Corrigé PT 2018, épreuve A.

Partie 1.

1. Tous les calculs (spectre, sous-espaces propres) sont faits sur $\mathbf{R}$.
Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
\chi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ -2 & t & 1 \\ 1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} \\
&\overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ t-1 & t & 1 \\ t-1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} \\
&= (t-1)(t+1)(t-2) \text{ (déterminant triangulaire).}
\end{aligned}$$

La matrice A, qui est de taille 3, admet donc trois valeurs propres (simples) deux à deux distinctes, à savoir -1, 1 et 2 : elle est donc diagonalisable sur $\mathbf{R}$ et tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

On procède de même pour la matrice B :

$$\begin{aligned}
\chi_B(t) &= \begin{vmatrix} t-4 & 0 & 3 \\ -3 & t-1 & 3 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} \\
&= (t-1) \begin{vmatrix} t-4 & 0 \\ -3 & t-1 \end{vmatrix} \text{ (développement / 3ème ligne)} \\
&= (t-1)^2(t-4) \text{ (déterminant triangulaire).}
\end{aligned}$$

La matrice B admet donc deux valeurs propres : 4 qui est simple (le sous-espace propre associé est donc de dimension 1), et 1 qui est double. De plus, la matrice $B - I_3$ est :

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle est donc de rang 1, donc, par la formule du rang, le sous-espace propre de B associé à la valeur propre 1 est de dimension 2. Ainsi, la somme des dimensions des sous-espaces propres de B est 3, et puisque B est de taille 3, elle est diagonalisable (sur $\mathbf{R}$).

2. Par un calcul direct, on obtient :

$$A^2 = B.$$

3. On rappelle que chaque sous-espace propre de A est de dimension 1, toutes les valeurs propres étant simples. Ainsi, on calcule une base de vecteurs propres en calculant un vecteur propre associé à chaque valeur propre.

Sous-espace propre associé à -1. On écrit la matrice $A + I_3$:

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On remarque la relation $C_1 - C_2 + C_3 = 0$, qui implique que le vecteur $V_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.

Sous-espace propre associé à 1. De même :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc, au vu de la relation $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ entre les colonnes de A, le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à 1.

Sous-espace propre associé à 4. De même :

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ce qui permet d'obtenir par la même méthode le vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vecteur propre associé à la valeur propre 2.

La famille (V_{-1}, V_1, V_2) étant une base de vecteurs propres de A, on en déduit la relation $P^{-1}AP = D$, soit encore $A = PDP^{-1}$, pour :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Puisque $B = A^2$ et que $A = PDP^{-1}$, on en déduit (mais c'est un calcul), que $B = PD^2P^{-1}$, et la matrice D^2 étant encore diagonale en tant que carré d'une matrice diagonale, la matrice B est semblable à une matrice diagonale *via* une matrice de passage à coefficients réels, donc B est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

Remarque : cette méthode « sans calcul »est en fait pleine de calculs. On peut aussi faire plus amusant : soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $M_{3,1}(\mathbf{R})$, et b l'endomorphisme canoniquement associé à B. Au vu de la matrice B, le sous-espace engendré par e_1 et e_2 est stable par b, et la matrice de l'endomorphisme induit dans la base (e_1, e_2) est triangulaire à coefficients diagonaux distincts. Ainsi, l'endomorphisme induit par b sur le plan vectoriel engendré par e_1 et e_2 est diagonalisable et ses valeurs propres sont 1 et 4. On peut ensuite écrire la matrice $B - I_3$, qui vaut $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est manifestement de rang 1, donc, par la formule du rang, le sous-espace propre de B associé à la valeur propre 1 est de dimension 2. La somme (directe) des sous-espaces propres de B est donc de dimension supérieure ou égale à $1 + 2 = 3$, donc de dimension 3, donc B est diagonalisable. Il y a encore du calcul, mais moins que dans la version suggérée par l'énoncé.

Partie 2.

