

e3a PSI B (4 heures) un corrigé

Exercice 1.

1. $x = \frac{1}{4}y^2$ est une équation cartésienne de Γ .
2. Γ est une parabole d'axe Ox . Son foyer F est sur cet axe et il existe $a > 0$ tel que $F_1 = (a, 0)$. Sa directrice D a alors pour équation $x = -a$. Comme $\Gamma = \{M / d(M, F) = d(M, D)\}$ et comme $(a, 2\sqrt{a}) \in \Gamma$, on a $2\sqrt{a} = 2a$ et ainsi $a = 1$. Γ est donc la parabole de foyer $F = (1, 0)$ et de directrice d'équation $x = -1$.
3. La tangente à Γ en $M(t)$ passe par $M(t)$ et est dirigée par $M'(t) = (2t, 2)$. Une équation cartésienne de cette tangente est donc

$$T_t : (x - t^2) - t(y - 2t) = 0$$

4. Le projeté orthogonal $P(t)$ de F sur T_t est le point de coordonnées (x, y) tel que

$$\begin{cases} (x - t^2) - t(y - 2t) = 0 \\ t(x - 1) + y = 0 \end{cases}$$

($P(t)$ est sur T_t et $\overrightarrow{FP(t)}$ est orthogonal à T_t). On a donc (résolution aisée) $P(t) = (0, t)$. La podaire de Γ par rapport au foyer est donc l'axe des ordonnées.

5. 5.1. De même, projeté orthogonal $P(t)$ de O sur T_t est le point de coordonnées (x, y) tel que

$$\begin{cases} (x - t^2) - t(y - 2t) = 0 \\ tx + y = 0 \end{cases}$$

On résoud aisément ce système pour obtenir un système d'équations paramétriques de la podaire :

$$X(t) = -\frac{t^2}{t^2 + 1}, \quad Y(t) = \frac{t^3}{1 + t^2}$$

- 5.2. On a

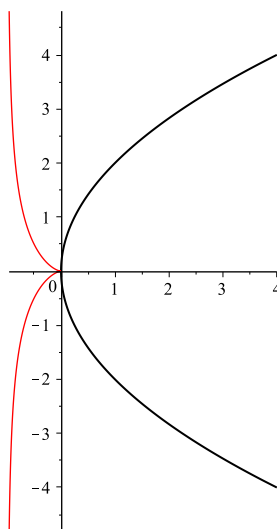
$$X'(t) = -\frac{2t}{(1 + t^2)^2} \quad \text{et} \quad Y'(t) = \frac{t^2(t^2 + 3)}{(t^2 + 1)^2}$$

Il y a annulation simultanée des dérivées quand $t = 0$ seulement. En $t = 0$ on a donc un point stationnaire. Comme

$$X(t) = -t^2 + o_0(t^3) \quad \text{et} \quad Y(t) = t^3 + o_0(t^3)$$

On obtient que la tangente est dirigée par $(-1, 0)$ et que l'on a un point de rebroussement de première espèce (les dérivées seconde et troisième en 0, qui sont $(-2, 0)$ et $(0, 6)$, sont indépendantes).

Quand $t \rightarrow +\infty$, $X(t) \rightarrow -1$ et $Y(t) \rightarrow +\infty$ et $x = -1$ (la directrice de la parabole) est asymptote à la courbe. L'étude est la même en $-\infty$.



Exercice 2.

Partie A.

- Notons $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+(nx)^2}$. $f_n(0) = 1$ est le terme général d'une série grossièrement divergente. Si $x \neq 0$, $f_n(x) = O(1/n^2)$ est le terme général d'une série absolument convergente. Finalement, $\sum(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ et

$$D = \mathbb{R}^*$$

- Si $0 < x < y$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) > f_n(y)$. En sommant, on a donc $f(x) > f(y)$. f est ainsi strictement décroissante sur I .
- On utilise le théorème de régularité des sommes de séries de fonctions.
 - $\forall n$, $f_n \in \mathcal{C}^1(I)$ et $f'_n : x \mapsto -\frac{2n^2x}{(1+(nx)^2)^2}$.
 - $\sum(f_n)$ converge simplement sur I .
 - $\forall [a, b] \subset I$, $\forall x \in [a, b]$, $\forall n \geq 1$, $|f'_n(x)| \leq \frac{2n^2b}{(1+(na)^2)^2}$. Ainsi $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{2n^2b}{(1+(na)^2)^2} = O(1/n^2)$ est le terme général d'une série absolument convergente ce qui nous indique que $\sum(f'_n)$ converge normalement sur tout segment de I .

