

Exercice I

1. Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[\alpha, \beta]$, alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta - \alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\alpha + k \frac{\beta - \alpha}{n}\right) \text{ (méthode des rectangles, bornes de gauche).}$$

Par inégalité triangulaire, on a : $\left| \frac{\beta - \alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} H\left(\alpha + k \frac{\beta - \alpha}{n}\right) \right| \leq \frac{\beta - \alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| H\left(\alpha + k \frac{\beta - \alpha}{n}\right) \right|$

D'où par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} H(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |H(x)| dx.$$

2. En appliquant cette inégalité à H^2 , on a : $\left| \int_{\alpha}^{\beta} H^2(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |H^2(x)| dx$ ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} (P^2(x) - Q^2(x) + 2iP(x)Q(x)) dx \right| &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |H(x)|^2 dx \\ \left| \int_{\alpha}^{\beta} (P^2(x) - Q^2(x)) dx + 2i \int_{\alpha}^{\beta} P(x)Q(x) dx \right| &\leq \int_{\alpha}^{\beta} (P^2(x) + Q^2(x)) dx \\ \left(\int_{\alpha}^{\beta} (P^2(x) - Q^2(x)) dx \right)^2 + 4 \left(\int_{\alpha}^{\beta} P(x)Q(x) dx \right)^2 &\leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} (P^2(x) + Q^2(x)) dx \right)^2 \\ 4 \left(\int_{\alpha}^{\beta} P(x)Q(x) dx \right)^2 &\leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} (P^2(x) + Q^2(x)) dx \right)^2 - \left(\int_{\alpha}^{\beta} (P^2(x) - Q^2(x)) dx \right)^2 \\ 4 \left(\int_{\alpha}^{\beta} P(x)Q(x) dx \right)^2 &\leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} (P^2(x) + Q^2(x)) dx + \int_{\alpha}^{\beta} (P^2(x) - Q^2(x)) dx \right) \times \\ &\quad \left(\int_{\alpha}^{\beta} (P^2(x) + Q^2(x)) dx - \int_{\alpha}^{\beta} (P^2(x) - Q^2(x)) dx \right) \\ 4 \left(\int_{\alpha}^{\beta} P(x)Q(x) dx \right)^2 &\leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} 2P^2(x) dx \right) \times \left(\int_{\alpha}^{\beta} 2Q^2(x) dx \right) \\ \left| \int_{\alpha}^{\beta} P(x)Q(x) dx \right| &\leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} P^2(x) dx \times \int_{\alpha}^{\beta} Q^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} P(x)Q(x) dx \right| - \left(\int_{\alpha}^{\beta} P^2(x) dx \times \int_{\alpha}^{\beta} Q^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq 0$$

3. Remarquons que $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} < 1$ donc $q > 1$, et la fonction $\varphi : b \mapsto \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall b \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(b) = b^{q-1} - a$. Donc φ' est croissante et s'annule sur $\mathbb{R}_+$ pour $b = a^{\frac{1}{q-1}}$; son signe s'en déduit.

$\varphi\left(a^{\frac{1}{q-1}}\right) = \frac{a^p}{p} + \frac{a^{\frac{q}{q-1}}}{q} - a^{1+\frac{1}{q-1}} = \frac{a^p}{p} + a^{\frac{q}{q-1}} \left(\frac{1}{q} - 1\right)$. Mais comme $\frac{q-1}{q} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, on a $\frac{q}{q-1} = p$,

d'où $\varphi\left(a^{\frac{1}{q-1}}\right) = a^p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) = 0$.

