CONCOURS COMMUN MINES-PONTS-TELECOM.-SUP'AERO
OPTION M - 1ÈRE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

- L'énoncé de cette épreuve particulière aux candidats de l'option M comporte 5 pages -

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

Dans une partie O, sont rassemblés des notations, et divers résultats utiles par la suite, dont on ne demande pas la démonstration.

La partie II peut être traitée en admettant les résultats de la partie I.

La partie III peut être traitée en admettant les résultats des parties I et II.

GENERALITES

0.1. Les notations $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+^*$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels, le corps des nombres rationnels, le corps des nombres réels, l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

0.2. Une suite dans un ensemble X est une application de $\mathbb{N}$ dans X.

0.3. Si A et B sont des parties de $\mathbb{R}$ telles que : $A \subset B$, la notation $B - A$ désigne le complémentaire de A dans B.

0.4. Un ensemble A est dit dénombrable (resp. strictement dénombrable) s'il existe une injection (resp. une bijection) de A dans $\mathbb{N}$; par exemple $\mathbb{Q}$ est strictement dénombrable et toute partie de $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

0.5. Soit I un intervalle borné non vide de $\mathbb{R}$, de bornes α, β ($\alpha \leq \beta$). On note ℓ (I) (longueur de I) le réel $\beta - \alpha$.

0.6. Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on note d_A la distance sur A définie par : $d_A(x,y) = |x-y|$ (pour x, y dans A) et T_A la topologie de l'espace métrique (A, d_A).

Si S est un segment de $\mathbb{R}$, on appelle intervalle « ouvert de S » tout intervalle de $\mathbb{R}$, inclus dans S, et ouvert pour T_S. Par exemple, $[0, \frac{1}{2}[$ est un intervalle « ouvert de $[0,1]$ ».

0.7. Dans les parties II et III du problème, on note E l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ des applications continues du segment $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

0.8. Pour une suite $n \mapsto u_n$ dans $\mathbb{R}$, on rappelle l'équivalence des énoncés suivants :

(i) La série de terme général u_n est absolument convergente.

(ii) Pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente.

S'il en est ainsi, on a de plus : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$

Soient A un ensemble dénombrable, et $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de nombres réels indexée par A. On dit que la série $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ est absolument convergente (expression à prendre en bloc) si :

- A est fini ;
- A est strictement dénombrable, et il existe une bijection σ de $\mathbb{N}$ sur A telle que la série de terme général $x_{\sigma(n)}$ soit absolument convergente. (Alors, pour toute bijection τ de $\mathbb{N}$ sur A, la série de terme général $x_{\tau(n)}$ est absolument convergente, et l'on a :
$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\tau(n)}$).

S'il en est ainsi, le réel $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$ est défini :

- de façon usuelle si A est fini ;
- par : $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$, si A est strictement dénombrable, et si σ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur

On admet enfin le résultat suivant (avec les mêmes notations) :

Si la série $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ est absolument convergente, si $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille de parties de formant une partition de A, avec Λ dénombrable, alors :

- pour tout λ dans Λ, la série $(x_\alpha)_{\alpha \in A_\lambda}$ est absolument convergente.
- la série $\left(\sum_{\alpha \in A_\lambda} x_\alpha \right)_{\lambda \in \Lambda}$ est absolument convergente.
- on a l'égalité : $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{\alpha \in A_\lambda} x_\alpha \right)$.

PARTIE I

Dans cette partie, on fixe des réels a, b tels que : $a < b$, on note S le segment $[a,b]$, et $\mathcal{I}_S$ l'ensemble des intervalles « ouverts de S » (cf. 0.6.).

I.1. (a) Soient ω une partie de S, ouverte pour T_S, et x un élément de ω.
Montrer qu'il existe un élément de $\mathcal{I}_S$, qui contient $\{x\}$ et qui est inclus dans ω.
On note $I_\omega(x)$ la réunion de tous les intervalles éléments de $\mathcal{I}_S$, qui contiennent $\{x\}$, et qui sont inclus dans ω.
Montrer que $I_\omega(x)$ est encore un tel intervalle.