1. L'endomorphisme f^2 est la rotation autour de l'axe dirigé par $\overrightarrow{e_3}$ et d'angle π (ce qu'on appelle un demi-tour) : en effet, la composée de deux rotations de même axe est encore une rotation de même axe, et son angle est la somme des angles de rotation. S'il faut vraiment (mais ce n'est pas l'esprit de l'énoncé qui demande seulement ensuite d'écrire cette matrice), on peut poser le calcul dans la base $\mathcal{B}$, qui est orthonormée, directe, et adaptée :

$$C = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 & 0 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc, la matrice de f^2 dans $\mathcal{B}$ est :

$$C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et la base $\mathcal{B}$ étant orthonormée directe et adaptée, on reconnaît bien qu'il s'agit de la matrice de rotation d'axe dirigé par $\overrightarrow{e_3}$ et d'angle π.

La matrice C^2 étant diagonale réelle, elle est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$. La matrice C n'est en revanche pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$: en effet, un calcul facile montre que son polynôme caractéristique est $(\lambda^2 + 1)(\lambda - 1)$, qui n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$. Sur $\mathbf{C}$, ce polynôme caractéristique se scinde en $(\lambda-1)(\lambda-i)(\lambda+i)$, et la matrice C est donc diagonalisable sur $\mathbf{C}$ puisqu'elle admet trois valeurs propres deux à deux distinctes.

2. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est de norme 18, donc le vecteur $\overrightarrow{w'} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\overrightarrow{w} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,1,-4)$ est unitaire et colinéaire à $\overrightarrow{w}$. Le vecteur $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{w'}$, et on choisit alors $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w'} \wedge \overrightarrow{u} = \frac{1}{3}(2,2,1)$, de sorte que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w'})$ est une base orthonormée directe.

Cette base $\mathcal{B}'$ étant une base orthonormée directe adaptée à la rotation g, la matrice de g dans cette base est C (comme à la question 1). La formule de changement de base orthonormée entraîne que la matrice de g dans $\mathcal{B}$ est alors :

$$M_{\mathcal{B}} = PCP^{-1} = PC({}^tP),$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ (il s'agit donc d'une matrice orthogonale en tant que matrice de passage entre deux bases orthonormées), et :

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 2/3 & 1/(3\sqrt{2}) \\ 1/\sqrt{2} & 2/3 & 1/(3\sqrt{2}) \\ 0 & 1/3 & -4/(3\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

et donc, en effectuant le produit matriciel :

$$M_{\mathcal{B}} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 1+12\sqrt{2} & -4+3\sqrt{2} \\ 1-12\sqrt{2} & 1 & -4-3\sqrt{2} \\ -4-3\sqrt{2} & -4+3\sqrt{2} & 16 \end{pmatrix}$$

Remarque : merci à Joël Pipon de m'avoir indiqué une erreur dans une première version de ce calcul. On peut vérifier qu'il s'agit bien d'une matrice orthogonale (les vecteurs colonnes sont unitaires et deux à deux orthogonaux), mais aussi que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est bien vecteur propre associé à la valeur propre 1, que le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour image le vecteur $\overrightarrow{v}$, et le vecteur $\overrightarrow{v}$ a pour image $-\overrightarrow{u}$.

La matrice $M_{\mathcal{B}}$ est semblable à la matrice C, qui est non diagonalisable sur $\mathbf{R}$ (d'après la question 1), donc n'est pas non plus diagonalisable sur $\mathbf{R}$. Puisque C et $M_{\mathcal{B}}$ sont semblables, il en est de même de $M_{\mathcal{B}}^2$ et C^2. Cette matrice étant diagonalisable sur $\mathbf{R}$ (et même diagonale), d'après la question 1, la matrice $M_{\mathcal{B}}^2$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ (mais pas diagonale, comme on le vérifie facilement !).

Partie 3.

1. Soit $x \in \mathrm{Im}\,(g)$. Alors, il existe $y \in E$ tel que $x = g(y)$, donc $f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = 0$ car $f \circ g = 0$, donc $x \in \ker(f)$. Ceci étant vrai pour tout vecteur $x \in \mathrm{Im}\,(g)$, on a bien établi l'inclusion $\mathrm{Im}\,(g) \subset \ker(f)$.