D'où le tableau :

b	0	$\frac{1}{a^{q-1}}$	$+\infty$
$\varphi'(b)$	-	0	+
$\varphi(b)$	$\frac{a^p}{p}$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que pour tout b de $\mathbb{R}_+$, $\varphi(b) \geq 0$, et comme a est arbitrairement fixé dans $\mathbb{R}_+$:

$$\text{Pour tous réels positifs ou nuls } a \text{ et } b : ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Le tableau de variations de φ montre que l'égalité a lieu si et seulement si $b = \frac{1}{a^{q-1}}$, auquel cas $b^q = \frac{q}{a^{q-1}} = a^p$.

$$\text{L'égalité a lieu si et seulement si } a^p - b^q = 0.$$

4. Remarquons que si $A = 0$, alors $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^p dx = 0$ et comme la fonction $x \mapsto |f(x)|^p$ est continue et positive sur $[\alpha, \beta]$, c'est la fonction nulle sur ce segment. On a alors $f = 0$, et les deux quantités à comparer sont nulles. Même chose si $B = 0$.

Sinon, en posant $a = \frac{f(x)}{A}$ et $b = \frac{g(x)}{B}$ et en appliquant ce qui précède aux réels positifs $|a|$ et $|b|$, on a :

$$\forall x \in [\alpha, \beta], \frac{|f(x)g(x)|}{AB} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{B^q} \text{ d'où en prenant les intégrales :}$$

$$\frac{1}{AB} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p} \frac{\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^p dx}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|^q dx}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ et comme } AB > 0,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)g(x)| dx \leq AB. \text{ On a donc, } a \text{ fortiori, grâce au 1. :}$$

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Lorsque AB n'est pas nul, il y a égalité si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{1}{AB} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)g(x)| dx = \frac{1}{p} \frac{\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^p dx}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|^q dx}{B^q} & (1) \\ \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x) dx \right| = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)g(x)| dx & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{B^q} - \frac{|f(x)g(x)|}{AB} \right) dx = 0$ et comme l'intégrande est une fonction continue, positive, elle est nulle; d'après le 3. on alors $|a|^p = |b|^q$, d'où $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(x)|^p = \lambda |g(x)|^q$.

D'autre part, (2) $\Leftrightarrow \forall x \in [\alpha, \beta]$, $f(x)g(x)$ a un argument constant.

Donc, oui les deux quantités peuvent être égales.

Exercice II

1. $t \mapsto \vec{i}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|\vec{i}(t)\|^2 = 1 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $2\vec{i}(t) \cdot \frac{d\vec{i}}{dt}(t) = 0$.

$t \mapsto \vec{j}(t)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\vec{i}(t) \cdot \vec{j}(t) = 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $\vec{i}(t) \cdot \frac{d\vec{j}}{dt}(t) + \frac{d\vec{i}}{dt}(t) \cdot \vec{j}(t) = 0$.

On obtient des relations analogues par permutations circulaires sur $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, d'où

$$\begin{cases} \vec{i}(t) \cdot \frac{d\vec{i}}{dt}(t) = \vec{j}(t) \cdot \frac{d\vec{j}}{dt}(t) = \vec{k}(t) \cdot \frac{d\vec{k}}{dt}(t) = 0 \\ \frac{d\vec{i}}{dt}(t) \cdot \vec{j}(t) = -\vec{i}(t) \cdot \frac{d\vec{j}}{dt}(t) = c(t) \\ \frac{d\vec{j}}{dt}(t) \cdot \vec{k}(t) = -\vec{j}(t) \cdot \frac{d\vec{k}}{dt}(t) = a(t) \\ \frac{d\vec{k}}{dt}(t) \cdot \vec{i}(t) = -\vec{k}(t) \cdot \frac{d\vec{i}}{dt}(t) = b(t) \end{cases}$$

Décomposons le vecteur $\frac{d\vec{i}}{dt}(t)$ dans la base orthonormale $(\vec{i}(t), \vec{j}(t), \vec{k}(t))$:

$$\frac{d\vec{i}}{dt}(t) = \left(\frac{d\vec{i}}{dt}(t) \cdot \vec{i}(t) \right) \vec{i}(t) + \left(\frac{d\vec{i}}{dt}(t) \cdot \vec{j}(t) \right) \vec{j}(t) + \left(\frac{d\vec{i}}{dt}(t) \cdot \vec{k}(t) \right) \vec{k}(t) = c(t) \vec{j}(t) - b(t) \vec{k}(t).$$

