Un corrigé du concours Centrale-supélec Math-I- 2014 Filière MP

Proposé par Mr : HAMANI Ahmed

I- Une norme utile sur $M_d(\mathbb{R})$

I-A– L'application f_P est continue

-Les applications $A \longmapsto I_d$ et $A \longmapsto A$ sont continues, la première est constante, la deuxième est linéaire avec $\dim M_d(\mathbb{R})$ est finie.
- Supposons que $A \longmapsto A^n$ est continue, alors $A \longmapsto A^{n+1}$ est la composée de $(A,B) \longmapsto AB$ qui est continue comme application bilinéaire avec $\dim M_d(\mathbb{R}) \times M_d(\mathbb{R})$ est finie, et de l'application $A \longmapsto (A, A^n)$ qui est continue comme application à composantes continues.
- L'application f_P est combinaison linéaire d'applications continues, donc continue.
Remarque : on peut tout simplement dire que f_P est à composantes polynômiales en les coéfficients de A.

I-B– L'application $(.,.)$ est un produit scalaire

$-\forall A, B, C \in M_d(\mathbb{R})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(A, B+\alpha C) = \mathrm{Tr}({}^tA(B+\alpha C)) = \mathrm{Tr}({}^tAB + \alpha {}^tAC) =$
$= \mathrm{Tr}({}^tAB) + \alpha \mathrm{Tr}({}^tAC) = (A,B) + \alpha(A,C)$.
$-\forall A, B \in M_d(\mathbb{R})$, $(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = (B,A)$.
$-\forall A \in M_d(\mathbb{R})$, $(A,A) = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \displaystyle\sum_{1\le i,j\le d} A_{i,j}^2 \ge 0$.
$-\forall A \in M_d(\mathbb{R})$, $(A,A) = 0 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{1\le i,j\le d} A_{i,j}^2 = 0 \Longrightarrow \forall i,j \in [[1,d]], A_{i,j} = 0 \Longrightarrow A = O_d$.
En conclusion $(.,.)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc $(.,.)$ est un produit scalaire.

I-C– Comparaison entre $|A_{i,j}|$ et $\|A\|$

$\|A\|^2 = \displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} A_{i,j}^2$, donc $\forall i,j \in [[1,n]]$, $A_{i,j}^2 \le \|A\|^2$, donc $|A_{i,j}| \le \|A\|$.

I-D– La norme $\|.\|$ est sous multiplicative

Soit $A, B \in M_d(\mathbb{R})$, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$(AB)_{i,j}^2 = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^d A_{i,k}B_{k,j}\right)^2 \le \left(\displaystyle\sum_{k=1}^d A_{i,k}^2\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^d B_{k,j}^2\right)$, donc

$\|AB\|^2 = \displaystyle\sum_{1\le i,j\le d} (AB)_{i,j}^2 \le \sum_{1\le i,j\le d}\sum_{k=1}^d A_{i,k}^2 \sum_{k=1}^d B_{k,j}^2 = \left(\sum_{1\le i,k\le d} A_{i,k}^2\right)\left(\sum_{1\le j,k\le d} B_{k,j}^2\right) = \|A\|^2\|B\|^2$, ca qui entraine que $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$.

I-E– Comparaison entre $\|A^n\|$ et $\|A\|^n$

On va montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall A \in M_d(\mathbb{R})$, $\|A^n\| \le \|A\|^n$.
- Pour $n = 1$, on a égalité.
- Supposons que pour un certain $n \ge 2$, $\|A^n\| \le \|A\|^n$, alors en utilisant l'hypothèse de récurrence et la sous multiplicativité de $(I-D)$, on obtient
$\|A^{n+1}\| = \|A^nA\| \le \|A^n\|\|A\| \le \|A\|^n\|A\| = \|A\|^{n+1}$.

II- Séries entières de matrices

II-A Définition et continuité de φ

Définition : Soit $A \in \mathcal{B}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|A^n\| \le \|A\|^n$ et $\|A\| < R$, donc $\displaystyle\sum_n a_n\|A\|^n$ converge et par comparaison, la série $\displaystyle\sum_n a_nA^n$ converge absolument, et puisque $M_d(\mathbb{R})$ est complet, on obtient la convergence de la série $\displaystyle\sum_n a_nA^n$ sur $\mathcal{B}$.