2. a) Il suffit de développer les deux membres de l'égalité à prouver. D'une part :

$$(f-\alpha \mathrm{Id}_E) \circ (f - \beta \mathrm{Id}_E) = f^2 - (\alpha+\beta)f + \alpha\beta \mathrm{Id}_E,$$

et de même pour l'autre membre.

b) Soit v un vecteur propre de f, et i un indice tel que v est vecteur propre associé à la valeur propre λ_i. En appliquant autant de fois que nécessaire la question précédente :

$$(f-\lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (f-\lambda_p \mathrm{Id}_E) = F_i \circ (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E),$$

où F_i est la composée :

$$F_i = (f-\lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \ldots (f-\lambda_{i-1} \mathrm{Id}_E) \circ (f-\lambda_{i+1} \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (f-\lambda_p \mathrm{Id}_E).$$

Et ainsi :

$$(f-\lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (f-\lambda_p \mathrm{Id}_E)(v) = F_i(f(v) - \lambda_i v) \overset{(i)}{=} F_i(0) \overset{(ii)}{=} 0,$$

la relation (i) provenant de ce que v est vecteur propre de f associé à λ_i, et la relation (ii) de la linéarité de F_i en tant que composée d'endomorphismes.

(c) Puisque f est diagonalisable, il existe une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f. Pour $x \in E$, notons $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ la décomposition de x dans une telle base. Par linéarité de $F = (f-\lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (f-\lambda_p \mathrm{Id}_E)$, on obtient :

$$F(x) = \sum_{i=1}^n x_i F(v_i) \overset{b)}{=} \sum_{i=1}^n x_i \times 0 = 0,$$

ce qui est le résultat attendu.

Remarque : on vient de montrer que le polynôme $\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)$ est un polynôme annulateur de f.

3. a) Pour tous réels a et b :

$$a(f-\alpha\mathrm{Id}_E)+b(f-\beta\mathrm{Id}_E)=(a+b)f-(a\alpha+b\beta)\mathrm{Id}_E.$$

Il suffit donc de trouver (a,b) tels que $\begin{cases} a+b=0 \\ -(a\alpha+b\beta)=1 \end{cases}$. On substitue $b=-a$ dans la deuxième égalité, ce qui impose $a(\beta-\alpha)=1$, et donc $a=\frac{1}{\beta-\alpha}$ (bien défini car α et β sont supposés distincts) et $b=\frac{-1}{\beta-\alpha}$. Réciproquement, on vérifie facilement par substitution que le couple :

$$(a,b)=\frac{1}{\beta-\alpha}(1,-1)$$

convient.

b) Soit $x\in E$. Alors, d'après la question précédente :

$$x=(f-\alpha\mathrm{Id}_E)(ax)+(f-\beta\mathrm{Id}_E)(bx),$$

et donc x est bien somme d'un vecteur de $\mathrm{Im}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)$ et d'un vecteur de $\mathrm{Im}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)$. On a ainsi justifié l'inclusion $E\subset\mathrm{Im}(f-\alpha\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Im}(f-\beta\mathrm{Id}_E)$, l'inclusion réciproque étant évidente (l'image d'un endomorphisme est un sous-espace vectoriel de l'espace sur lequel il agit ; une somme de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel du même espace), l'égalité s'en déduit.

c) On obtient directement l'inclusion $\mathrm{Im}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)\subset\ker(f-\alpha\mathrm{Id}_E)$ en appliquant le résultat de la question 1 à la relation $(\star)$. Grâce à la question 2(*a*), la relation $(\star)$ s'écrit encore $(f-\beta\mathrm{Id}_E)\circ(f-\alpha\mathrm{Id}_E)=0$, et à nouveau par la question 1, l'inclusion $\mathrm{Im}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)\subset\ker(f-\beta\mathrm{Id}_E)$ s'en déduit.

d) De la question précédente, on déduit l'inclusion :

$$\mathrm{Im}\,(f-\alpha\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Im}\,(f-\beta\mathrm{Id}_E)\subset\ker(f-\alpha\mathrm{Id}_E)+\ker(f-\beta\mathrm{Id}_E),$$

et donc, par la question b :

$$E\subset\ker(f-\alpha\mathrm{Id}_E)+\ker(f-\beta\mathrm{Id}_E),$$

et comme à la question b), l'inclusion réciproque est évidente, d'où l'égalité :

$$E=\ker(f-\alpha\mathrm{Id}_E)+\ker(f-\beta\mathrm{Id}_E).$$

e) L'égalité proposée est une conséquence évidente de la question précédente si l'un des deux sous-espaces $\ker(f-\alpha\mathrm{Id}_E)$ ou $\ker(f-\beta\mathrm{Id}_E)$ est trivial (réduit au vecteur nul). Sinon, ce sont des sous-espaces propres de f associés à des valeurs propres distinctes, ce qui justifie qu'ils soient en somme directe, et donc d'après la question d) que leur somme directe soit égale à E.

f) La question e) montre que la somme (directe) des sous-espaces propres de f est égale à l'espace tout entier, ce qui montre que l'endomorphisme f est diagonalisable (là encore, si l'un des deux est trivial, seul l'autre mérite le nom de sous-espace propre, mais cela ne change pas l'argument).