On obtient de même, par permutations circulaires :

$$\frac{d\vec{j}}{dt}(t) = a(t) \vec{k}(t) - c(t) \vec{i}(t) \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{k}}{dt}(t) = b(t) \vec{i}(t) - a(t) \vec{j}(t).$$

En notant $\omega(t)$ le vecteur $a(t) \vec{i}(t) + b(t) \vec{j}(t) + c(t) \vec{k}(t)$, on vérifie que

$$\boxed{\frac{d\vec{i}}{dt}(t) = \omega(t) \wedge \vec{i}(t), \quad \frac{d\vec{j}}{dt}(t) = \omega(t) \wedge \vec{j}(t), \quad \frac{d\vec{k}}{dt}(t) = \omega(t) \wedge \vec{k}(t).}$$

Si $\vec{V}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors ses coordonnées dans la base $(\vec{i}(t), \vec{j}(t), \vec{k}(t))$ le sont, puisque par exemple $\xi(t) = \vec{V}(t) \cdot \vec{i}(t)$.

On a alors : $\frac{d\vec{V}}{dt}(t) = \xi'(t) \vec{i}(t) + \xi(t) \frac{d\vec{i}}{dt}(t) + \eta'(t) \vec{j}(t) + \eta(t) \frac{d\vec{j}}{dt}(t) + \zeta'(t) \vec{k}(t) + \zeta(t) \frac{d\vec{k}}{dt}(t)$ donc

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt}(t) = (\xi'(t) + \zeta(t)b(t) - \eta(t)c(t)) \vec{i}(t) + (\eta'(t) + \xi(t)c(t) - \zeta(t)a(t)) \vec{j}(t) + (\zeta'(t) + \eta(t)a(t) - \xi(t)b(t)) \vec{k}(t)}$$

$$\mathbf{2.} \quad \text{En faisant dans le système différentiel} \quad \begin{cases} Ap'(t) + (C - B)q(t)r(t) = 0 & L_1 \\ Bq'(t) + (A - C)r(t)p(t) = 0 & L_2 \\ Cr'(t) + (B - A)p(t)q(t) = 0 & L_3 \end{cases}$$

la combinaison $pL_1 + qL_2 + rL_3$, on obtient :

$$Ap(t)p'(t) + Bq(t)q'(t) + Cr(t)r'(t) + ((C - B) + (A - C) + (B - A))p(t)q(t)r(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow Ap(t)p'(t) + Bq(t)q'(t) + Cr(t)r'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{A}{2}p^2(t) + \frac{B}{2}q^2(t) + \frac{C}{2}r^2(t) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, Ap^2(t) + Bq^2(t) + Cr^2(t) = c_1$$

Pour $t = 0$, $c_1 = Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2 > 0$, donc $c_1 \in \mathbb{R}_+^*$.

En faisant la combinaison $ApL_1 + BqL_2 + CrL_3$, on obtient :

$$A^2p(t)p'(t) + B^2q(t)q'(t) + C^2r(t)r'(t) + (A(C - B) + B(A - C) + C(B - A))p(t)q(t)r(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow A^2p(t)p'(t) + B^2q(t)q'(t) + C^2r(t)r'(t) = 0 \text{ et donc on obtient de même :}$$

$\exists c_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, A^2p^2(t) + B^2q^2(t) + C^2r^2(t) = c_2$ et on constate avec la valeur en 0 que $c_2 \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} Ap^2(t) + Bq^2(t) + Cr^2(t) = c_1 \\ A^2p^2(t) + B^2q^2(t) + C^2r^2(t) = c_2 \end{cases}}$$