Continuité : Soit $r \in]0,R[$, alors $\forall A \in M_d(\mathbb{R})$ tel que $\|A\| \le r$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\|a_nA^n\| \le |a_n|\|A\|^n \le |a_n|r^n$, or la série $\displaystyle\sum_n a_nr^n$ est absolument convergente, donc la série $\displaystyle\sum_n a_nA^n$ converge normalement sur le compact $\{A \in M_d(\mathbb{R}) \ / \ \|A\| \le r\}$ pour tout $r \in]0,R[$, donc φ est continue sur $\mathcal{B}$.

II-B .

II.B.1 Existence de l'entier $r \in \mathbb{N}^*$

On considère l'ensemble de $\mathbb{N}$ défini par $I = \{p \in \mathbb{N}^* \ / \ (A^i)_{0\le i\le p-1} \text{ est libre}\}$.
$1 \in I$, donc I est non vide, et $(I, A, A^2, ..., A^{d^2})$ est liée ,donc I est majoré par d^2, donc admet un maximum qu'on notera r, alors $r \in I$ et $r+1 \notin I$, donc $(A^i)_{0\le i\le r-1}$ est libre et $(A^i)_{0\le i\le r}$ est liée.

II.B.2 Existence et unicité de l'r-uplet

D'après la question précédente, $(A^i)_{0\le i\le r-1}$ est une famille libre maximale du sous-espace $F = \mathrm{Vect}((A^i)_{i\in\mathbb{N}})$, donc c'est une base de F, ce qui entraine l'existence et l'unicité des $(\lambda_{i,n})_{0\leq i\leq r-1}$ qui représentent les coordonnées de A^n dans cette base.

II.B.3 **Existence de la constante** $C > 0$

On considère la norme N sur $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I, A, ..., A^{r-1})$ l'espace des polynômes en A, définie par $\forall B = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i A^i$, $N(B) = \sum_{i=0}^{r-1} |\alpha_i|$, alors pour raison de finitude de dimension, cette norme est équivalente à la norme $\|.\|$, d'où l'existence de $C > 0$ tel que $N \leq C\|.\|$, ce qui entraine que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| = N(A^n) \leq C\|A^n\|$.

II.B.4 **L'absolue convergence des série** $\sum_n a_n\lambda_{k,n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [[0, r-1]]$, $|a_n\lambda_{k,n}| \leq C|a_n|\|A^n\|$, or la série $\sum_n a_nA^n$ est absolument convergente, donc par comparaison, la série $\sum_n a_n\lambda_{k,n}$ converge absolument dans $\mathbb{C}$.

II.B.5 $\varphi(A)$ **est un polynôme en** A

De l'égalité de $II - B - 2$, on obtient $\varphi(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nA^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{r-1} a_n\lambda_{k,n}A^k$, or d'après la question précédente, les séries $(\sum_n a_n\lambda_{k,n}A^k)_{0\leq k\leq r-1}$ sont convergentes donc :

$\varphi(A) = \sum_{k=0}^{r-1}(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\lambda_{k,n})A^k$, d'où l'existence de $P = \sum_{k=0}^{r-1} b_kX^k$ avec $b_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\lambda_{k,n}$.

Les b_k sont les coordonnées de $\varphi(A)$ dans la base $(I, A, ..., A^{r-1})$, ce qui assure l'unicité.

II.B.6 **Détermination de** P **dans un cas particulier**

Un calcul simple mène à $A^2 = A$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $A^n = A$, ce qui entraine que $\varphi(A) = I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A}{n!} = I + (e-1)A$ et donc $P = 1 + (e-1)X$.

II-C **Condition nécessaire et suffisante**

- S'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall A \in M_d(\mathbb{R})$ $\varphi(A) = P(A)$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, avec $A = \lambda I_d$, on obtient $\varphi(\lambda) = P(\lambda)$, donc $(a_n)_n$ est une suite réelle qui s'annule à partir d'un certain rang.
- La réciproque est immédiate.

