Concours commun Mines et Ponts 2024

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 1 - MP

m.laamoum2@gmail.com [1]

Généralisation d'une intégrale de Dirichlet et application

Partie I : Calcul d'une intégrale

Dans tout ce qui suit, x est un élément de $]0,1[$ fixé et

$$f : \begin{cases}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{i\theta}} \end{cases}$$

1 ▷ Soit $\theta \in]-\pi,\pi[$, on a $\mathrm{e}^{i\theta} \neq -1$ et $1+t\mathrm{e}^{i\theta} \neq 0$ pour tout $t \in]0,+\infty[$, donc f est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.

- En 0 :

On a $|f(t)| \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$, comme $1-x<1$ alors la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable au voisinage de 0 par suite f est intégrable au voisinage de 0 .

- En $+\infty$:

On a $|f(t)| \underset{t\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2-x}}$, puisque $2-x>1$ donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{2-x}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ par suite f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Soit r la fonction définie par

$$r : \begin{cases}]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{i\theta}} dt \end{cases}$$

2 ▷ Considérons la fonction $u : \begin{cases}]-\pi,\pi[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\theta,t) & \longmapsto & \dfrac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{i\theta}} dt \end{cases}$

- Soit $\beta \in]0,\pi[$, $\theta \in [-\beta,\beta]$ et $t \in [0,+\infty[$ on a

$$\begin{aligned} \left|1+t\mathrm{e}^{i\theta}\right|^2 &= \left(1+t\mathrm{e}^{i\theta}\right)\left(1+t\mathrm{e}^{-i\theta}\right) \\ &= 1+2t\cos(\theta)+t^2 \\ &= (t+\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2 \end{aligned}$$

la fonction cos est pair et décroissante sur $[0,\beta]$, donc $\cos(\theta) \geq \cos(\beta)$ pour tout $\theta \in [-\beta,\beta]$, par suite

$$\left|1+t\mathrm{e}^{i\theta}\right|^2 \geq 1+2t\cos(\beta)+t^2 = \left|1+t\mathrm{e}^{i\beta}\right|^2$$

ainsi $\boxed{\left|1+t\mathrm{e}^{i\theta}\right|^2 \geq \left|1+t\mathrm{e}^{i\beta}\right|^2 = (t+\cos(\beta))^2+(\sin(\beta))^2 \quad (1)}$.

- La fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[\times [0,+\infty[$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}(\theta,t) = \dfrac{-i\mathrm{e}^{i\theta}t^x}{(1+t\mathrm{e}^{i\theta})^2}$

[1] https://tinyurl.com/2qyzzrbd

Soit $\beta \in]0, \pi[$, en utilisant l'inégalité (1) on trouve, pour tout $\theta \in [-\beta, \beta]$ et $t \in [0, +\infty[$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \theta}(\theta, t)\right| \leq \frac{t^x}{|1 + t\mathrm{e}^{i\beta}|^2}$$

la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{t^x}{|1 + t\mathrm{e}^{i\beta}|^2} = \dfrac{t^x}{(t + \cos(\beta))^2 + (\sin(\beta))^2}$ est définie continue sur $[0, +\infty[$ et $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2-x}}$ avec $2 - x > 1$, donc φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On obtient ainsi une relation de domination de $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$, le théorème de dérivation des intégrale dépendant d'un paramètre sur un intervalle quelconque assure que r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\beta, \beta]$ pour tout $\beta \in]0, \pi[$, par suite r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$ et

$$\boxed{\forall \theta \in]-\pi, \pi[, \quad r'(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial \theta}(\theta, t) dt = -i\mathrm{e}^{i\theta}. \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1 + t\mathrm{e}^{i\theta})^2}\, dt}$$

Soit g la fonction définie par

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\pi, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{e}^{ix\theta}. \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1 + t\mathrm{e}^{i\theta}} dt \end{array} \right.$$