Le théorème s'applique et indique que $f \in \mathcal{C}^1(I)$ avec

$$\forall x > 0, f'(x) = -2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+(nx)^2)^2}$$

Remarque : on obtient ainsi que f' est négative sur I ce qui redonne la décroissance.

- On veut maintenant utiliser le théorème de double limite.
 - Chaque f_n est de limite nulle en $+\infty$.
 - $\forall x \geq 1$, $\forall n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2}$. Ainsi $\|f_n\|_{\infty, [1, +\infty[} \leq \frac{1}{1+n^2}$ est le terme général d'une série absolument convergente ce qui nous indique que $\sum(f_n)$ converge normalement sur $[1, +\infty[$ et donc au voisinage de $+\infty$.

On conclut que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

5. 5.1 Fixons $x > 0$. La fonction $g_x : t \mapsto \frac{1}{1+t^2x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. En particulier,

$$\forall p \geq 1, \forall t \in [p, p+1], g_x(p+1) \leq g_x(t) \leq g_x(p)$$

En intégrant cette inégalité sur $[p, p+1]$, on obtient

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1+(p+1)^2x^2} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leq \frac{1}{1+p^2x^2}$$

5.2 Fixons $x > 0$ et sommions ces inégalités :

$$\forall n \geq 1, \sum_{p=1}^n \frac{1}{1+(p+1)^2x^2} \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{1+p^2x^2}$$

$t \mapsto \frac{1}{1+t^2x^2}$ a pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \frac{1}{x} \arctan(tx)$. Les quantités précédentes admettent une limite quand $n \rightarrow +\infty$ et ce passage à la limite donne

$$f(x) - \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\pi}{2x} \leq f(x)$$

ou encore

$$\frac{\pi}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x^2} + \frac{\pi}{2x}$$

Majorant et minorant étant tous deux équivalents à $\frac{\pi}{2x}$ quand $x \rightarrow 0$, on en déduit que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{2x}$$

6. L'allure de la courbe de f est celle d'une branche d'hyperbole.

Partie B.

- 1.** Soit $x > 0$. $h_x : t \mapsto \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, prolongeable par continuité en 0 (par la valeur $1/x$) et dominée par $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ (car $x > 0$ et par croissances comparées entre puissance et exponentielle puisque $|h_x(t)| \leq \frac{1}{e^{xt}-1} \sim e^{-xt}$). h_x est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\varphi(x)$ existe donc a fortiori.
- 2.** Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
 - $\forall x > 0, t \mapsto \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
 - $\forall t > 0, x \mapsto \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}$ est continue sur I .
 - $\forall [a, b] \subset I, \forall t > 0, \left| \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1} \right| \leq \frac{|\sin(t)|}{e^{at}-1}$. Comme ci-dessus, le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Le théorème indique donc que $\varphi \in \mathcal{C}^0(I)$.

3. 3.1 On a

$$\forall a > 0, \int_0^a e^{-kxt} \sin(t) dt = \text{Im} \left(\int_0^a e^{(i-kx)t} dt \right) = \text{Im} \left(\left[\frac{e^{(i-kx)t}}{i-kx} \right]_0^a \right)$$

Le terme de droite admet une limite quand $a \rightarrow +\infty$ et J_k existe donc avec

$$J_k = -\text{Im} \left(\frac{1}{i-kx} \right) = \frac{1}{1+k^2x^2}$$

3.2 On a (somme géométrique de raison $e^{-xt} \in [0, 1[$)

$$\forall x > 0, \forall t > 0, \frac{\sin(t)}{e^{xt} - 1} = \sin(t)e^{-xt} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kxt} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(t)e^{-kxt}$$

On veut maintenant utiliser un théorème d'interversion somme-intégrale (on travaille à x fixé).