III-Deux applications

III-A .

III-A-1 **Énoncé du théorème**

Si deux séries complexes sont absolument convergente, alors la série produit est absolument convergente et on a : La somme de la série produit est égale au produit des sommes des deux séries.

Plus précisement : $\sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

III-A-2 **L'égalité** $exp(iA)exp(iB) = exp(i(A + B))$

La série $\sum_n \frac{z^n}{n!}$ converge absolument sur $\mathbb{C}$, donc d'après $(II - A)$,$\forall A \in M_d(\mathbb{C})$, $\sum_n \frac{A^n}{n!}$ converge absolument, ce qui permet le produit.

$$exp(iA)exp(iB) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iA)^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iB)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(iA)^k}{k!}\frac{(iB)^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^kA^kB^{n-k}\right).$$

Or $AB = BA$, donc $\sum_{k=0}^{n} C_n^kA^kB^{n-k} = (A + B)^n$, ce qui entraine que

$$exp(iA)exp(iB) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i(A + B))^n}{n!} = exp(i(A + B)).$$

III-A-3 **L'égalité** $\cos^2(A) + \sin^2(A) = I_d$

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$.

$$exp(iA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(A) + i\sin(A).$$

De même $exp(-iA) = \cos(A) - i\sin(A)$, donc

$Id = exp(O_d) = exp(iA - iA) = exp(iA)exp(-iA) = (\cos(A) + i\sin(A))(\cos(A) - i\sin(A)) =$

$= \cos^2(A) - i\cos(A)\sin(A) + i\sin(A)\cos(A) - i^2\sin^2(A)$
Or d'après la question $II-B-5$, $\cos(A)$ et $\sin(A)$ sont des polynômes en A, donc commutent, et par suite $I_d = \cos^2(A) + \sin^2(A)$.

III-B .

III-B-1 **L'inverse de la matrice** $(Re^{i\theta}I_d - A)$
Soit $\rho(A) = \max\{|\lambda| \ / \ \lambda \in Sp(A) \cap \mathbb{C}\}$, alors $\forall R > \rho(A)$, $Re^{i\theta} \notin Sp(A)$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, donc $Re^{i\theta}I_d - A$ est inversible dans $M_d(\mathbb{C})$.
De plus $\|(Re^{i\theta})^{-1}A\| = \dfrac{\|A\|}{R}$, donc si $R > \|A\|$, alors $\|(Re^{i\theta})^{-1}A\| < 1$ et par suite
$(I_d - (Re^{i\theta})^{-1}A)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left((Re^{i\theta})^{-1}A)^{-1}\right)^n$, ce qui donne l'égalité
$\forall R > \max(\|A\|, \rho(A)) = \|A\|$, $\left(Re^{i\theta}I_d - A\right)^{-1} = (Re^{i\theta})^{-1}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(Re^{i\theta})^{-n}A^n$.

III-B-2 **Une expression intégrale de** A^{n-1}
Soit $R > \|A\|$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})^n(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}d\theta = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}(Re^{i\theta})^{n-1-k}A^k d\theta$.
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $\theta \longmapsto (Re^{i\theta})^{n-1-k}A^k$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$.
- $\forall k \geq n$, $\|(Re^{i\theta})^{n-1-k}A^k\| = R^{n-1-k}\|A\|^k \underset{k\longrightarrow+\infty}{\sim} \left(\dfrac{\|A\|}{R}\right)^k$, or $\dfrac{\|A\|}{R} < 1$, donc
$\displaystyle\sum_k\left(\dfrac{\|A\|}{R}\right)^k$ est convergente, ce qui entraine que la série de fonctions $\displaystyle\sum_k(Re^{i\theta})^{n-1-k}A^k$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, 2\pi]$.
Ces hypothèses nous permettent de permuter intégrale et somme, donc si $\delta_{k,l}$ est le symbole de Kröne-cker, alors $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})^n(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})^{n-1-k}d\theta\right)A^k =$
$= \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\delta_{k,n-1}A^k = A^{n-1}$.

