
Corrigé de la seconde épreuve de mathématiques
Mines 2010 - Filière MP
Par H. Maarouf CPGE Mohammedia

A. Questions préliminaires

1) Pour $n = 2$, la seule matrice de \mathfrak{U}_2 est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad u_2 = 1$$

Pour $n = 3$, chaque d'une matrice de \mathfrak{U}_3 contient un seul zéro dans chaque ligne et chaque colonne. Les matrices de \mathfrak{U}_3 sont donc données ci-dessous dans l'ordre suivant :

* Les matrices ayant un zéro dans la position $(1, 1)$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* Les matrices ayant un zéro dans la position $(1, 2)$:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* Les matrices ayant un zéro dans la position $(1, 3)$:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, \mathfrak{U}_3 contient exactement $u_3 = 6$ matrices.

Soit X_0 le vecteur de \mathbb{R}^n dont tous les coefficients sont égaux à 1 et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

2) Soit $A \in \mathfrak{U}_n$. AX_0 est le vecteur de \mathbb{R}^n dont la i -ème composante ($i \in \llbracket 1, n \rrbracket$) est formée de la somme des coefficients de la i -ème ligne de A , c'est-à-dire 2. En d'autres termes, $AX_0 = 2X_0$ ou, encore, X_0 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

On note \mathcal{H}_n l'ensemble des éléments de \mathfrak{U}_n comportant un 1 dans la position $(1, 1)$ et h_n son cardinal.

3) Commençons par remarquer que si i et j sont deux indices distincts entre 1 et n et A un élément de \mathfrak{U}_n , alors l'échange des lignes i et j ou des colonnes i et j donne comme résultat une nouvelle matrice de \mathfrak{U}_n . Fixons un couple (i, j) . L'ensemble des matrices de \mathfrak{U}_n ayant un 1 dans la position (i, j) est en bijection avec \mathcal{H}_n par l'application qui à chaque matrice fait associer la matrice obtenue de celle-ci en échangeant les lignes 1 et i et les colonnes 1 et j . Donc les matrices de \mathfrak{U}_n ayant un 1 dans la position (i, j) sont en nombre de h_n . Par suite,

$$\sum_{A \in \mathfrak{U}_n} A = h_n J$$

B. Étude du cardina de \mathfrak{U}_n

4) Par la question 2), X_0 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2, pour chaque $A \in \mathfrak{U}_n$. Donc

$$\begin{aligned} h_n J X_0 &= \sum_{A \in \mathfrak{U}_n} A X_0 \quad (\text{par } \mathbf{2}) \\ &= 2 \sum_{A \in \mathfrak{U}_n} X_0 \quad (\text{par } \mathbf{2}) \\ &= 2u_n X_0 \end{aligned}$$

D'un autre coté, X_0 est un vecteur propre de J associé à la valeur propre n . Alors, $nh_n = 2u_n$ ou encore $u_n = \frac{n}{2}h_n$.

On note \mathcal{K}_n l'ensemble des éléments de \mathcal{H}_n comportant un 1 dans la position (1, 2) et un 1 dans la position (2, 1) et k_n son cardinal.

- 5) On note, pour $(i, j) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$, $\mathcal{H}_{n,i,j}$ l'ensemble des éléments de \mathcal{H}_n ayant un 1 dans la position (1, j) et un 1 dans la position (i , 1). Remarquons que $\mathcal{H}_{n,2,2} = \mathcal{K}_n$. Considérons, pour $(i, j) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$, l'application

$$\begin{aligned} \phi_{i,j} : \mathcal{H}_{n,i,j} &\longrightarrow \mathcal{K}_n \\ A &\longmapsto A_{i,j} \end{aligned}$$

où $A_{i,j}$ est obtenue de A par échange des lignes 2 et i et des colonnes 2 et j (lorsque $i = 2$ ou $j = 2$, on ne fait pas d'échange). Il n'est pas difficile de voir que $\phi_{i,j}$ est bijective et que

$$\mathcal{H}_n = \bigcup_{(i,j) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2} \mathcal{H}_{n,i,j}$$

qui est une réunion disjointe de parties ayant même cardinal que celui de \mathcal{K}_n . Donc

$$h_n = \text{card}(\mathcal{H}_n) = \text{card}(\llbracket 2, n \rrbracket^2) \times \text{card}(\mathcal{K}_n) = (n-1)^2 k_n$$