- $g_k : \sin(t)e^{-kxt}$ est le terme général d'une série de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers $t \mapsto \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- On a (inégalité triangulaire et majoration par la somme infinie)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t > 0, \left| \sum_{k=1}^n g_k(t) \right| \leq \frac{|\sin(t)|}{e^{xt} - 1}$$

on a vu que le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On peut ainsi appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\varphi(x) = \sum_{k \geq 1} J_k = f(x)$$

Exercice 3.

1. 1.1 x étant dans $F^\perp$ est orthogonal à tous les e_i et on a alors $\|x\|^2 = 0$.

1.2 On a donc montré que $F^\perp = \{0\}$. Mais comme F est de dimension finie, le cours nous dit que $E = F \oplus F^\perp$. On en déduit que $E = F$ est de dimension finie (inférieure à n).

2. Appliquons (P) aux e_k :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \|e_k\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_k | e_i)^2 = \|e_k\|^4 + \sum_{i \neq k} (e_k | e_i)^2$$

Comme on suppose $\|e_k\| \geq 1$, on a $\|e_k\|^2 \leq \|e_k\|^4$ et l'identité précédente nous apprend que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i \neq k} (e_k | e_i)^2 \leq 0$$

Les $(e_k | e_i)^2$ étant positifs, la somme ne peut être ≤ 0 que si tous les termes sont nuls. On a donc

$$\forall k, \forall i \neq k, (e_k | e_i) = 0$$

ce qui montre que $\mathcal{B}$ est une famille orthogonale. (P) appliquée avec e_k donne maintenant

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \|e_k\|^2 = \|e_k\|^4$$

et comme $\|e_k\| > 0$, on en déduit que $\|e_k\| = 1$. $\mathcal{B}$ est finalement une famille orthonormale. Comme cette famille engendre $E = F$, c'est une base orthonormale de E (le caractère orthonormal entraîne le caractère libre).

3. 3.1 Comme $\mathcal{B}$ engendre $F = E$, l'hypothèse supplémentaire d'indépendance nous apprend que $\mathcal{B}$ est une base de E .

3.2 On a deux relations :

$$\forall x, y \in E, (x|y) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

3.3 Soient $x, y \in E$. On a

$$\begin{aligned}
 (x|y) &= \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n (x+y|e_i)^2 - \sum_{i=1}^n (x-y|e_i)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n ((x|e_i) + (y|e_i))^2 - ((x|e_i) - (y|e_i))^2 \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (4(x|e_i)(y|e_i)) \\
 &= \sum_{i=1}^n (x|e_i)(y|e_i)
 \end{aligned}$$

3.4 Les formules de produit matriciel donnent

$$\forall i, j, (A^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} A_{k,j} = \sum_{k=1}^n (e_i|e_k)(e_k|e_j) = (e_i|e_j)$$

la dernière égalité provenant de la question précédente (et de la symétrie du produit scalaire). On a donc $A^2 = A$ (égalité de leurs coefficients).

3.5 Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \ker(a)$. On a alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j = 0$$

et, avec l'expression de $A_{i,j}$ et la bilinéarité du produit scalaire,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, (e_i | \sum_{j=1}^n x_j e_j) = (e_i | x) = 0$$

x est donc orthogonal à tous les éléments d'une base de E et est donc nul. On a montré que

$$\ker(a) = \{0\}$$

3.6 A est donc inversible et en multipliant $A^2 = A$ par A^{-1} on obtient $A = I_n$ c'est à dire

$$\forall i, j, (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$$

Ceci signifie exactement que $\mathcal{B}$ est une famille (et donc ici une base) orthonormale.

Exercice 4.