3 ▷

- On a $\forall \theta \in]-\pi, \pi[$, $g(\theta) = \mathrm{e}^{ix\theta} r(\theta)$, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$ et pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= \mathrm{e}^{ix\theta} r'(\theta) + ix\mathrm{e}^{ix\theta} r(\theta) \\ &= i\mathrm{e}^{ix\theta} \int_0^{+\infty} \left(\frac{-\mathrm{e}^{i\theta} t^x}{(1 + t\mathrm{e}^{i\theta})^2} + \frac{x t^{x-1}}{1 + t\mathrm{e}^{i\theta}} \right) dt \\ &= i\mathrm{e}^{ix\theta} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^x}{1 + t\mathrm{e}^{i\theta}} \right)' dt \end{aligned}$$

ainsi $\boxed{g'(\theta) = i\mathrm{e}^{ix\boldsymbol{\theta}} \int_0^{+\infty} h'(t) dt}$ avec $h : t \longmapsto \dfrac{t^x}{1 + t\mathrm{e}^{i\theta}}$.

- On a $h(0) = 0$ et $h(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{t^{1-x}}$, comme $1 - x > 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = 0$.
- L'expression de g' s'écrit

$$g'(\theta) = i\mathrm{e}^{ix\boldsymbol{\theta}} \lim_{A \to +\infty} \int_0^A h'(t) dt = i\mathrm{e}^{ix\boldsymbol{\theta}} \left(\lim_{A \to +\infty} h(A) - h(0) \right)$$

d'où $g'(\theta) = 0$ pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, on en déduit que g est constante sur $]-\pi, \pi[$.

4 ▷ D'après la question (3) g est constante sur $]-\pi, \pi[$ donc pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$ on a $g(\theta) = g(-\theta) = g(0) \in \mathbb{R}$.

On sait que $\overline{g(\theta)} = \overline{\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{ix\theta} t^{x-1}}{1 + t\mathrm{e}^{i\theta}} \right) dt}$ ce qui donne $\overline{g(\theta)} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ix\theta} t^{x-1}}{1 + t\mathrm{e}^{-i\theta}} dt = g(-\theta)$, par suite on a

$$\mathrm{Im}\left(g(\theta)\mathrm{e}^{-ix\theta} \right) = g(\theta)\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{-ix\theta} \right) = -\sin(x\theta) g(\theta)$$

écrivons

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(g(\theta)\mathrm{e}^{-ix\theta}\right) &= \frac{1}{2i}\left(g(\theta)\mathrm{e}^{-ix\theta} - g(-\theta)\mathrm{e}^{ix\theta}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{i\theta}} - \frac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{-i\theta}}\right) dt\\
&= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\frac{t^x(\mathrm{e}^{-i\theta}-\mathrm{e}^{i\theta})}{(1+t\mathrm{e}^{i\theta})(1+t\mathrm{e}^{-i\theta})}dt\\
&= -\sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\ dt
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\theta \in]0,\pi[$

$$\boxed{g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2i}\left(g(-\theta)\mathrm{e}^{ix\theta} - g(\theta)\mathrm{e}^{-ix\theta}\right) = \sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\ dt}$$

5 $\triangleright$ Soit $\theta \in]0,\pi[$, on a

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{(t+\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2}\ dt = \frac{1}{\sin(\theta)}\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{\left(\frac{t+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2+1}\ dt$$

posons $u = \frac{t+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ alors $t = u\sin(\theta)-\cos(\theta)$ et $dt = \sin(\theta)\ du$ ce qui donne

$$\boxed{g(\theta)\sin(\theta x) = \int_{\operatorname{cotan}(\theta)}^{+\infty}\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\ du}$$

6 $\triangleright$ En s'inspirant de la question précédente, on écrit

$$g(\theta)\sin(\theta x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\theta,u)\ du$$

avec ψ la fonction définie de $]0,\pi[\times\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ par :

$$\psi(\theta,u) = \begin{cases} \dfrac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2} & \text{si} \quad u \in [\operatorname{cotan}(\theta)\ ,+\infty[\\ 0 & \text{si} \quad u \in]-\infty\ ,\operatorname{cotan}(\theta)[\end{cases}$$

on applique en suite le théorème de la convergence dominée à l'intégrale de cette fonction :