- 6) On écrit \mathcal{K}_n comme réunion disjointe des deux parties suivantes :

- * $\mathcal{K}_{n,1}$ l'ensemble des éléments de \mathcal{K}_n ayant un 1 dans la position (2, 2). Il est clair que l'application de $\mathcal{K}_{n,1}$ dans \mathcal{U}_{n-2} qui, à chaque matrice A , on fait associer la matrice obtenue de celle-ci en supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes est bijective. Donc $\text{card}(\mathcal{K}_{n,1}) = \text{card}(\mathcal{U}_{n-2}) = u_{n-2}$.
- * $\mathcal{K}_{n,2}$ l'ensemble des éléments de \mathcal{K}_n ayant un 0 dans la position (2, 2). Dans ce cas, on considère l'application de $\mathcal{K}_{n,2}$ dans \mathcal{H}_{n-1} qui, à chaque matrice A , on fait associer la matrice obtenue de celle-ci en remplaçant le 0 de la position (2, 2) par 1 puis en supprimant la première ligne et la première colonne. Il s'agit bien d'une application et que celle-ci est bijective. Alors, $\text{card}(\mathcal{K}_{n,2}) = \text{card}(\mathcal{H}_{n-1}) = h_{n-1}$.

Par suite, $k_n = \text{card}(\mathcal{K}_n) = \text{card}(\mathcal{U}_{n-2}) + \text{card}(\mathcal{H}_{n-1}) = u_{n-2} + h_{n-1}$.

On pose $w_n = \frac{u_n}{(n!)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 7) Soit $n \in \mathbb{N}$. Lorsque $n \geq 4$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n}{2} h_n \quad (\text{par 4}) \\ &= \frac{n}{2} (n-1)^2 k_n \quad (\text{par 5}) \\ &= \frac{n(n-1)^2}{2} u_{n-2} + n(n-1) \frac{n-1}{2} h_{n-1} \quad (\text{par 6}) \\ &= \frac{n(n-1)^2}{2} u_{n-2} + n(n-1) u_{n-1} \quad (\text{par 4}) \end{aligned}$$

et, à l'aide des conventions $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, cette relation est encore vraie pour $n = 2$ ou $n = 3$. Maintenant, pour $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{u_n}{(n!)^2} \\ &= \frac{n(n-1)^2}{2} \frac{((n-2)!)^2}{(n!)^2} \frac{1}{((n-2)!)^2} u_{n-2} + n(n-1) \frac{((n-1)!)^2}{(n!)^2} \frac{1}{((n-1)!)^2} u_{n-1} \\ &= \frac{1}{2n} w_{n-2} + \frac{n-1}{n} w_{n-1} \end{aligned}$$

- 8) Il est clair que u_0 et u_1 sont des éléments de $[0, 1]$. À l'aide d'une récurrence sur n et en utilisant la relation $w_n = \frac{1}{2n} w_{n-2} + \frac{n-1}{n} w_{n-1}$, il est facile de d'établir que $w_n \in [0, 1]$. Toujours par la relation $w_n = \frac{1}{2n} w_{n-2} + \frac{n-1}{n} w_{n-1}$ et le fait que w_n positif pour tout n , on voit que, pour $n \geq 2$,

$$w_n = \frac{1}{2n} w_{n-2} + \frac{n-1}{n} w_{n-1} \geq \frac{n-1}{n} w_{n-1} \geq \dots \geq \frac{2}{n} w_2 = \frac{1}{2n}$$

ceci montre que la série $\sum w_n$ diverge. Maintenant, pour $x \in [0, 1[$, on a $0 \leq w_n x^n \leq x^n$. Comme la série $\sum x^n$ est convergente, il en est de même pour la série $\sum w_n x^n$. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$. La série $\sum w_n x^n$ est convergente pour tout $x \in [0, 1[$, donc $R \geq 1$. La série $\sum w_n$ est divergente, donc $R \leq 1$. Enfin, $R = 1$.