3. Comme A, B, C et $\frac{c_2}{c_1}$ sont strictement positifs,

$$\boxed{\mathcal{E}_1 \text{ et } \mathcal{E}_2 \text{ sont des ellipsoïdes de centre } O.}$$

L'application $t \mapsto (x(t), y(t))$ définit la projection orthogonale sur le plan $(O; \vec{i}(t), \vec{j}(t))$ de la courbe décrite par le point $M(t)$ dans le repère $(O, \vec{i}(t), \vec{j}(t), \vec{k}(t))$. On obtient une équation cartésienne d'une courbe la contenant en éliminant z entre les équations de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

$$\begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 & L_1 \\ A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \frac{c_2}{c_1} & L_2 \end{cases}$$

Avec la combinaison $C L_1 - L_2$, on a : $A(C - A)x^2 + B(C - B)y^2 = C - \frac{c_2}{c_1}$.

Comme $A(C - A) > 0$ et $B(C - B) > 0$, on a une ellipse de centre O , d'axes $(O; \vec{i}(t))$ et $(O; \vec{j}(t))$ (l'énoncé admet que la courbe existe, donc nécessairement $\frac{c_2}{c_1} < C$).

De même, l'application $t \mapsto (y(t), z(t))$ définit la projection orthogonale sur le plan $(O; \vec{j}(t), \vec{k}(t))$ de la courbe décrite par le point $M(t)$ dans le repère $(O, \vec{i}(t), \vec{j}(t), \vec{k}(t))$. On obtient une équation cartésienne d'une courbe la contenant en éliminant x entre les équations de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, et avec la combinaison $L_2 - A L_1$, on a :

$$B(B - A)y^2 + C(C - A)z^2 = \frac{c_2}{c_1} - A.$$

Comme $B(B - A) > 0$ et $C(C - A) > 0$, on a une ellipse de centre O , d'axes $(O; \vec{j}(t))$ et $(O; \vec{k}(t))$ (l'énoncé admet que la courbe existe, donc nécessairement $\frac{c_2}{c_1} > A$).

En faisant la combinaison $L_2 - A L_1$, on obtient que la projection orthogonale sur le plan $(O; \vec{i}(t), \vec{k}(t))$ est incluse dans la courbe d'équation $-A(B - A)x^2 + C(C - B)z^2 = \frac{c_2}{c_1} - B$.

Comme $-A(B - A) < 0$ et $C(C - B) > 0$, on a une hyperbole de centre O , d'axes $(O; \vec{i}(t))$ et $(O; \vec{k}(t))$,

si $\frac{c_2}{c_1} \neq B$. Sinon, on obtient deux droites sécantes d'équations $z = \pm \sqrt{\frac{A(B - A)}{C(C - B)}} x$; ces droites sont les asymptotes de l'hyperbole précédente.

4. Notons $\vec{N}$ le vecteur supposé constant $A p(t)\vec{i}(t) + B q(t)\vec{j}(t) + C r(t)\vec{k}(t)$.

$\mathcal{E}_1$ a pour équation dans le repère $(O, \vec{i}(t), \vec{j}(t), \vec{k}(t))$: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$, donc le plan tangent $\Pi(t)$ en

$M(t)$ a pour équation dans ce repère : $Ax(t)x + By(t)y + Cz(t)z = 1$.

Un vecteur normal est donc $Ax(t)\vec{i}(t) + By(t)\vec{j}(t) + Cz(t)\vec{k}(t) = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \vec{N}$.

Soit d la distance de O au plan $\Pi(t)$: $d = \frac{1}{\sqrt{A^2x^2(t) + B^2y^2(t) + C^2z^2(t)}} = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}$.

Le plan $\Pi(t)$ a une direction fixe, et sa distance à O est fixe; comme $t \mapsto \Pi(t)$ est continue, $\Pi(t)$ reste fixe dans le repère $(O, \vec{i}(t), \vec{j}(t), \vec{k}(t))$; c'est l'un des deux plans de vecteur normal $\vec{N}$ et situé à distance $\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}$ de O .

