

Propriétés asymptotiques des solutions d'une équation différentielle

Partie I

1. Nommons provisoirement v cette fonction (dans les questions suivantes, c'est $A(u)$) et posons $M = \|k\| \|u\|$.

v est bien définie sur J : pour t fixé dans J , l'application $\tau \mapsto k(t, \tau)u(\tau) \frac{1}{\tau^2}$ est définie, continue sur $[t, \infty[$ et la majoration $|k(t, \tau)u(\tau) \frac{1}{\tau^2}| \leq \frac{M}{\tau^2}$ assure son intégrabilité sur cet intervalle.

v est bornée sur J : $|v(t)| \leq \int_t^\infty M \frac{d\tau}{\tau^2} = \frac{1}{t} M \leq M$.

v est continue sur J : le changement de variable $\tau = ts$ transforme $v(t)$ en $\int_1^\infty k(t, ts)u(ts) \frac{ds}{ts^2}$; l'application $(t, s) \mapsto k(t, ts)u(ts) \frac{1}{ts^2}$ est continue sur J^2 , majorée en module, indépendamment de $t \in J$, par la fonction $s \mapsto M/s^2$, intégrable sur J . Par théorème, ceci assure la continuité de v sur J .

v appartient à E

2. On vient de voir que $A(u)$ appartient à E et la linéarité de A est évidente.

La question 1. a aussi établi $|A(u)(t)| \leq M$ pour tout $t \in J$ donc $\|A(u)\| \leq M = \|k\| \|u\|$.

A étant linéaire, cela établit:

A est continue et $\|A\| \leq \|k\|$.

3. Par récurrence sur n : pour $n = 0$, $A^n(u) = u$ et le résultat se réduit à $|u(t)| \leq \|u\|$.

Pour $n = 1$, il s'écrit $|A(u)(t)| \leq \frac{K\|u\|}{t}$ et a été établi à la question 1. avec $K = \|k\|$.

Supposant le résultat acquis au rang n avec $K = \|k\|$, il vient:

$$|A^{n+1}(u)(t)| = \left| \int_t^\infty k(t, \tau) A^n(u)(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2} \right| \leq \int_t^\infty K \frac{K^n \|u\|}{n! \tau^n} \frac{d\tau}{\tau^2} = \frac{K^{n+1} \|u\|}{(n+1)! t^{n+1}}.$$

Le résultat est ainsi établi par récurrence:

$$|A^n(u)(t)| \leq \frac{K^n \|u\|}{n! t^n}.$$

4. La majoration du 3. montre que $\|A^n(u)\| \leq \frac{K^n \|u\|}{n!}$ et donc aussi $\|A^n\| \leq \frac{K^n}{n!}$. Ceci prouve la convergence de la série $\sum \|A^n\|$ c'est à dire la convergence absolue de $\sum A^n$.

Or le cours assure que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace complet et que cette complétude entraîne celle de $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|)$. La convergence absolue obtenue implique donc la convergence de la série $\sum A^n$ dans $\mathcal{L}(E)$.

On utilise ensuite l'identité $(I_E - A) \sum_{n=0}^{N-1} A^n = I_E - A^N$: lorsque N tend vers l'infini, le premier membre a pour limite $(I_E - A) \sum_{n=0}^\infty A^n$ car la composition des applications linéaires continues est une application

continue de $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$; le second membre a pour limite I_E puisque $\|A^N\| \leq \frac{K^N}{N!}$. On obtient donc en passant à la limite:

$$(I_E - A) \sum_{n=0}^{\infty} A^n = I_E.$$

5. L'équation (1) s'écrit $u = u_0 + A(u)$ ou encore $(I_E - A)(u) = u_0$.

La question 4. a montré $(I_E - A) \sum_{n=0}^{\infty} A^n = I_E$ et on peut établir aussi bien $(\sum_{n=0}^{\infty} A^n)(I_E - A) = I_E$ de sorte que $I_E - A$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$, d'inverse $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$.

Dès lors:

$$\text{l'équation (1) admet dans } E \text{ l'unique solution } u = (I_E - A)^{-1}(u_0) = (\sum_{n=0}^{\infty} A^n)(u_0).$$

Partie II

6. u_ε est continue car elle est dans E .

Notons encore un peu u pour u_ε . Si on développe $\sin(t - \tau)$, (1) se réécrit:

$$u(t) = u_0(t) + \lambda \sin t \int_t^\infty (\cos \tau) u(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2} - \lambda \cos t \int_t^\infty (\sin \tau) u(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2}$$

(ces intégrales existent).

Les fonctions intégrées étant continues, le second membre est de classe C^1 .

$$u \text{ est donc de classe } C^1 \text{ et } u'(t) = u'_0(t) + \lambda \cos t \int_t^\infty (\cos \tau) u(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2} + \lambda \sin t \int_t^\infty (\sin \tau) u(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2}$$

(les termes en $\lambda \sin t \cos t \frac{u(t)}{t^2}$ qui apparaissent dans la dérivation s'éliminent).