4. a) Puisque f^2 est diagonalisable, il existe une base dans laquelle sa matrice est une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont les λ_i ; et on peut faire en sorte que les différents exemplaires de chaque éventuelle valeur propre multiple soient consécutifs. Soit A la matrice de f dans une telle base. Ainsi, $A^2=D$, donc $AD=A^3=DA$: les matrices A et D commutent. Or, la matrice DA est obtenue en multipliant chaque ligne de A par la valeur propre située sur la ligne correspondante de D ; et de même pour DA en remplaçant ligne par colonne. De l'égalité $AD=DA$, on déduit que tous les coefficients de A en position (i,j) tel que les coefficients diagonaux de D en positions i et j soient distincts, sont nuls : la matrice A est diagonale par blocs, et chaque bloc correspond à l'action de F sur un certain sous-espace propre de f^2. Ces sous-espaces F_k sont bien stables par f.

b) Par un calcul direct :

$$(f_k+\mu_k\mathrm{Id}_{F_k})\circ(f_k-\mu_k\mathrm{Id}_{F_k})=f_k^2-\mu_k^2\mathrm{Id}_{F_k}=f_k^2-\lambda_k\mathrm{Id}_{F_k},$$

et cet endomorphisme est nul puisque F_k est le sous-espace propre de f_k^2 associé à λ_k, donc f_k^2 agit comme $\lambda_k\mathrm{Id}$ sur ce sous-espace.

c) Il suffit d'appliquer le résultat de la question 3 (à f_k, endomorphisme de F_k, pous les deux scalaires $\pm\mu_k$), en constatant que les λ_k étant non nuls, μ_k et $-\mu_k$ sont distincts pour tout k.

d) Toujours en appliquant le résultat de la question 3, on obtient $F_k = F_k^+ \oplus F_k^-$. De plus, en tant que sous-espaces propres d'un endomorphisme diagonalisable (à savoir f_k^2), la somme des F_k est directe et vaut E :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k^+ \oplus F_k^-$$

Comme à la question 3, tous les sous-espaces F_k^+ et F_k^- non triviaux sont des sous-espaces propres de f (associés respectivement aux valeurs propres $-\mu_k$ et μ_k, sous l'hypothèse implicite que les λ_k sont deux à deux distincts, ce qui est nécessaire pour que la définition des F_k soit saine), et quel que soit le nombre de sous-espaces triviaux dans l'affaire, la relation précédente montre que la somme directe des sous-espaces propres de f est égale à E : donc f est diagonalisable.

Exercice de probabilités.

1. Si $n \geq N$, alors T_n est à valeurs dans l'ensemble des entiers compris entre 1 et n, et si $n > N$, alors T_n est à valeurs dans l'ensemble des entiers compris entre 1 et N (on aurait pu simplement dire que T_n est à valeurs dans l'ensemble des entiers compris entre 1 et $\min\{n, N\}$). En effet, T_n est par définition à valeurs entières positives (il s'agit d'un nombre de cases), il ne peut être nul car $n \geq 1$, donc au moins une boule a été lancée, donc au moins une case est occupée. De plus, $T_n \leq n$, puisque lors du lancer de n boules, au plus n cases sont occupées, et $T_n \leq N$, puisque le nombre total de cases est N. Ainsi, T_n prend des valeurs entières comprises entre 1 et $\min\{n, N\}$. Et toute telle valeur peut être prise : pour réaliser l'événement $(T_n = k)$ où $1 \leq k \leq \min\{n, N\}$, il suffit que k boules aient été placées dans des cases deux à deux distinctes, et les $n - k$ autres boules dans la première de ces cases.