On pose $W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

9) La fonction W est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]-1, 1[$ et on a pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} W'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n w_n x^{n-1} \\ &= w_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2} w_{n-2} x^{n-1} + (n-1) w_{n-1} x^{n-1} \right) \\ &= w_1 + \frac{x}{2} \sum_{n=2}^{\infty} w_{n-2} x^{n-2} + x \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) w_{n-1} x^{n-2} \quad (\text{les deux séries convergent}) \\ &= \frac{x}{2} W(x) + x W'(x) \quad (w_1 = 0) \end{aligned}$$

Donc W est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle $y'(x) = \frac{x}{2(1-x)} y(x)$ en plus de la condition initiale $y(0) = w_0 = 1$. Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x}{2(1-x)}$ sur $]-1, 1[$ est $x \mapsto -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln(1-x)$. Les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = \frac{x}{2(1-x)} y(x)$ sont donc de la forme : $x \mapsto k \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{1-x}}$ avec $k \in \mathbb{R}$. L'unique solution de cette équation différentielle avec la condition initiale $y(0) = 1$ est la fonction $W : x \mapsto \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{1-x}}$

C. Équivalent d'une suite de coefficients d'un développement en série entière

Cette partie permet d'obtenir un équivalent de u_n pour $n \rightarrow +\infty$. Soit α un réel et β un réel strictement positif. On considère la fonction ϕ définie pour $x \in]-1, 1[$ par la formule :

$$\phi(x) = \frac{e^{\alpha x}}{(1-x)^\beta}.$$

On note $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ la fonction Γ définie pour tout réel $t > 0$: On rappelle que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ pour tout $t > 0$.

10) On rappelle que la fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence $R_1 = +\infty$ et de même pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^\beta} = (1-x)^{-\beta}$ avec un rayon de convergence $R_2 = 1$ (puisque $-\beta \notin \mathbb{N}$). Ceci montre que la fonction ϕ produit de ces deux fonctions est développable en série entière (produit de Cauchy des deux séries précédentes) avec un rayon de convergence $R_3 \geq 1$. La fonction ϕ est donc la somme d'une série entière $\sum \phi_n x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

11) Posons $f(x) = \frac{1}{(1-x)^\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$. On sait que

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \frac{(-\beta)(-\beta-1)\cdots(-\beta-n+1)}{n!} = \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!}$$

D'un autre coté, pour $n \geq 1$, on a :

$$\Gamma(\beta+n) = (\beta+n-1)\Gamma(\beta+n-1) = (\beta+n-1)\cdots(\beta+1)\beta\Gamma(\beta)$$

Comme $\Gamma(\beta) > 0$, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta) \times n!}$$

12) Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^n$, $\frac{1}{(1-x)^\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\phi(x) = \frac{e^{\alpha x}}{(1-x)^\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n x^n$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\phi_n = \sum_{k=0}^n a_k \frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta) \times k!} \frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{\Gamma(\beta) \times n!} \psi_n$$

avec

$$\begin{aligned}
\psi_n &= \sum_{k=0}^n \frac{n! \alpha^{n-k}}{k!(n-k)!} \Gamma(\beta + k) \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k \alpha^{n-k} \int_0^\infty u^{\beta+k-1} e^{-u} du \\
&= \int_0^\infty \sum_{k=0}^n C_n^k \alpha^{n-k} u^k u^{\beta-1} e^{-u} du \quad (\text{somme finie}) \\
&= \int_0^\infty (\alpha + u)^n u^{\beta-1} e^{-u} du
\end{aligned}$$