Pour les mêmes raisons, u' est de classe C^1 , donc u de classe C^2 et:

$$u''(t) = u''_0(t) - \lambda \sin t \int_t^\infty (\cos \tau) u(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2} + \lambda \cos t \int_t^\infty (\sin \tau) u(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2} - \lambda \frac{u(t)}{t^2}.$$

Comme $u''_0(t) = -u_0(t)$, on voit réapparaître $u(t)$ au second membre et finalement:

$$u''(t) = -u(t) - \lambda \frac{u(t)}{t^2}.$$

Cette relation montre alors que u est de classe C^{k+2} dès qu'elle est de classe C^k . Puisqu'elle est C^2 , elle est donc C^∞ :

$$u = u_\varepsilon \text{ est de classe } C^\infty.$$

7. Ce résultat a été établi dans la question précédente:

$$u''_\varepsilon(t) + u_\varepsilon(t)(1 + \frac{\lambda}{t^2}) = 0.$$

8. On a vu en question 5. que $u_\varepsilon = (I_E - A)^{-1}(u_{0,\varepsilon})$ en notant $u_{0,\varepsilon}(t) = e^{\varepsilon it}$.

Le couple $(u_{(0,+)}, u_{(0,-)})$ est libre (si $\alpha u_{(0,+)} + \beta u_{(0,-)} = 0$, les valeurs en $t = 0$ et $t = \pi/2$ montrent que $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ sont nuls donc aussi α et β). Son image (u_+, u_-) par l'isomorphisme $(I_E - A)^{-1}$ est donc aussi libre dans E .

Or, on sait que l'espace vectoriel S des solutions de (2) sur J (S a priori inclus dans l'espace des fonctions de classe C^2 sur J) est de dimension 2. (u_+, u_-) en est donc une base, de sorte que cet espace S est en fait inclus dans E :

(u_+, u_-) est donc une base de l'espace vectoriel des solutions de (2) dans E .

Partie III

9. a) Une intégration par parties donne:

$$\int_t^s \frac{e^{i\tau}}{\tau^m} d\tau = \left[\frac{e^{i\tau}}{i\tau^m} \right]_t^s + m \int_t^s \frac{e^{i\tau}}{i\tau^{m+1}} d\tau.$$

Lorsque s tend vers l'infini, le crochet a une limite car $\frac{e^{is}}{is^m}$ tend vers 0; l'intégrale du second membre aussi car la fonction qui y figure est intégrable sur $[t, +\infty[$ ($m+1 \geq 2$).

On peut donc passer à la limite et écrire:

$$\int_t^\infty \frac{e^{i\tau}}{\tau^m} d\tau = -\frac{e^{it}}{it^m} + m \int_t^\infty \frac{e^{i\tau}}{i\tau^{m+1}} d\tau.$$

On en déduit:

$$\left| \int_t^\infty \frac{e^{i\tau}}{\tau^m} d\tau \right| \leq \frac{1}{t^m} + m \int_t^\infty \frac{1}{\tau^{m+1}} d\tau = \frac{2}{t^m}.$$

$$\int_t^\infty \frac{e^{i\tau}}{\tau^m} d\tau = O\left(\frac{1}{t^m}\right).$$

b) Dans $\varphi_n(t)$ (qui existe bien, $n \geq 0$ assurant l'intégrabilité de la fonction), on remplace $\sin(t-\tau)$ par $\frac{e^{i(t-\tau)} - e^{-i(t-\tau)}}{2i}$. En simplifiant puis en séparant en deux termes (qui existent bien):

$$\varphi_n(t) = \int_t^\infty \frac{1 - e^{-2i(t-\tau)}}{2i\tau^{n+2}} d\tau = \int_t^\infty \frac{d\tau}{2i\tau^{n+2}} - \int_t^\infty \frac{e^{-2i(t-\tau)}}{2i\tau^{n+2}} d\tau = \frac{1}{2i(n+1)t^{n+1}} - \frac{e^{-2it}}{2i} \int_t^\infty \frac{e^{2i\tau}}{\tau^{n+2}} d\tau.$$

C'est le résultat demandé pour $k=1$.

On procède ensuite par récurrence sur k . Supposons la formule établie au rang $k \geq 1$, c'est à dire:

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{(n+1)!} \left[\sum_{j=1}^k \frac{(n+j-1)!}{(2i)^j t^{n+j}} - \frac{(n+k)! e^{-2it}}{(2i)^k} \int_t^\infty \frac{e^{2i\tau}}{\tau^{n+k+1}} d\tau \right]$$

On effectue sur l'intégrale la même intégration par parties qu'au a. ci-dessus:

$$\int_t^\infty \frac{e^{2i\tau}}{\tau^{n+k+1}} d\tau = -\frac{e^{2it}}{2it^{n+k+1}} + (n+k+1) \int_t^\infty \frac{e^{2i\tau}}{2i\tau^{n+k+2}} d\tau.$$