III-B-3 **Une expression intégrale de** $\chi_A(A)$
D'après la question précédente, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall R > \|A\|$, $A^k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})^{k+1}(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}d\theta$, donc
$\chi_A(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d}a_kA^k = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{d}a_k(Re^{i\theta})^{k+1}\right)(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}d\theta =$
$= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}Re^{i\theta}\chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}d\theta$.

III-B-4 **La matrice** $\chi_A(A)$ **est nulle**
Soit $R > \|A\|$. On a : $\chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} = (-1)^d.\ {}^t\mathrm{Com}(Re^{i\theta}I_d - A) = \left(P_{k,l}(Re^{i\theta})\right)_{1\leq k,l\leq d}$
où $P_{k,l}$ est un polynôme de degré $\leq d-1$, ce qui entraine que
$\chi_A(A) = (c_{k,l})_{1\leq k,l\leq d}$ avec $c_{k,l} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}Re^{i\theta}P_{k,l}(Re^{i\theta})d\theta$.
Les polynômes $XP_{k,l}(X)$ sont sans coéfficient constant, donc $c_{k,l} = 0$.
En effet si $Q = \displaystyle\sum_{j=1}^{m}a_jX^j$ est un polynôme sans coéfficient constant, alors
$\displaystyle\int_0^{2\pi}Q(Re^{i\theta})d\theta = \sum_{j=1}^{m}a_j\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})^jd\theta = \sum_{j=1}^{m}a_j\delta_{0,j} = 0$.
En conclut qur $\chi_A(A)$ est la matrice nulle.

IV-Étude d'une équation fonctionnelle

IV-A **Relation entre f et sa primitive**
On considère la fonction définie sur $]-\infty, \dfrac{M}{2}[$, par $\varphi : \ t \ \longrightarrow \ 2\left(F(x+t) - F(x+\alpha) - \dfrac{1}{4}F(2t) + \dfrac{1}{4}F(2\alpha)\right)$,
alors, $\varphi(\alpha) = 0$ et la continuité de f assure que φ est de classe C^1 sur $]-\infty, \dfrac{M}{2}[$, avec
$\varphi'(t) = 2\left(f(x+t) - \dfrac{1}{2}f(2t)\right) = f(2x)$ (d'après $IV-1$). En intégrant entre α et y, on aura
$\forall y \in]-\infty, \dfrac{M}{2}[$, $\varphi(y) = (y-\alpha)f(2\alpha)$, ce qui donne l'égalité pour $y \neq \alpha$.

IV-B La fonction f est de classe C^∞

On montrera par récurrence que f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- f est déjà continue sur $]-\infty, M[$.
- On suppose que f est classe C^n pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, alors La fonction F est de classe C^{n+1} sur $]-\infty, M[$, donc par l'égalité précédente, la fonction $g: x \longrightarrow f(2x)$ l'est aussi sur $]-\infty, \frac{M}{2}[$, et par suite la fonction $f: x \longrightarrow g\left(\frac{x}{2}\right)$ est de classe C^{n+1} sur $]-\infty, M[$.

En définitive f est de classe C^∞ sur $]-\infty, M[$.

IV-C Solution de l'équation fonctionnelle

En considérant la fonction φ de la question $IV - A$, l'égalité établie dans cette question s'écrit $\forall x, y, \alpha \in]-\infty, \frac{M}{2}[$ tel que $y \neq \alpha$, $f(2x) = \dfrac{\varphi(y) - \varphi(\alpha)}{y - \alpha}$, ce qui donne en tendant y vers α, $f(2x) = \varphi'(\alpha) = 2f(x + \alpha) - f(2\alpha)$.

Avec $\alpha = 0 < \frac{M}{2}$, on obtient $\forall x < \frac{M}{2}$, $f(2x) = 2f(x) - f(0)$, ce qui donne en dérivant deux fois que $f''(2x) = \frac{1}{2}f''(x)$, c'est à dire $\forall x \in]-\infty, M[$, $f''(x) = \frac{1}{2}f''\left(\frac{x}{2}\right)$ et par récurrence on obtient $\forall x \in]-\infty, M[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f''(x) = \dfrac{1}{2^n}f''\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

Le passage à la limite dans cette égalité et la continuité de f en 0, entraine que $\forall x \in]-\infty, M[$, $f''(x) = 0$.