Exercice III

$$1. \quad \begin{cases} y''(x) = f(x) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y'(x) = c + \int_a^x f(s) ds \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y(x) = \int_a^x \left(c + \int_a^t f(s) ds \right) dt \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y(x) = c(x - a) + \int_a^x \left(\int_a^t f(s) ds \right) dt \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} a \leq t \leq x \\ a \leq s \leq t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq s \leq x \\ s \leq t \leq x \end{cases}$ et $(s, t) \mapsto f(s)$ est continue sur le domaine d'intégration, donc par la formule de Fubini, $\int_a^x \left(\int_a^t f(s) ds \right) dt = \int_a^x \left(\int_s^x f(s) dt \right) ds = \int_a^x (x - s) f(s) ds$.

$$\text{Donc } \begin{cases} y''(x) = f(x) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y(x) = c(x - a) + \int_a^x (x - s) f(s) ds \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Déterminons } c : c(b - a) + \int_a^b (b - s) f(s) ds = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{b - a} \int_a^b (b - s) f(s) ds.$$

On a donc une solution unique : $y(x) = -\frac{x-a}{b-a} \int_a^b (b-s) f(s) ds + \int_a^x (x-s) f(s) ds$.

Par la relation de Chasles : $y(x) = -\frac{x-a}{b-a} \int_a^x (b-s) f(s) ds - \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (b-s) f(s) ds + \int_a^x (x-s) f(s) ds$

$$y(x) = -\frac{1}{b-a} \int_a^x ((x-a)(b-s) - (b-a)(x-s)) f(s) ds - \frac{1}{b-a} \int_x^b (x-a)(b-s) f(s) ds$$

Comme $(x-a)(b-s) - (b-a)(x-s) = -xs - ab + bs + ax = (s-a)(b-x)$, on a encore :

$$y(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^x (s-a)(x-b) f(s) ds + \frac{1}{b-a} \int_x^b (s-b)(x-a) f(s) ds.$$

Avec les notations de l'énoncé, on a donc $G_1(s, x) = \frac{(s-a)(x-b)}{b-a}$ et $G_2(s, x) = \frac{(s-b)(x-a)}{b-a}$. Remarquons que ces polynômes prennent la même valeur pour $s = x$, à savoir $\frac{(x-b)(x-a)}{b-a}$. On peut mettre $y(x)$ sous la forme $y(x) = \int_a^b G(s, x) f(s) ds$ en posant

$$G : (s, x) \mapsto \begin{cases} \frac{(s-a)(x-b)}{b-a} & \text{si } a \leq s \leq x; \\ \frac{(s-b)(x-a)}{b-a} & \text{si } x \leq s \leq b. \end{cases}$$

2. On a $T_1 \cup T_2 = C$ et $T_1 \cap T_2 = \{(x, x), x \in [a, b]\}$ donc H est une application de C dans $\mathbb{R}$ si les valeurs attribuées à ses restrictions à T_1 et T_2 coïncident sur $T_1 \cap T_2$. On vérifie que $H(x, x) = (a-x)(b-x)$ dans les deux cas, donc :

H est bien définie sur C .

On peut mettre $H(x, y)$ pour tout (x, y) de C sous la forme : $H(x, y) = (a - \min(x, y))(b - \max(x, y))$. Comme les fonctions $(x, y) \mapsto \min(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \max(x, y)$ sont continues sur C , H est continue sur C par opérations élémentaires.

Comme C est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$, son image par H est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$, et en particulier, H admet un minimum absolu sur C . Comme par exemple $H(x, x) < 0$ pour tout x de $]a, b[$, ce minimum est strictement négatif.

H admet une valeur minimale strictement négative sur C .

Notons ∂C la frontière du pavé C . Pour tout (x, y) de ∂C , $H(x, y) = 0$ donc le minimum absolu ne peut être atteint en un point frontière.