2. D'après la question précédente, la variable T_1 est à valeurs dans $\{1\}$, d'où sa loi :

$$P(T_1 = 1) = 1,$$

et son espérance :

$$E(T_1) = 1.$$

La variable T_2 est à valeurs dans $\{1, 2\}$. Les événements $(T_2 = 1)$ et $(T_2 = 2)$ sont contraires. De plus, si on note X_i la variable aléatoire donnant le numéro de la case dans laquelle tombe la i-ème boule, pour $i \in \{1, 2\}$, alors :

$$(T_2 = 1) = \bigcup_{i=1}^{N} (X_1 = i) \cap (X_2 = i).$$

Les événements de cette réunion sont deux à deux incompatibles, donc, par σ-additivité, puis indépendance des lancers :

$$P(T_2 = 1) = \sum_{i=1}^{N} P(X_1 = i \cap X_2 = i) \overset{\text{indépendance}}{=} \sum_{i=1}^{N} P(X_1 = i) P(X_2 = i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N},$$

d'où, par passage à l'événement contraire, $P(T_2 = 2) = \frac{N-1}{N}$. On a ainsi déterminé la loi de T_2, et son espérance :

$$E(T_2) = P(T_2) = 1 + 2P(T_2 = 2) = \frac{1}{N} + \frac{2(N-1)}{N} = \frac{2N-1}{N} = 2 - \frac{1}{N}.$$

3. Pour le calcul de $P(T_n = 1)$, on procède comme à la question précédente dans le cas $n = 2$. On note X_i la variable aléatoire donnant le numéro de case de la i-ème boule, on obtient l'égalité :

$$(T_n = 1) = \bigcup_{j=1}^{N} \bigcap_{i=1}^{n} (X_i = j),$$

puis par σ-additivité, indépendance mutuelle des lancers, et la loi uniforme de chaque lancer :

$$P(T_n = 1) = \sum_{j=1}^{N} \prod_{i=1}^{n} P(X_i = j) = \sum_{j=1}^{N} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{N} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N^n} = \frac{1}{N^{n-1}}.$$

On passe d'abord à l'événement $(T_n = n)$. Il y a deux cas : si $n > N$ c'est un événement impossible, d'où sa probabilité $P(T_n = n) = 0$; si $n \leq N$, on reformule l'expérience comme le choix d'un n-uplet à valeurs dans $[\![1, N]\!]$, et l'hypothèse d'indépendance des lancers fait que tous ces n-uplets sont obtenus équiprobablement. Or, il y en a N^n. L'événement $(T_n = n)$ est réalisé si et seulement si le n-uplet obtenu est à valeurs deux à deux distinctes ; or le nombre de n-uplets à valeurs deux à deux distinctes parmi N valeurs est $\frac{N!}{(N-n)!}$. Ainsi, par équiprobabilité :

$$P(T_n = n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n > N \\ \frac{N!}{(N-n)!N^n} \text{ si } n \leq N \end{cases}$$

ce qui est cohérent avec les résultats obtenus dans les cas $n = 1$ et $n = 2$ aux questions précédentes.
Pour décrire l'événement $(T_n = 2)$ (dans le cas $N \geq 2$, car pour $N = 1$, il s'agit d'un événement impossible), on envisage toutes les paires possibles de cases dans lesquelles toutes les boules pourraient tomber $\mathcal{P} = \{(j_1, j_2) \in [\![1, N]\!]^2 / j_1 < j_2\}$. Pour chaque telle paire, on distingue le nombre n_1 de boules tombant dans la case j_1 et le nombre n_2 de boules tombant dans la case j_2 qui doivent satisfaire $n_1 + n_2 = n$ (afin que toutes les boules soient bien tombées dans l'une de ces deux cases), et $1 \leq n_1$, $1 \leq n_2$ (afin qu'il y ait bien deux cases non vides, et pas une seule). L'événement $(T_n = 2)$ est alors la réunion :

$$(T_n = 2) = \bigcup_{(j_1,j_2) \in \mathcal{P}} \bigcup_{n_1=1}^{n-1} \mathcal{E}_{j_1,j_2,n_1},$$

où $\mathcal{E}_{j_1,j_2,n_1}$ est l'événement « toutes les boules sont tombées dans l'une des deux cases j_1 ou j_2, dont n_1 dans la case j_1 ». La réunion ainsi formée est constituée d'événements deux à deux incompatibles, d'où, toujours en s'appuyant sur le modèle d'équiprobabilité décrit ci-dessus (on note $\#E$ le cardinal d'un ensemble E) :

$$P(T_n = 2) = \sum_{j_1,j_2 \in \mathcal{P}} \sum_{n_1=1}^{n-1} \frac{\#(\mathcal{E}_{j_1,j_2,n_1})}{N^n}$$