(b) Soient ω, Ω des parties de S, ouvertes pour T_S, telles que : $\omega \subset \Omega$, et x un élément de ω. Montrer : $I_\omega(x) \subset I_\Omega(x)$, et donc : $\ell(I_\omega(x)) \leqslant \ell(I_\Omega(x))$.

(c) Soient : $n \mapsto \omega_n$ une suite de parties de S, ouvertes pour T_S, telle que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\omega_n \subset \omega_{n+1})$; $\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$ [de sorte que ω est ouvert pour T_S] ; x un élément de ω.

On note α, β $(\alpha \leqslant \beta)$ les bornes de $I_\omega(x)$.

Montrer qu'il existe un entier p tel que : $]\alpha, \beta[\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}\,;\, n \geqslant p} I_{\omega_n}(x)$, et

../

en déduire : $\lim_{n \geqslant p \,;\, n \to +\infty} \ell(I_{\omega_n}(x)) = \ell(I_\omega(x))$.

(d) On se propose de démontrer que, si ω est une partie de S, ouverte pour T_S, ω s'écrit comme union dénombrable d'intervalles « ouverts de S » deux à deux disjoints.
Soient x, y des éléments de ω tels que : $I_\omega(x) \cap I_\omega(y) \neq \emptyset$. Montrer l'égalité : $I_\omega(x) = I_\omega(y)$.
On introduit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur ω définie par : $u \mathcal{R} v \Longleftrightarrow I_\omega(u) = I_\omega(v)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On note : $A = A_\omega$ l'ensemble quotient $\frac{\omega}{\mathcal{R}}$, et s la surjection canonique de ω sur A.
Montrer qu'il existe (et de façon unique) une application J^ω de A dans $\mathcal{J}_S$: $\alpha \to J^\omega_\alpha$ telle que : $(\forall x \in \omega)$ $(J^\omega_{s(x)} = I_\omega(x))$. En déduire : $\omega = \bigcup_{\alpha \in A_\omega} J^\omega_\alpha$.
Montrer que A est dénombrable [On pourra exhiber une injection de A dans Q], et conclure.

I.2. (a) Soit ω une partie de S, ouverte pour T_S. On conserve les notations de I.1 (d).
Montrer que la série $(\ell(J^\omega_\alpha))_{\alpha \in A_\omega}$ est absolument convergente, et que : $\sum_{\alpha \in A_\omega} \ell(J^\omega_\alpha) \leqslant b-$
On pose alors : $\mu(\omega) = \sum_{\alpha \in A_\omega} \ell(J^\omega_\alpha)$. Montrer : $\mu(\omega) = \ell(\omega)$, si ω est un intervalle « ouvert de S ».

(b) Soient ω, Ω des parties de S, ouvertes pour T_S, telles que : $\omega \subset \Omega$. Montrer : $\mu(\omega) \leqslant \mu(\Omega)$.

I.3. On admet le résultat suivant :
Si ω_1, ω_2 sont des parties de S, ouvertes pour T_S, on a : $\mu(\omega_1 \cup \omega_2) \leqslant \mu(\omega_1) + \mu(\omega_2)$.

(a) Soient $n \mapsto \omega_n$ une suite de parties de S, ouvertes pour T_S, telle que :
$(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\omega_n \subset \omega_{n+1})$; $\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$. Montrer : $\mu(\omega) = \lim_{n \to +\infty} \mu(\omega_n)$.

(b) Soient $n \mapsto \Omega_n$ une suite de parties de S, ouvertes pour T_S, et : $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$.
On suppose la série de terme général $\mu(\Omega_n)$ convergente. Montrer :
$\mu(\Omega) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\Omega_n)$.

I.4. (a) Soient U, V des parties de S, ouvertes pour T_S, telles que $V \subset U$, et ε un élément de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe une partie W de S, ouverte pour T_S, telle que :
(i) $V \cup W = U$ (ii) $\mu(W) \leqslant \mu(U) - \mu(V) + \varepsilon$.