- Si f est une solution, alors $f'' = 0$, donc $f(x) = f(0) + f'(0)x$.
- Réciproquement, une fonction définie sur $]-\infty, M[$ par $f(x) = ax + b$ est continue et vérifie l'équation fonctionnelle, donc l'ensemble de solutions d'une telle équation est $\mathrm{Vect}(1, x)$.

V-Étude d'une autre fonction matricielle

V-A Les fonctions ζ dans le cas $d = 1$

Dans le cas $d = 1$, on cherche les fonctions continues ζ vérifiants $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0 \Longrightarrow \zeta(x) \neq 0$, ce sont les fonctions continues qui s'annulent au plus en 0.

V-B L'implication demandée

Avec la matrice donnée par l'énoncé qu'on notera A, la condition $(V-1)$ s'écrit $\det(A) \neq 0 \Longrightarrow \det(f_\zeta) \neq 0$, c'est à dire $(\zeta(a)\zeta(d) - \zeta(b)\zeta(c)).\zeta(1)^{d-2} \neq 0$, ce qui entraine que $ad \neq bc \Longrightarrow \zeta(a)\zeta(d) \neq \zeta(b)\zeta(c)$.

V-C Injectivité et stricte monotonie de ζ

- Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $\zeta(a) = \zeta(b)$, alors par contraposée de l'implication précédente avec $d = c = 1$, on obtient $\zeta(a) = \zeta(b) \Longrightarrow \zeta(a)\zeta(1) = \zeta(b)\zeta(1) \Longrightarrow a \times 1 = b \times 1 \Longrightarrow a = b$.
- On considère l'ensemble $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x < y\}$, et la fonction $F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \zeta(x) - \zeta(y) \end{array}$.
- C est convexe, donc connexe par arcs, et $F = \zeta o p_1 - \zeta o p_2$ est continue du fait que ζ est continue et $p_1 : (x, y) \longmapsto x$ et $p_2 : (x, y) \longmapsto y$ sont linéaires et $\dim(\mathbb{R}^2) < +\infty$, donc continues.
- $F(C)$ est image continue d'un connexe par arcs, donc connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle. De plus $0 \notin F(C)$, en effet si $0 \in F(C)$, alors $\exists (x, y) \in C$ tel que $\zeta(x) = \zeta(y)$ ce qui entraine par injectivité de ζ que $x = y$, ce qui contredit $x < y$.
- En conclut que $F(C) \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $F(C) \subset \mathbb{R}_-^*$, c'est à dire ζ est strictement monotone.

V-D La fonction ζ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \mathrm{diag}(a, 1, ..., 1) \in M_d(\mathbb{R})$, alors l'implication $(V-1)$ entraine que $\det(A) \neq 0 \Longrightarrow \det(f_\zeta(A)) \neq 0$, c'est à dire $a \neq 0 \Longrightarrow \zeta(a)\zeta(1)^{d-1} \neq 0 \Longrightarrow \zeta(a) \neq 0$.

V-E .

V-E-1 Existence de α

Soit la fonction $g: t \longrightarrow \zeta(0)\zeta(2) - \zeta(1)\zeta(t)$.

- ζ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, donc par continuité de ζ et théorème des valeurs intermédiaires , $\zeta(0)\zeta(2) > 0$.
- $g(0)g(2) = \zeta(0)\zeta(2)(\zeta(2) - \zeta(1))(\zeta(0) - \zeta(1))$, or ζ est strictement monotone, donc $(\zeta(2) - \zeta(1))(\zeta(0) - \zeta(1)) < 0$, donc $g(0)g(2) < 0$ de plus g est continue, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]0, 2[$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est à dire $\zeta(0)\zeta(2) = \zeta(1)\zeta(\alpha)$.

V-E-2 Conclusion

Par contraposée de l'implication de $(V-B)$, l'égalité précédente entraine que $0 \times 2 = 1 \times \alpha$, ce qui contredit que $\alpha > 0$, et par suite $\zeta(0) = 0$.

