

Un espace affine euclidien orienté de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormal direct $\mathcal{R}_0(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. x, y, z désignent les coordonnées d'un point dans ce repère.

À tout réel θ on associe les vecteurs $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$, $\vec{u}_1(\theta) = \vec{k} \wedge \vec{u}(\theta)$ et le repère orthonormal direct $\mathcal{R}_\theta(O; \vec{u}(\theta), \vec{u}_1(\theta), \vec{k})$. Les coordonnées d'un point dans \mathcal{R}_θ sont notées X, Y, Z .

Le préliminaire définit les surfaces dont on se propose l'étude. Les parties I et II sont largement indépendantes.

Les fonctions considérées f, ϕ, g, h sont supposées de classe suffisante C^1 ou C^2 pour tous les calculs. On utilise des notations abrégées telles que :

$$\vec{u}, M, \frac{\partial M}{\partial r} \dots \text{ pour } \vec{u}(\theta), M(r, \theta), \frac{\partial M}{\partial r}(r, \theta) \dots$$

Les projections considérées sont orthogonales.

Préliminaire.

Soit J un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , f une fonction numérique réelle définie sur $\mathbb{R} \times J$. On lui associe la surface paramétrée S représentée par : $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times J \mapsto \vec{OM} = r\vec{u}(\theta) + f(r, \theta)\vec{k}$.

0.1) Calculer les composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{k})$ du vecteur

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}$$

On suppose $r \neq 0$, écrire une équation du plan tangent en M à S dans le repère \mathcal{R}_θ et donner les coordonnées du point d'intersection T de ce plan avec l'axe (O, \vec{k}) .

0.2)

a) Déterminer les fonctions f pour lesquelles la droite MT fait avec (O, \vec{k}) un angle égal à $\pi/4$, quel que soit le point M de S pour lequel $r \neq 0$.

b) Montrer qu'une surface S vérifiant la propriété précédente peut toujours être représentée par le paramétrage :

$$(r, \theta) \in \mathbb{R} \times I \mapsto \vec{OM} = r\vec{u}(\theta) + (r + \phi(\theta))\vec{k} \tag{1}$$

où I est un intervalle convenable associé à J , et ϕ une fonction numérique réelle définie sur I .

Partie I

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés d'une surface S définie par un paramétrage du type (1) et on les applique à des exemples.

I.1)

a) Caractériser la courbe D_θ décrite par M lorsque θ est fixé dans l'intervalle I .

b) On considère une courbe tracée sur S définie par $r = g(\theta)$. Déterminer la fonction g de façon que, pour tout θ , la tangente à cette courbe au point $M(g(\theta), \theta)$ soit orthogonale à D_θ . Montrer qu'une telle courbe est située sur un cône de révolution d'axe (O, \vec{k}) , de demi-angle au sommet $\pi/4$.

I.2) On considère une courbe tracée sur S définie par $r = h(\theta)$.

a) Former une équation différentielle du premier ordre qui doit être satisfaite par la fonction h pour qu'en chaque point de cette courbe, non situé sur (O, \vec{k}) , le plan tangent à S soit osculateur en ce point.

b) Déterminer la fonction ϕ pour qu'on puisse prendre $h(\theta) = e^\theta$ et que l'on ait : $\phi(0) = \phi'(0) = 1$. Pour ce choix de ϕ , donner la forme générale des fonctions h solution (on pourra prendre $1/h$ comme fonction auxiliaire).

I.3) On considère les sections de S par les plans parallèles au plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que les plans normaux à ces sections aux points situés sur D_θ , θ fixé dans I , contiennent une droite Δ_θ parallèle à $(O; \vec{k})$.

I.4) Étude d'un exemple.

Soit a un réel strictement positif. On prend $I =]-\pi/2, \pi/2[$.

a) Déterminer la fonction ϕ pour que la surface S contienne la droite d'équations dans \mathcal{R}_0

$$\begin{cases} x - a = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

On appelle S_0 la surface ainsi obtenue.

b) Tracer les sections de S_0 par les deux plans d'équations respectives $z = a$ et $z = -a$. Représenter la projection s_0 sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de la partie de S_0 définie par les inégalités : $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ et $-a \leq z \leq a$. Calculer l'aire de s_0 .

Représenter la projection s'_0 de cette même partie sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$.

c) Déterminer la fonction g de la question I.1) b) de façon que le cône de révolution d'axe (O, \vec{k}) qui contient la courbe définie sur S_0 par $r = g(\theta)$ ait pour sommet O . Quelle est alors cette courbe ?

d) On considère toujours S_0 . Déterminer la surface engendrée, lorsque θ varie dans I , par les droites Δ_θ obtenues à la question I.3). Quelles sont la nature de cette surface et sa section par le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$?

Partie II

Dans cette partie, a désigne un réel strictement positif, I l'intervalle $]-\pi, \pi[$ et on étudie la surface S_1 définie par le paramétrage :

$$(r, \theta) \in \mathbb{R} \times I \mapsto \vec{OM} = r\vec{u}(\theta) + (r - a \tan(\theta/2))\vec{k}.$$

II.1)

a) Donner des équations dans le repère \mathcal{R}_0 de la droite D_θ décrite par M lorsque θ est fixé dans I .

b) Soit L le lieu du point commun à D_θ et $D_{\theta+\pi}$ lorsque θ varie dans $]-\pi, 0[$. Donner des équations de L dans le repère \mathcal{R}_0 . Que peut-on dire de D_0 et L ? En déduire une définition de S_1 comme engendrée par des droites vérifiant des conditions géométriques simples.

II.2)

a) Quelle est l'intersection de S_1 et du plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$?

b) Montrer que S_1 admet dans \mathcal{R}_0 l'équation cartésienne :

$$y(x^2 + y^2 - z^2) - 2a(x^2 + y^2 - xz) + a^2y = 0.$$

(On pourra écrire : $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$).

II.3)

a) Montrer que S_1 admet un axe de symétrie.

b) Étudier et tracer les intersections de S_1 et des plans $(O; \vec{j}, \vec{k})$ et $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

c) Quelles sont les projections de S_1 sur les plans $(O; \vec{i}, \vec{k})$ et $(O; \vec{i}, \vec{j})$?

II.4) Construire l'enveloppe des projections sur le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$ des droites D_θ et en déduire l'ensemble des points de ce plan qui sont projections d'au moins un point de S_1 .

II.5) Soit λ un réel strictement positif. On appelle C_λ l'intersection du plan d'équation $z = \lambda$ avec S_1 et c_λ la projection de C_λ sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

c_λ peut être définie par l'équation polaire : $r = a \tan(\theta/2) + \lambda$. On pose $\alpha_\lambda = a \tan(a/\lambda)$.

Déterminer l'asymptote de c_λ et la position de c_λ par rapport à son asymptote. Montrer que c_λ admet un point double obtenu pour $\theta = \alpha_\lambda$ et $\theta = \alpha_\lambda - \pi$. Quel est le lieu de ce point lorsque λ varie ? Construire c_λ pour $\lambda = a$.

II.6) Montrer que la partie de c_λ telle que $y \leq a$ est formée d'une boucle. Calculer l'aire du domaine limité par cette boucle en fonction de λ et α_λ . En déduire le volume du domaine intérieur à S_1 et situé dans la partie de l'espace définie par les inégalités $y \leq a$ et $0 \leq z \leq a$.