13) On fixe $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > |\alpha|$. Étudions les variations de la fonction $g_{\alpha,n} : [-\alpha, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $u \mapsto (\alpha + u)^n e^{-u}$

La fonction g est de classe \mathcal{C}^∞ et pour tout $u \in [-\alpha, +\infty[$,

$$g'_{\alpha,n}(u) = (\alpha + u)^{n-1} e^{-u} (n - \alpha - u)$$

Le signe de $g'_{\alpha,n}(u)$ montre que la fonction $g_{\alpha,n}$ est croissante sur $[-\alpha, -\alpha + n]$ et décroissante sur $[-\alpha + n, +\infty[$.
 Pour tout $n \geq a + |\alpha|$ de sorte que $g_{|\alpha|,n}$ soit croissante sur $[0, a]$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^a u^{\beta-1} e^{-u} (\alpha + u)^n du \right| &\leq \int_0^a u^{\beta-1} e^{-u} (|\alpha| + u)^n du \\
&\leq \int_0^a u^{\beta-1} g_{|\alpha|,n}(u) du \\
&\leq g_{|\alpha|,n}(a) \int_0^a u^{\beta-1} du = (|\alpha| + a)^n \frac{a^\beta}{\beta}
\end{aligned}$$

D'une autre part, si en plus $n \geq \alpha + 1$,

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty u^{\beta-1} e^{-u} (\alpha + u)^n du &\geq \int_{n-\alpha}^\infty e^{-u} (\alpha + u)^n du \quad (u^{\beta-1} \geq 1) \\
&\geq \int_{n-\alpha}^\infty e^{-u} n^n du \\
&\geq e^\alpha e^{-n} n^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}} e^\alpha \quad (\text{formule de Stirling})
\end{aligned}$$

mais $(|\alpha| + a)^n \frac{a^\beta}{\beta}$ est négligeable devant $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}} e^\alpha$ quand n tend vers $+\infty$, d'où le résultat.

14) Pour tout $a > |\alpha|$, on a

$$\begin{aligned}
\left| \underbrace{\int_a^\infty e^{-u} (\alpha + u)^{n+\beta-1} du}_{z_n} - \underbrace{\int_a^\infty u^{\beta-1} e^{-u} (\alpha + u)^n du}_{w_n} \right| &\leq \int_a^\infty e^{-u} (\alpha + u)^{n+\beta-1} \left| 1 - \left(\frac{u}{\alpha + u} \right)^{\beta-1} \right| du \\
&\leq \int_a^\infty e^{-u} (\alpha + u)^{n+\beta-1} \left| 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + u} \right)^{\beta-1} \right| du
\end{aligned}$$

Soit h la fonction $x \mapsto (1 - x)^{\beta-1}$ définie sur $I = [c, d] \subset]-1, 1[$, où $c = \frac{-|\alpha|}{-|\alpha|+a}$ et $d = \frac{|\alpha|}{|\alpha|+a}$ de sorte que :

$$\left| \int_a^\infty e^{-u} (\alpha + u)^{n+\beta-1} du - \int_a^\infty u^{\beta-1} e^{-u} (\alpha + u)^n du \right| \leq \int_a^\infty e^{-u} (\alpha + u)^{n+\beta-1} \left| h(0) - h\left(\frac{\alpha}{\alpha + u}\right) \right| du$$