Soit $\overset{\circ}{T}_1$ l'ensemble T_1 privé de ses points frontières. $\overset{\circ}{T}_1$ est un ouvert, et H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{\circ}{T}_1$, puisque c'est une fonction polynôme. Cherchons les points critiques de H sur $\overset{\circ}{T}_1$:

$$\forall (x, y) \in \overset{\circ}{T}_1, \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -(a-y) > 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = -(b-x) < 0 \end{cases} \text{ donc pas de point critique, et le minimum absolu ne peut être}$$

atteint en un point de cet ensemble.

On montre de même que le minimum absolu ne peut être atteint en un point de $\overset{\circ}{T}_2$.

Donc ce minimum est atteint en un point de la diagonale $\{(x, x), x \in [a, b]\}$.

$$\forall x \in]a, b[, \quad H(x, x) = (a-x)(b-x) = x^2 - (a+b)x + ab = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{4} \geq -\frac{(b-a)^2}{4}$$

et $H(x, x) = -\frac{(b-a)^2}{4}$ si et seulement si $x = \frac{a+b}{2}$.

Le minimum de H sur C est $-\frac{(b-a)^2}{4}$, atteint au centre de C .

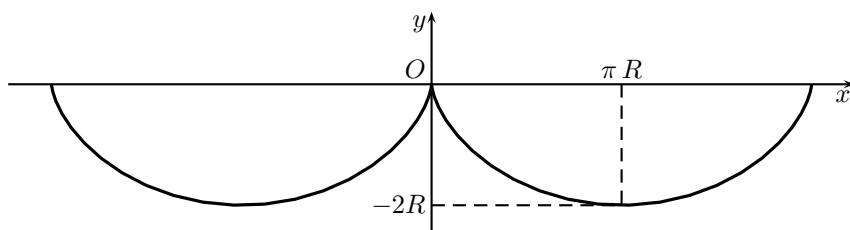
Exercice IV

1. Pour k dans $\{-1, 1\}$ et θ dans un intervalle approprié : $\begin{cases} x(\theta + 2k\pi) = 2k\pi R + x(\theta) \\ y(\theta + 2k\pi) = y(\theta) \end{cases}$ et $\begin{cases} x(-\theta) = -x(\theta) \\ y(-\theta) = y(\theta) \end{cases}$

donc on peut réduire l'étude à $[0, \pi]$. Pour obtenir Γ , on complètera l'arc γ obtenu sur cet intervalle par son symétrique γ' par rapport à l'axe $(O; \vec{j})$, par l'image de γ par la translation de vecteur $-2\pi R\vec{i}$ et par l'image de γ' par la translation de vecteur $2\pi R\vec{i}$.

$\forall \theta \in [0, \pi]$, $\begin{cases} x'(\theta) = R(1 - \cos \theta) = 2R \sin^2 \frac{\theta}{2} \geq 0 \\ y'(\theta) = -R \sin \theta = -2R \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \leq 0 \end{cases}$ et on voit que le vecteur unitaire $\vec{\tau}(\theta) = \sin \frac{\theta}{2} \vec{i} - \cos \frac{\theta}{2} \vec{j}$ dirige la tangente en tout point de Γ . En particulier, pour $\theta = 0$ (point stationnaire) la tangente est verticale.

θ	0	π
$x'(\theta)$	0	+
$x(\theta)$	0	$\nearrow \pi R$
$y'(\theta)$	0	-
$y(\theta)$	0	$\searrow -2R$



2. Sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, la longueur $s(\theta)$ de l'arc de Γ entre O et $M(\theta)$ coïncide avec l'abscisse curviligne sur Γ d'origine O . On a obtenu : $\frac{d\vec{M}}{d\theta} = 2R \sin \frac{\theta}{2} \vec{\tau}(\theta)$ avec $\vec{\tau}(\theta)$ unitaire. Comme $2R \sin \frac{\theta}{2} \geq 0$ pour tout θ de $[0, 2\pi]$, on a $\frac{ds}{d\theta} = \left\| \frac{d\vec{M}}{d\theta} \right\| = 2R \sin \frac{\theta}{2}$.