1. Soit $X \in \mathbb{C}^n$ avec $X \neq 0$. $Y = \frac{X}{\|X\|}$ étant de norme ≤ 1 , on a (la borne sup étant un majorant) $\|AY\| \leq \mathcal{N}(A)$ ce qui donne, $\|AX\| \leq \|X\|\mathcal{N}(A)$. L'inégalité reste vraie si $X = 0$.
2. La boule unité fermée est un compact de $\mathbb{C}^n$ (c'est un fermé borné en dimension finie). De plus $X \mapsto \|AX\|$ est continue. Cette fonction admet donc un maximum sur la boule unité fermée et il existe $Y \in \mathbb{C}^n$ avec $\|Y\| \leq 1$ tel que $\mathcal{N}(A) = \|AY\|$. Comme $\|AY\| \leq \mathcal{N}(A)\|Y\|$ (question précédente), on a $\mathcal{N}(A) \leq \mathcal{N}(A)\|Y\|$.
- Si $A \neq 0$ alors $\mathcal{N}(A) \neq 0$ et $\|Y\| \geq 1$. Comme $\|Y\| \leq 1$ on a donc $\|Y\| = 1$. En posant $X_0 = Y$, on a donc $\frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|} = \|AY\| = \mathcal{N}(A)$.

- Sinon, tout $X_0 \neq 0$ convient (car $\mathcal{N}(A) = 0$ et $AX_0 = 0$ pour tout X_0).
Dans tous les cas, on a trouvé un X_0 convenable.

3. Appliquons la question précédente avec $A = I_n$: on trouve $\mathcal{N}(I_n) = \frac{\|X_0\|}{\|X_0\|} = 1$.
4. Le résultat demandé traduit l'équivalence des normes $\mathcal{N}$ et $\text{cal}N_\infty$ qui est acquise puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie (n^2).
5. C'est immédiat puisqu'une partie est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule. On peut aussi dire par inégalité triangulaire que

$$\forall A \in \mathcal{G}, \mathcal{N}(A) \leq \mathcal{N}(A - I_n) + \mathcal{N}(I_n) \leq 2$$

6. **6.1** $\mathcal{G}$ étant un sous-groupe est stable par produit et par passage à l'inverse. Le résultat demandé en découle immédiatement (si on veut ergoter, on prouve le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ à partir de A et A^{-1} qui sont dans $\mathcal{G}$).
- 6.2** A étant dans $GL_n(\mathbb{C})$, 0 n'est pas valeur propre de A et $\lambda \neq 0$. On montre par récurrence sur k que $A^k X = \lambda^k X$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 - Initialisation : $A^0 X = X$ et le résultat est vrai pour $k = 0$.
 - Hérédité : soit $k \geq 1$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang $k - 1$. On a alors

$$A^k X = A(A^{k-1} X) = \lambda^{k-1} AX = \lambda^k X$$

et le résultat est donc vrai au rang k .
De plus $AX = \lambda X$ donne, en multipliant par A^{-1} et en divisant par λ , $A^{-1}X = \lambda^{-1}X$.
Une récurrence semblable indique alors que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{-k}X = \lambda^{-k}X$. On a donc

$$\forall k \in \mathbb{Z}, A^k X = \lambda^k X$$

- 6.3** Comme $A^k \in \mathcal{G}$, A^k est dans la boule de rayon 1 de centre I_n et donc $\mathcal{N}(A^k - I_n) \leq 1$. La question 1 indique alors que

$$\|(A^k - I_n)X\| \leq \|X\|$$

On a donc $\|(\lambda^k - 1)X\| \leq \|X\|$. Avec l'homogénéité de la norme et en divisant par $\|X\| > 0$ (X est vecteur propre et donc non nul) on obtient

$$|\lambda^k - 1| \leq 1$$

Par seconde forme de l'inégalité triangulaire, on a enfin

$$||\lambda^k| - 1| \leq |\lambda^k - 1| \leq 1$$

- 6.4** Si $|\lambda| > 1$ alors $|\lambda^k| \rightarrow +\infty$ quand $k \rightarrow \infty$ ce que ne permet pas la question précédente. Si $|\lambda| < 1$, on obtient de même une contradiction en faisant $k \rightarrow -\infty$. Finalement,