Pour tout $x \in I$, on a $|h(0) - h(x)| \leq M|x|$ où $M = \sup_{t \in I} |h'(t)|$. Donc

$$\left| \int_a^\infty e^{-u} (\alpha + u)^{n+\beta-1} du - \int_a^\infty u^{\beta-1} e^{-u} (\alpha + u)^n du \right| \leq M|\alpha| \int_a^\infty e^{-u} (\alpha + u)^{n+\beta-2} du$$

c'est-à-dire que :

$$|z_n - w_n| \leq M |\alpha| z_{n-1} \quad (**)$$

A l'aide d'une intégration par parties, on trouve :

$$(n + \beta - 1)z_{n-1} = z_n - e^{-a}(\alpha + a)^{n+\beta-1} \leq z_n$$

Puisque $z_k > 0$ pour tout k , alors z_{n-1} est négligeable devant z_n quand n tend vers ∞ . Ce qui donne, d'après (**), l'équivalence de z_n et w_n quand n tend vers ∞ . D'une autre part,

$$\begin{aligned} \psi_n &= \int_0^a (\alpha + u)^n u^{\beta-1} e^{-u} du + \int_a^\infty (\alpha + u)^n u^{\beta-1} e^{-u} du \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_a^\infty (\alpha + u)^n u^{\beta-1} e^{-u} du \quad (\text{par } \mathbf{13}) \text{ puisque } a > |\alpha| \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_a^\infty (\alpha + u)^{n+\beta-1} e^{-u} du \end{aligned}$$

15) On a :

$$\underbrace{\int_a^\infty e^{-u}(\alpha + u)^{n+\beta-1} du}_{z_n} = - \underbrace{\int_{-\alpha}^a e^{-u}(\alpha + u)^{n+\beta-1} du}_{x_n} + \underbrace{\int_{-\alpha}^\infty e^{-u}(\alpha + u)^{n+\beta-1} du}_{y_n}$$

Par le changement de variables $t = \alpha + u$, on aura :

$$|x_n| = \int_{-\alpha}^a e^{-u}(\alpha + u)^{n+\beta-1} du = e^\alpha \int_0^{a+\alpha} e^{-t} t^{n+\beta-1} dt \leq \frac{e^\alpha (a + \alpha)^{n+\beta}}{n + \beta}$$

et

$$y_n = \int_{-\alpha}^\infty e^{-u}(\alpha + u)^{n+\beta-1} du = e^\alpha \int_0^\infty e^{-t} t^{n+\beta-1} dt = e^\alpha \Gamma(n + \beta)$$

Notons k la partie entière de β , alors

$$\begin{aligned} \Gamma(n + \beta) &= (n + \beta - 1) \cdots (\beta + 1) \Gamma(\beta + 1) \geq (n + k - 1) \cdots (k + 1) \Gamma(\beta + 1) \\ &\geq \frac{\Gamma(\beta + 1)}{k!} (n + k - 1)! \end{aligned}$$

Ceci montre que x_n est négligeable devant y_n ou encore z_n est équivalent à $y_n = e^\alpha \Gamma(n + \beta)$ quand n tend vers $+\infty$. Par suite z_n est équivalent $e^\alpha \Gamma(n + \beta)$. Par la question précédente, on a $\psi_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} z_n$, donc

$$\psi_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^\alpha \int_0^\infty e^{-t} t^{n+\beta-1} dt = e^\alpha \Gamma(n + \beta)$$

On revient sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie au début du problème.

16) On rappelle que $\phi_n = \frac{\psi_n}{\Gamma(\beta)n!}$ et que $\psi_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^\alpha \Gamma(n + \beta)$. Alors,

$$\phi_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^\alpha \Gamma(n + \beta)}{\Gamma(\beta)n!}$$

Rappelons aussi que $W(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{1-x}}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, c'est le cas de $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$. Ceci donne :

$$\frac{u_n}{(n!)^2} = w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{1}{2}\Gamma(n + \frac{1}{2})}}{\Gamma(\frac{1}{2})n!}$$

Donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n! \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{e\pi}}$. D'un autre coté,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2n-1}{2} \frac{2n-3}{2} \cdots \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Par suite, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2n)!}{2^{2n} \sqrt{e}}$. Par la formule de Stirling : $(2n)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}} \sqrt{4\pi n}$, nous aurons :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \left(\frac{n}{e}\right)^{2n+\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}$$