V-F Une égalité vérifiée par η

$\forall x, y \in I$ tel que $x^2, y^2, xy \in I$, alors $\zeta o \eta(x^2)\zeta o \eta(y^2) = x^2y^2 = (xy)^2 = [\zeta o \eta(xy)]^2$, donc d'après $(V-B)$, on obtient $\eta(x^2)\eta(y^2) = [\eta(xy)]^2$.

V-G Dans cette question η prend des valeurs strictement positives sur $I \cap]0, +\infty[=]0, M_1[$ où $M_1 = \lim\limits_{+\infty}(\zeta)$, donc η est continue strictement croissante sur $I =]m, M_1[$ $(m = \lim\limits_{-\infty}(\zeta))$.

V-G-1 f **vérifie l'équation** $(IV-1)$

- La définition de f exige que $\forall x \in D_f$, $e^x \in]0, M_1[$, ce qui est équivalent à $x \in]-\infty, \ln(M_1)[$, on prend $M = M_1$.
- $\forall x, y \in]-\infty, \dfrac{M}{2}[$, en prennant en considération l'égalité de $(V-F)$, on obtient $f(2x) + f(2y) = \ln(\eta(e^{2x})) + \ln(\eta(e^{2y})) = \ln(\eta(e^{2x})\eta(e^{2y})) = \ln(\eta(e^x e^y))^2 = 2\ln o\eta(e^{x+y}) = 2f(x+y)$.

V-G-2 **Expression de** η **sur** $I\cap]0, +\infty[$

D'après la question $(IV-C)$, $\forall x \in]-\infty, M[$, $f(x) = ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$, donc $\eta(e^x) = e^{ax+b} = (e^x)^a.e^b$, ce qui entraine que $\forall x \in]0, M_1[$, $\eta(x) = K_1 x^{\alpha_1}$ avec $K_1 = e^b > 0$ et $\alpha_1 = a > 0$ (car $\eta(0^+) = 0$).

V-G-3 **Expression de** η **sur** $I\cap]-\infty, 0[$

Soit $x \in]-\infty, 0[\cap I =]m, 0[$, la matrice $A = \begin{pmatrix} -x^2 & -xy \\ -xy & -y^2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, donc $\eta(-x^2)\eta(-y^2) = (\eta(-xy))^2$. On considère la fonction $g = \ln o(-\eta)o(-exp)$.

- La définition de g exige que $\forall x \in D_g$, $-e^x \in]m, 0[$, c'est à dire $x \in]-\infty, \ln(-m)[$, on obtient $\forall x, y \in]-\infty, \dfrac{\ln(-m)}{2}[$, $g(2x) + g(2y) = \ln(-\eta(-e^{2x})) + \ln(-\eta(-e^{2y})) = \ln(\eta(-(e^x)^2).\eta(-(e^y)^2)) = \ln((-\eta(-e^x e^y))^2) = 2\ln(-\eta(-e^{x+y})) = 2g(x+y)$, donc d'après la question $(IV-C)$, $\forall x \in]-\infty, \ln(-m)[$, $g(x) = ax + b$, ce qui donne $-\eta(-e^x) = (e^x)^a.e^b$, donc $\forall x \in]m, 0[$, $\eta(x) = -e^b(-x)^a = K_2(-x)^{\alpha_2}$ avec $K_2 = -e^b < 0$ et $\alpha_2 = a > 0$ (car $\lim\limits_{x\longrightarrow m^+} \eta(x) = -\infty$).

V-G-4 η **est une fonction impaire définie sur** $\mathbb{R}$

- Si $M_1 < +\infty$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow M^-} \eta(x) = K_1 M_1^{\alpha_1} < +\infty$, ce qui contredit que cette limite vaut $+\infty$.
- Si $m > -\infty$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow m^+} \eta(x) = K_2(-m)^{\alpha_2} > -\infty$, ce qui contredit que cette limite vaut $-\infty$.
- En prennant $y = \pm 1$ dans l'égalité de $(V-F)$, on aura $\forall x \in I = \mathbb{R}$, $(\eta(x.1))^2 = \eta(x^2)\eta(1^2) = \eta(x^2)\eta((-1)^2) = (\eta(x.(-1)))^2$, donc $(\eta(x))^2 = (\eta(-x))^2$, et par suite $\eta(-x) = \pm\eta(x)$, or $\eta(0) = 0$ et η est strictement monotone, donc $\eta(-x) = -\eta(x)$.