(b) Soit $n \mapsto \omega_n$ une suite de parties de S, ouvertes pour T_S, telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (\omega_{n+1} \subset \omega_n)$$

et que : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \omega_n = \phi$. Montrer : $\lim_{n \to +\infty} \mu(\omega_n) = 0$.

[En raisonnant par l'absurde, on sera amené à utiliser I.2. (b), I.3, et I.4. (a)].

PARTIE II

S désigne ici le segment $[0,1]$ de $\mathbb{R}$. On considère une suite : $n \mapsto f_n$ dans $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, un élément f de E tels que :

$$(1) \quad (\forall x \in [0,1]) \ (f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x))$$

Soient n, m des entiers positifs, ε un élément de $\mathbb{R}_+^*$. On note :

$A_{n,\varepsilon}$ l'ensemble $\{x \in [0,1] \mid |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}$.

$B_{m,\varepsilon}$ l'ensemble $\bigcup_{n \geq m} A_{n,\varepsilon}$

C_ε l'ensemble $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} B_{p,\varepsilon}$

II.1. (a) Montrer que les ensembles $A_{n,\varepsilon}$ et $B_{m,\varepsilon}$ définis ci-dessus sont des parties de S, ouvertes pour T_S.

(b) Montrer : $C_\varepsilon = \emptyset$, ainsi que : $\lim_{m \to +\infty} \mu(B_{m,\varepsilon}) = 0$ [Utiliser I.4.(b)].

En déduire le résultat suivant :

Quels que soient les réels strictement positifs ε et β, il existe un entier nature tel que l'on ait : $\mu(B_{m_o,\varepsilon}) \leqslant \beta$ et :

$$(\forall x \in S - B_{m_o,\varepsilon}) \ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geqslant m_o \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon).$$

On pourra noter $m_o(\varepsilon, \beta)$ un tel entier naturel m_o.

II.2. On considère un réel strictement positif α. Pour n entier, on pose : $\varepsilon_n = 2^{-n}$; $\beta_n = \alpha . 2^{-n-1}$; $\gamma_n = m_o(\varepsilon_n, \beta_n)$; $D_n = B_{\gamma_n, \varepsilon_n}$, et aussi : $E_\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$.

Montrer qu'il existe un compact K_α de $S = [0,1]$ qui vérifie :

(i) $\mu(S - K_\alpha) \leqslant \alpha$

(ii) $(\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*) \ (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) \ (\forall x \in S)(n \geqslant N \text{ et } x \in K_\alpha \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \lambda)$.

PARTIE III

S désigne toujours le segment $[0,1]$ de $\mathbb{R}$.

III.1. Soient ω une partie de S, ouverte pour T_S, et g un élément de E.

...

(a) On reprend les notations de I.1.(d). Si : $\alpha \in A_\omega$, J_α^ω est un intervalle « ouvert de
On pose :

$i_g(\alpha) = 0$ si J_α^ω est vide ; $i_g(\alpha) = \int_c^d g(x)\,dx$ si : J_α^ω est non vide, de bornes c, d $(c \leqslant d)$.

Montrer que la série $(i_g(\alpha))_{\alpha \in A_\omega}$ est absolument convergente.

On pose alors : $\int_\omega g(x)\,dx = \sum_{\alpha \in A_\omega} i_g(\alpha)$.

Démontrer l'inégalité : $\left| \int_\omega g(x)\,dx \right| \leqslant \mu(\omega).(\sup_{t\in\omega} |g(t)|)$.

(b) On pose par définition : $\int_{S-\omega} g(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx - \int_\omega g(x)\,dx$.

Démontrer l'inégalité : $\left| \int_{S-\omega} g(x)\,dx \right| \leqslant (1-\mu(\omega)).(\sup_{t\in S-\omega} |g(t)|)$.

III.2. On considère une suite $n \mapsto f_n$ dans E, un élément f de E vérifiant l'hypothèse (1) de la deuxième partie, ainsi que :
(2) Il existe un réel positif M tel que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in S)\ (|f_n(x)| \leqslant M)$.

Montrer les égalités : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0$, et :
$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$.

[Utiliser III.1.(b) et II.2.].