D. Étude de rang

Dans cette partie, on cherche à déterminer le rang r_n du système constitué des u_n matrices de \mathfrak{U}_n , considérées comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que X_0 est le vecteur de \mathbb{R}^n dont tous les coefficients sont égaux à 1 et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- 17)** Pour $n = 2$, on sait que \mathfrak{U}_2 contient une seule matrice non nulle, donc $r_2 = 1$. Pour $n = 3$, \mathfrak{U}_3 contient 6 matrices A_1, \dots, A_6 (par la question **1**). Notons F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par ces 6 matrices. Par la question **3**), J est un élément de F , donc F est aussi engendré par $J - A_1, \dots, J - A_6$ qui sont dans l'ordre :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ des réels donnés. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \alpha_i (J - A_i) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} &\iff \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_5 + \alpha_6 \\ \alpha_4 + \alpha_6 & \alpha_2 + \alpha_5 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_3 + \alpha_5 & \alpha_1 + \alpha_6 & \alpha_2 + \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \alpha_1 = -\alpha_2 = -\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = -\alpha_6 \end{aligned}$$

Ceci montre que $r_3 = 5$.

On considère l'espace vectoriel \mathcal{V}_n l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que X_0 soit à la fois un vecteur propre pour A et pour sa transposée tA .

- 18)** Si A est une matrice de \mathfrak{U}_n , alors sa transposée tA est aussi dans \mathfrak{U}_n . Comme X_0 est un vecteur propre de toute matrice de \mathfrak{U}_n , on aura $\mathfrak{U}_n \subset \mathcal{V}_n$. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice \mathcal{V}_n et notons λ la valeur propre de A associé à X_0 et μ celle de tA associé à X_0 . Donc pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} = \lambda \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n a_{k,j} = \mu$$

Par suite,

$$n\lambda = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right) = n\mu$$

Ce qui montre que $\lambda = \mu$.

- 19)** Soit $\mathcal{B} = (V_1, \dots, V_n)$ une base orthonormale de \mathbb{R}^n euclidien usuel avec $V_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} X_0$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cette matrice A appartient à \mathcal{V}_n si, et seulement si, AV_1 et tAV_1 sont colinéaires à V_1 . En d'autres termes, la matrice A appartient à \mathcal{V}_n si, et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, ${}^tV_i AV_1 = 0$ et $V_i {}^tAV_1 = 0$. Notons, pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, φ_i et ψ_i les formes linéaires définies sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par les formules :

$$\varphi_i(A) = {}^tV_i AV_1 \quad \text{et} \quad \psi_i(A) = V_i {}^tAV_1$$

de sorte que $\mathcal{V}_n = \left(\bigcap_{i=2}^n \ker(\varphi_i) \right) \cap \left(\bigcap_{i=2}^n \ker(\psi_i) \right)$. Soient $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ et β_2, \dots, β_n des réels tels que :

$$\sum_{i=2}^n \alpha_i \varphi_i + \sum_{i=2}^n \beta_i \psi_i = 0 \quad (*)$$

Notons $V = \sum_{i=2}^n \alpha_i V_i$ et $W = \sum_{i=2}^n \beta_i V_i$ de sorte que la relation (*) devienne :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad {}^tV AV_1 + W {}^tAV_1 = 0$$

Si on choisit A la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui dans la position (i, i) qui vaut \sqrt{n} , alors $AV_1 = {}^tAV_1 = E_i$ le i -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n et le vecteur $V + W$ est orthogonal aux éléments de cette base canonique, il est donc nul. Par suite,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tV(A - {}^tA)V_1 = 0$$