Cette transformation de la formule au rang k fait alors apparaître la formule demandée au rang $k+1$, le terme intégré donnant le terme d'indice $k+1$ de la somme:

la formule est établie par récurrence

c) Il suffit de réunir les résultats de a. et de b. et de rappeler que e^{-2it} reste borné pour constater que l'on a obtenu la forme (3) désirée pour $\varphi_n(t)$ (le a. vaut aussi bien avec $2i\tau$ qu'avec $i\tau$):

$$\varphi_n(t) = \sum_{j=1}^k \alpha_{n,j} \frac{1}{t^{n+j}} + O\left(\frac{1}{t^{n+k+1}}\right) \text{ avec } \alpha_{n,j} = \frac{(n+j-1)!}{(2i)^j (n+1)!}$$

10. a) On sait que $u(t) = e^{it} + A(u)(t)$ (avec les notations de la Partie I) et la question 3. a montré que $A(u)(t) = O(1/t)$. On a donc (e^{-it} est borné):

$$e^{-it}u(t) = 1 + O(1/t).$$

b) Si on suppose le développement obtenu à l'ordre $n \geq 0$ (on vient de l'établir à l'ordre 0), on peut remplacer $u(\tau)$ par ce développement dans l'égalité (4). Il s'en déduit:

$$e^{-it}u(t) = 1 + \lambda e^{-it} \int_t^\infty \sin(t-\tau) \left(\sum_{j=0}^n \gamma_j \frac{e^{i\tau}}{\tau^{j+2}} + O\left(\frac{1}{\tau^{n+3}}\right) \right) d\tau.$$

$$\left| \int_t^\infty \sin(t-\tau) O\left(\frac{1}{\tau^{n+3}}\right) d\tau \right| \text{ se majore par } \int_t^\infty \frac{M'}{\tau^{n+3}} d\tau = \frac{M'}{(n+2)t^{n+2}} \text{ et c'est donc un } O\left(\frac{1}{t^{n+2}}\right).$$

On peut alors écrire à l'aide des fonctions φ_j :

$$e^{-it}u(t) = 1 + \lambda \sum_{j=0}^n \gamma_j \varphi_j(t) + O\left(\frac{1}{t^{n+2}}\right).$$

En prenant le développement de chaque φ_j à l'ordre $n+1$ donné par la question 9.:

$$e^{-it}u(t) = 1 + \lambda \sum_{j=0}^n \gamma_j \sum_{l=1}^{n+1-j} \alpha_{j,l} \frac{1}{t^{j+l}} + O\left(\frac{1}{t^{n+2}}\right).$$

Ceci est donc le développement voulu à l'ordre $n+1$ et γ_{n+1} est le coefficient de $\frac{1}{t^{n+1}}$, c'est à dire:

$$\boxed{\gamma_{n+1} = \lambda \sum_{j=0}^n \gamma_j \alpha_{j,n+1-j}.$$

c) Les coefficients $\alpha_{n,j}$ ont été calculés à la question 9b.: $\alpha_{n,j} = \frac{(n+j-1)!}{(2i)^j(n+1)!}$

En particulier $\alpha_{j,n+1-j} = \frac{n!}{(2i)^{n+1-j}(j+1)!}$.

Pour $n=j=0$, on obtient $\alpha_{0,1} = \frac{1}{2i}$ et la formule du b. ci-dessus donne alors $\gamma_1 = \lambda \frac{\gamma_0}{2i}$, ce qui est le résultat voulu dans ce cas.

Pour $n \geq 1$, on remarque que: $\alpha_{j,n+1-j} = \frac{n}{2i} \alpha_{j,n-j}$.

En isolant alors dans l'expression de γ_{n+1} le terme d'indice n :

$$\gamma_{n+1} = \lambda \gamma_n \alpha_{n,1} + \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j \alpha_{j,n+1-j} = \frac{\lambda \gamma_n}{2i(n+1)} + \lambda \frac{n}{2i} \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j \alpha_{j,n-j}$$

Or $\lambda \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j \alpha_{j,n-j}$ n'est autre que γ_n , de sorte que:

$$\boxed{\gamma_{n+1} = \frac{1}{2i} \left(n + \frac{\lambda}{n+1} \right) \gamma_n.}$$

d) S'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $\lambda = -p(p+1)$, les γ_n sont tous nuls à partir du rang $p+1$ et le rayon de convergence de la série est alors $R = +\infty$.

Sinon, aucun γ_n n'est nul (car $\gamma_0 = 1$) et le rapport $\frac{|\gamma_{n+1}|}{|\gamma_n|} = \left| \frac{1}{2i} \left(n + \frac{\lambda}{n+1} \right) \right|$ tend vers l'infini avec n .

Le rayon de convergence de la série est alors $R = 0$.

$$\boxed{R = +\infty \text{ ou } 0 \text{ selon que } \lambda \text{ est de la forme } -p(p+1) \text{ ou non.}}$$