Dénombrons donc l'événement $\mathcal{E}_{j_1,j_2,n_1}$; c'est-à-dire dénombrons les n-uplets à valeurs dans $\{j_1, j_2\}^2$ dont n_1 composantes valent j_1. Choisir un tel n-uplet revient à choisir les n_1 composantes valant j_1 (les $n - n_1$ autres valant j_2), il y en a donc $\binom{n}{n_1}$ (coefficient binomial « n_1 parmi n »). Et donc :

$$\begin{aligned} P(T_n = 2) &= \sum_{j_1,j_2 \in \mathcal{P}} \sum_{n_1=1}^{n-1} \frac{\binom{n}{n_1}}{N^n} \\ &= \frac{1}{N^n} \sum_{(j_1,j_2) \in \mathcal{P}} (2^n - 2) \\ &= \frac{(2^n - 2)\#\mathcal{P}}{N^n} \end{aligned}$$

et puisque $\#\mathcal{P}$ vaut $\frac{1}{2}N(N-1)$:

$$P(T_n = 2) = \begin{cases} 0 \text{ si } N = 1 \\ \frac{(2^{n-1}-1))(N-1)}{N^{n-1}} \text{ si } N \geq 2 \end{cases}$$

Là encore, c'est cohérent avec le résultat de la question 2.

4. On fixe un entier $k \geq 1$. On utilise la formule des probabilités totales pour l'événement $(T_{n+1} = k)$ vis-à-vis du système complet d'événements $(T_n = j)$, $j \in \mathbf{N}$ (où T_n est vu comme le nombre de cases occupées à l'issue des n premiers lancers parmi les $n+1$ nécessaires pour l'expérience définissant T_{n+1}). Dans ce système complet d'événements, on a ajouté une infinité d'événements impossibles pour simplifier l'écriture. On obtient :

$$P(T_{n+1} = k) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(T_{n+1} = k \cap T_n = j).$$

Or, au vu de la situation considérée, le $n+1$-ème lancer tombe soit dans une case déjà occupée, et dans ce cas $T_n = T_{n+1}$, soit dans une case vide, et dans ce cas $T_{n+1} = T_n + 1$. En tout cas, l'événement $(T_{n+1} = k) \cap (T_n = j)$ est impossible sauf éventuellement pour $j \in \{k-1, k\}$, d'où :

$$P(T_{n+1} = k) = P(T_n = k \cap T_{n+1} = k) + P(T_n = k-1 \cap T_{n+1} = k).$$

En utilisant la définition des probabilités conditionnelles :

$$P(T_{n+1}=k)=P_{(T_n=k)}(T_{n+1}=k)\times P(T_n=k)+P_{(T_n=k-1)}(T_{n+1}=k)\times P(T_n=k-1).$$

Les deux probabilités conditionnelles se calculent facilement par équiprobabilité : sachant que $(T_n=k)$, l'événement $(T_{n+1}=k)$ est réalisé si et seulement si la $n+1$-ème boule tombe dans l'une des k cases déjà occupées, ce qui est de probabilité $\frac{k}{N}$; et de même, $P_{(T_n=k-1)}(T_{n+1}=k)=\frac{N-k+1}{N}$. En substituant, on obtient bien :

$$P(T_{n+1}=k)=\frac{k}{N}P(T_n=k)+\frac{N-k+1}{N}P(T_n=k-1).$$

5. a) Par définition, G_n est la série entière $G_n(t)=\sum_{k\geq 0}P(T_n=k)t^n$. Puisque la variable T_n prend un nombre fini de valeurs, cette série entière est un polynôme, donc est définie sur $\mathbf{R}$.

b) On sait que $E(T_n)=G_n'(1)$.