V-H **L'expression de** ζ **sur** $\mathbb{R}_+^*$

Soit $\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant la condition $(V-1)$, alors $(-\zeta) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi continue et vérifie cette condition, quitte à remplacer ζ par $-\zeta$, on peut supposer que ζ est strictement croissante, et on serait dans les conditions de la question $(V-G)$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\eta(x) = Kx^\alpha$ où $\begin{cases} K > 0, & \text{si } \zeta \text{ est } \nearrow \\ K < 0, & \text{si } \zeta \text{ est } \searrow \end{cases}$ et $\alpha > 0$.

- Calculons $\zeta(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- Si ζ est croissante, alors elle prend ses valeurs positives et $\forall x, y > 0$, $\zeta(x) = y \Longleftrightarrow x = \eta(y) = Ky^\alpha \Longleftrightarrow y = \left(\dfrac{x}{K}\right)^{1/\alpha}$, donc $\forall x > 0$, $\zeta(x) = Cx^\beta$ avec $C = \left(\dfrac{1}{K}\right)^{1/\alpha} > 0$ et $\beta = \dfrac{1}{\alpha} > 0$.
- Si ζ est décroissante, alors $-\zeta$ est coissante, donc $\forall x > 0$, $\zeta(x) = -Kx^\beta$ avec $K > 0$ et $\beta > 0$.

En conclusion $\forall x > 0$, $\zeta(x) = Cx^\beta$ avec $C \neq 0$ et $\beta > 0$.

- La fonction η est impaire sur $\mathbb{R}$, donc sa réciproque ζ est aussi impaire.

V-I **Déterminant de la matrice** A_λ

$rang(A_\lambda - (\lambda-1)I_d) = 1$, donc $\lambda - 1$ est une valeur propre de multiplicité $\geq d-1$, et $Tr(A_\lambda) = d\lambda$, donc l'autre valeur propre est $(\lambda + d - 1) \neq (\lambda - 1)$, donc $\det(A_\lambda) = (\lambda-1)^{d-1}(\lambda + d - 1)$.

V-J **Les fonctions** ζ **vérifiant** $(V-1)$

D'après ce qui précède, si ζ vérifie la condition $(V-1)$, alors elle est impaire de restriction sur $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme Cx^β où $\beta > 0$ et $C \neq 0$.

- Réciproquement soit une fonction $\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ impaire de restriction sur $\mathbb{R}_+^*$, $\zeta(x) = Cx^\beta$ où $\beta > 0$.
- On remarque que si $\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie la condition $(V-1)$, alors $C\zeta$ tel que $C \neq 0$ vérifie aussi cette condition, donc on peut prendre $C = 1$.
- On considère la matrice A_λ où $\lambda = -(d-1)^{1/\beta}$, alors $\det(f_\zeta(A_\lambda)) = \det(A_{1-d}) = 0$, donc $\det(A_\lambda) = 0 = (\lambda-1)^{d-1}(\lambda + d - 1) = 0$, ce qui exige $\lambda = 1 - d$, c'est à dire $d - 1 = (d-1)^{1/\beta}$, et par suite si $d \neq 2$, $\beta = 1$ ce qui entraine que $\zeta(x) = Cx$ où $C \neq 0$.
- Reste le cas $d = 2$. $\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, si $\zeta(a)\zeta(d) = \zeta(b)\zeta(c)$, alors $\zeta(ad) = \zeta(bc)$, or ζ est injective, donc $ad = bc$, ce qui entraine que si $d = 2$, les fonctions cherchées sont les fonctions continues impaires de restriction $\zeta(x) = Cx^\beta$ sur $\mathbb{R}_+^*$.