$$|\lambda| = 1$$

- 6.5** On a $|e^{i\alpha} - 1|^2 = (\cos(\alpha) - 1)^2 + \sin^2(\alpha) = 2(1 - \cos(\alpha))$. Appliquons ceci avec $\alpha = k\theta$:

$$|\lambda^k - 1|^2 = |2(1 - \cos(k\theta))| \leq 1$$

A fortiori, on a

$$|1 - \cos(k\theta)| \leq 1/2 \leq 1$$

On en déduit que $\cos(k\theta) \in [0, 2]$ et comme un cosinus est ≤ 1 ,

$$\cos(k\theta) \in [0, 1]$$

6.6 Les éléments de $[-\pi, \pi]$ ayant un cosinus ≥ 0 sont ceux de $[-\pi/2, \pi/2]$ et donc

$$\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

On a alors $2\theta \in [-\pi, \pi]$ et comme son cosinus est ≥ 0 , on trouve de même que $2\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ c'est à dire

$$\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$$

On prouve par récurrence que $q \in \mathbb{N}$ que $\theta \in [-\pi/2^q, \pi/2^q]$ est vrai pour tout $q \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : c'est vrai par hypothèse sur θ pour $q = 0$.

- Hérédité : soit $q \geq 1$ tel que le résultat est vrai jusqu'au rang $q - 1$. On a alors $2^{q-1}\theta \in [-\pi, \pi]$ et son cosinus est positif donc $2^{q-1}\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. On en déduit le résultat au rang q .

6.7 En passant à la limite $q \rightarrow +\infty$, il vient que $\theta = 0$ et donc que $\lambda = 1$. 1 est la seule valeur propre possible. Or, toute matrice complexe a au moins une valeur propre. Ainsi,

$$\text{Sp}(A) = \{1\}$$

7. 7.1 Notons u_A l'endomorphisme canoniquement associé à A . $A \in \text{Sp}(A)$ et il existe donc un vecteur $e_1 \neq 0$ tel que $u_A(e_1) = e_1$. (e_1) est libre et, par théorème de la base incomplète, il existe e_2 tel que (e_1, e_2) soit une base de $\mathbb{C}^2$. Dans cette base, u_A est représenté par une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$. T et A sont alors semblable et donc 1 est l'unique valeur propre de T ce qui indique que $b = 1$. De plus $a \neq 0$ car sinon T serait diagonale et A diagonalisable. Finalement, A est semblable à une matrice triangulaire de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec a non nul.

7.2 On montre par une récurrence non détaillée que

$$\forall m \in \mathbb{N}, T^m = \begin{pmatrix} 1 & ma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \mathcal{N}_\infty(T^m) = \max(m|a|, 1)$$

7.3 Pour m assez grand ($m \geq 1/|a|$), on a $\mathcal{N}_\infty(T^m) = m|a| \rightarrow +\infty$ quand $m \rightarrow +\infty$. Ainsi

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{N}_\infty(T^m) = +\infty$$

Avec la question 4, on en déduit que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(T^m) = +\infty$$

Or, il existe une matrice inversible Q telle que $Q^{-1}AQ = T$ et donc (récurrence) $Q^{-1}A^mQ = T^m$. On a alors

$$\mathcal{N}(T^m) = \mathcal{N}(Q^{-1}A^mQ) \leq \mathcal{N}(Q)\mathcal{N}(A^m)\mathcal{N}(Q^{-1})$$

Comme $\mathcal{N}(Q) > 0$ et $\mathcal{N}(Q^{-1})$, on en déduit (en divisant par ces quantités) que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(A^m) = +\infty$$

7.4 Ceci contredit le fait que $\mathcal{G}$ est borné (puisque les A^m sont dans $\mathcal{G}$). On a donc montré, par l'absurde, que A est diagonalisable.

7.5 Tout élément de $\mathcal{G}$ est diagonalisable d'unique valeur propre 1. I_n est donc le seul élément possible dans $\mathcal{G}$. Comme on a un sous-groupe, il est non vide et

$$\mathcal{G} = \{I_n\}$$