On a donc, sur $[0, 2\pi]$: $s(\theta) = \int_0^\theta 2R \sin \frac{u}{2} du = 2R \left[-2 \cos \frac{u}{2} \right]_0^\theta = 4R (1 - \cos \frac{\theta}{2})$.

Comme la fonction obtenue est paire, l'expression $4R (1 - \cos \frac{\theta}{2})$ est encore valable pour la longueur de l'arc entre O et $M(\theta)$ si $\theta \in [-2\pi, 0]$.

$$\forall \theta \in [-2\pi, 2\pi], s(\theta) = 4R (1 - \cos \frac{\theta}{2}).$$

3. On a $\vec{\tau}(\theta) \cdot \vec{j} = -\cos \frac{\theta}{2} \leq 0$ pour tout θ de $[-\pi, \pi]$, donc

$$\vec{\tau}(\theta) = \sin \frac{\theta}{2} \vec{i} - \cos \frac{\theta}{2} \vec{j}.$$

Notons (x_P, y_P) les coordonnées de $P(\theta)$. On a $P(\theta) = M(\theta) + 4R \cos \frac{\theta}{2} \vec{\tau}(\theta)$ donc

$$\begin{cases} x_P = R(\theta - \sin \theta) + 4R \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = R(\theta - \sin \theta) + 2R \sin \theta = R(\theta + \sin \theta) \\ y_P = R(\cos \theta - 1) - 4R \cos^2 \frac{\theta}{2} = R(\cos \theta - 1) - 2R(\cos \theta + 1) = R(-\cos \theta - 3) \end{cases}$$

On constate que $M(\theta + \pi)$ a pour coordonnées $\begin{cases} x(\theta + \pi) = R(\theta + \pi + \sin \theta) = x_P + \pi R \\ y(\theta + \pi) = R(-\cos \theta - 1) = y_P + 2R \end{cases}$

Lorsque θ parcourt le segment $[-\pi, \pi]$, $M(\theta + \pi)$ parcourt l'arc de Γ correspondant à l'intervalle $[0, 2\pi]$, donc l'arche de droite, et $P(\theta)$ décrit l'arche qui s'en déduit par la translation de vecteur $-\pi R\vec{i} - 2R\vec{j}$.

$P(\theta)$ décrit l'image de $\Gamma \cap (x \geq 0)$ par la translation de vecteur $-\pi R\vec{i} - 2R\vec{j}$.

4. On a : $\sigma(t) = s(\theta(t)) = 4R \left(1 - \cos \frac{\theta(t)}{2}\right)$ et $\vec{\tau}(\theta(t)) \cdot \vec{j} = -\cos \frac{\theta(t)}{2}$, donc

$$\boxed{\vec{\tau}(\theta(t)) \cdot \vec{j} = \frac{\sigma(t)}{4R} - 1.}$$

Il s'agit de résoudre le problème de Cauchy :
$$\begin{cases} \sigma'' + \frac{g}{4R}\sigma = g \\ \sigma(0) = \sigma_0 \\ \sigma'(0) = 0 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$\sigma_h(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{4R}} t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{g}{4R}} t\right) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Une solution particulière de l'équation complète est : $\sigma_p(t) = 4R$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc $\{\sigma : t \mapsto 4R + A \cos \omega t + B \sin \omega t, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

$\sigma(0) = \sigma_0 \Leftrightarrow 4R + A = \sigma_0$ d'où $A = \sigma_0 - 4R$.

$\sigma'(t) = -A \sin \omega t + B \cos \omega t$ donc $\sigma'(0) = 0 \Leftrightarrow B = 0$. L'unique solution est donc :

$$\boxed{\sigma : t \mapsto 4R + (\sigma_0 - 4R) \cos \omega t.}$$