\left(\widehat{h_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = n\ln\left(\widehat{h}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = n\ln\left(1 + \frac{M_{2,1}t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

D'où $\lim \ln\left(\widehat{h_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{M_{2,1}t^2}{2}$ et $\boxed{\lim_{n\to\infty} \widehat{h_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left(\frac{M_{2,1}t^2}{2}\right)}$

remarque: on peut vérifier les résultats obtenus en III pour les fonctions f et g :

Pour f : $M_{1,1} = 0$, $M_{2,1} = m_2 = 1$. On a bien $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

Pour g : $M_{1,1} = 0$ car $x \mapsto xg(x)$ est impaire.

$$M_{2,1} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}x^2\cos(x)dx = \int_0^{\pi/2} x^2\cos(x)dx = \left[x^2\sin(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x\sin(x)dx$$
$$= \frac{\pi^2}{4} + 2\left[x\cos(x)\right]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2}\cos(x)dx = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

On retrouve: $\lim_{n\to\infty} \widehat{g_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left(\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)t^2\right)$