c) Soit $x\in\mathbf{R}$. On multiplie la relation $(\star\star)$ par x^k, et on somme pour k allant de 1 à l'infini les relations obtenues (il s'agit en fait d'une somme finie, toujours car T_n et T_{n+1} sont à valeurs dans des ensembles finis). On obtient :

$$G_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{N}P(T_n=k)x^k+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{N-(k-1)}{N}P(T_n=k-1)x^k.$$

Or, $G_n(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(T_n=k)x^k$, donc par dérivation (d'un polynôme, rappelons-le), $G_n'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}kP(T_n=k)x^{k-1}$, et donc, en multipliant par x de part et d'autre :

$$xG_n'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}kP(T_n=k)x^k.$$

Un petit changement d'indice dans l'expression de $G_n'(x)$ donne encore $G_n'(x)=\sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)P(T_n=k-1)x^{k-2}$, d'où, en multipliant par x^2, et en remarquant que le terme manquant d'indice $k=1$ est nul, l'événement $(T_n=0)$ étant impossible :

$$x^2G_n'(x)=\sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)P(T_n=k-1)x^k=\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)P(T_n=k-1)x^k.$$

Ainsi, par substitution dans l'expression de $G_{n+1}(x)$:

$$G_{n+1}(x)=\frac{x}{N}G_n'(x)+\sum_{k=1}^{+\infty}P(T_n=k-1)x^k-\frac{x^2}{N}G_n'(x)=\frac{x-x^2}{N}G_n'(x)+xG_n(x).$$

On dérive la relation précédente, puis on l'évalue en $x=1$ (sachant que pour toute série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, $G(1)=1$) :

$$G_{n+1}'(x)=\frac{x-x^2}{N}G_n''(x)+\frac{1-2x}{N}G_n'(x)+xG_n'(x)+G_n(x),$$

puis :

$$E(T_{n+1})=-\frac{1}{N}E(T_n)+E(T_n)+1=\left(1-\frac{1}{N}\right)E(T_n)+1.$$

On procède ensuite par récurrence sur n pour montrer $E(T_n)=N\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)$. Au rang $n=1$, il s'agit de la relation $E(T_1)=1$ obtenue à la question 2. Supposons l'expression de $E(T_n)$ vraie à un certain rang n. Alors, au rang $n+1$:

$$\begin{aligned}E(T_{n+1})&=\left(1-\frac{1}{N}\right)E(T_n)+1\\&\overset{HR}{=}\left(1-\frac{1}{N}\right)N\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)+1\\&=(N-1)-\frac{(N-1)^{n+1}}{N^n}+1\\&=N-N\frac{(N-1)^{n+1}}{N^{n+1}}\\&=N\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+1}\right).\end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, on a bien obtenu l'expression attendue pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ (et c'est cohérent avec le résultat de la question 2 pour $n = 2$).

6. a) Par définition, Y_k est le nombre des X_i valant k.

b) Pour étudier la loi de Y_k, on considère chaque lancer de boule comme une épreuve de Bernoulli, un succès étant l'obtention de la case k et un échec toute autre issue. Ces épreuves sont mutuellement indépendantes (indépendance des lancers), et de même paramètre $\frac{1}{N}$ (équiprobabilité des cases pour chaque lancer). Ainsi, Y_k compte le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre, donc suit la loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{N})$. Par définition de Z_k, $(Z_k = 0)$ est égal à l'événement $(Y_k = 0)$:

$$P(Z_k = 0) = P(Y_k = 0) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n,$$

et l'événement $(Z_k = 1)$ est l'événement contraire, donc :

$$P(Z_k = 1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

c) Les variables $(Z_k)_k$ ne sont pas mutuellement indépendantes : l'événement $\bigcap_{k=1}^{N}(Z_k = 0)$ est impossible (toutes les cases ne peuvent pas être vides, une boule au moins ayant été lancée), donc de probabilité nulle, tandis que le produit des probabilités $\prod_{k=1}^{N} P(Z_k = 0)$ n'est pas nul en tant que produit de réels non nuls.

d) Par définition, $T_n = \sum_{k=1}^{N} Z_k$, d'où, par linéarité de l'espérance :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{N} E(Z_k).$$

Puisque chaque Z_k suit une loi de Bernoulli, $E(Z_k) = P(Z_k = 1)$, et par substitution, on obtient :

$$E(T_n) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right),$$

comme précédemment.