Maintenant, si on écrit $V = (v_1, \dots, v_n)$ (dans la base canonique de \mathbb{R}^n) et on choisit A la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui dans la position (i, j) avec $i \neq j$ qui vaut \sqrt{n} , on aura :

$$0 = {}^tV(A - {}^tA)V_1 = {}^tV(E_i - E_j) = v_i - v_j$$

Le vecteur V est donc colinéaire à V_1 et il est orthogonal à ce dernier, donc nul. Par suite, $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$. En d'autres termes les $2n - 2$ formes linéaires, φ_i et ψ_i pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, sont indépendantes et en conséquence $\dim(\mathcal{V}_n) = n^2 - (2n - 2) = (n - 1)^2 + 1$. Cette dimension constitue donc une majorité de r_n puisque $\mathfrak{U}_n \subset \mathcal{V}_n$.

Pour $n \geq 3$, soit A une matrice de \mathfrak{U}_n comportant des 1 en positions $(1, 1)$ et $(2, 2)$ et des 0 en positions $(1, 2)$ et $(2, 1)$.

20) Notons $A = (a_{i,j})$ et soit $B = (b_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i > 2 \text{ ou } j > 2 \\ 1 - a_{i,j} & \text{si } i \leq 2 \text{ et } j \leq 2 \end{cases}$$

La matrice B est binaire, en plus, les matrices A et B ont les mêmes lignes et les mêmes colonnes à partir de la troisième ligne ou colonne. Les deux premières lignes de B ainsi que ses deux premières colonnes comportent exactement deux 1. C'est bien une matrice de \mathfrak{U}_n . Maintenant pour tout (i, j) ,

$$\begin{aligned} a_{i,j} - b_{i,j} &= \begin{cases} 0 & \text{si } i > 2 \text{ ou } j > 2 \\ 2a_{i,j} - 1 & \text{si } i \leq 2 \text{ et } j \leq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i > 2 \text{ ou } j > 2 \\ 1 & \text{si } i = j, i \leq 2 \text{ et } j \leq 2 \\ -1 & \text{si } i \neq j, i \leq 2 \text{ et } j \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

La matrice $A - B$ ne comporte donc que des éléments nuls, sauf en positions (i, j) avec $i \leq 2$ et $j \leq 2$.

Notons r'_n le rang du système constitué de toutes les matrices $U - V$ où $U, V \in \mathfrak{U}_n$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, notons $A_{i,j}$ la matrice obtenue de A par les deux opérations suivantes : $L_i \longleftrightarrow L_2$ et $C_i \longleftrightarrow C_2$ qui consistent à échanger les deux lignes i et 2 et les deux colonnes j et 2 de la matrice A . De la même façon, on note $B_{i,j}$ la matrice obtenue de B par les mêmes opérations et rappelons que $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ sont des matrices de \mathfrak{U}_n . En plus, $A_{i,j} - B_{i,j}$ est une matrice à coefficients nuls sauf en positions $(1, 1)$, (i, i) , $(1, j)$ et $(i, 1)$ et que 1 est en position (i, i) . On remarque que par suppression de la première ligne et de la première colonne de $A_{i,j} - B_{i,j}$, on obtient la matrice $E_{i-1, j-1}$ de la base canonique des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. La famille $(A_{i,j} - B_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2}$ est donc libre et $r'_n \geq (n - 1)^2$.

21) D'après les deux questions précédentes, on a : $(n - 1)^2 \leq r'_n \leq r_n \leq (n - 1)^2 + 1$. D'un autre côté, pour tout $U \in \mathfrak{U}_n$, $UX_0 = 2X_0$, donc pour tous U et V de \mathfrak{U}_n , $(U - V)X_0 = 0$. On sait que $JX_0 = nX_0$, donc J ne peut être combinaison linéaire des éléments $U - V$, avec $U, V \in \mathfrak{U}_n$, mais elle est combinaison linéaire des éléments de \mathfrak{U}_n . En conclusion, $r_n > r'_n$ et, par suite, $r_n = (n - 1)^2 + 1$.