- Convergence :

Soit $u \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{cotan}(\theta) \underset{\theta\to\pi^-}{\to} -\infty$, il existence donc un $\alpha \in]0,\pi[$ tel que $\forall\ \theta \in]\alpha,\pi[$, $\operatorname{cotan}(\theta) \leq u$, ce qui donne

$$\psi(\theta,u) = \frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2},\ \forall\theta \in]\alpha,\pi[$$

on en déduit $\psi(\theta,u) \underset{\theta\to\pi^-}{\to} \dfrac{1}{1+u^2}$.

- Domination :

Pour tout $u \in [\operatorname{cotan}(\theta)\ ,+\infty[$, on a

$$0 \leq u\sin(\theta)-\cos(\theta) = |u\sin(\theta)-\cos(\theta)| \leq 1+|u|$$

donc $(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x \leq (1+|u|)^x$, par suite

$$|\psi(\theta,u)| \leq \frac{(1+|u|)^x}{1+u^2}\ \ ,\ \forall\theta \in]0,\pi[$$

De plus $\dfrac{(1+|u|)^x}{1+u^2} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^{2-x}}$ et $2-x>1$ donc la fonction $u\mapsto \dfrac{(1+|u|)^x}{1+u^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, par parité elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On obtient ainsi une relation de domination de la fonction ψ sur $]0,\pi[\times\mathbb{R}$ par une fonction intégrable.

Le théorème de convergence dominée permet d'écrire

$$\lim_{\theta\to\pi^-}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\theta,u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\theta\to\pi^-}\psi(\theta,u)du$$

c'est-à dire

$$\lim_{\theta\to\pi^-}\int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty}\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}du=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}$$

ainsi

$$\boxed{\lim_{\theta\to\pi^-}g(\theta)\sin(x\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}=\pi}$$

7 $\triangleright$ D'après la question (3) la fonction g est constante sur $]-\pi,\pi[$, donc $g(0)=\lim\limits_{\theta\to\pi^-}g(\theta)$.

On a $g(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$ et la question précédente donne $\lim\limits_{\theta\to\pi^-}g(\theta)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$ d'où

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}}$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément de $]0,1[$ fixé.

8 $\triangleright$ On a

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt+\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$$

dans la deuxième intégrale on pose $u=\dfrac{1}{t}$, ce qui donne $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt=\int_0^1\frac{u^{-x}}{1+u}du$, d'où la relation

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt=\int_0^1\left(\frac{t^{x-1}}{1+t}+\frac{t^{-x}}{1+t}\right)dt}$$

9 $\triangleright$ Pour tout $t\in]0,1[$ et $N\in\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-t)^n=\frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}dt &= \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{N}(-1)^nt^{n+x-1}\right)dt+(-1)^{N+1}\int_0^1\frac{t^{N+x}}{1+t}dt\\ &= \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+x}+(-1)^{N+1}\int_0^1\frac{t^{N+x}}{1+t}dt\end{aligned}$$

la dernière intégrale se majore par

$$\left|\int_0^1\frac{t^{N+x}}{1+t}dt\right|\leq\frac{1}{2}\int_0^1t^{N+x}dt=\frac{1}{2(N+x+1)}$$

donc elle tend vers 0 quand N tend vers l'infini , par passage à la limite on obtient

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}}$$

10 ▷ On utilise la relation de la question (8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right) dt$ et on montre de la même façon que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}$, ainsi on a

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}}$$

11 ▷ D'après la question (7) on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sin(\pi x)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-x} \\
&= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x}\right)
\end{aligned}$$

d'où la relation $\boxed{\displaystyle\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2 - x^2}}$

12 ▷ Soit $y \in]0;\pi[$, on écrit la relation précédente avec $x = \dfrac{y}{\pi}$:

$$\frac{\pi}{\sin(y)} = \frac{\pi}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \pi y}{n^2\pi^2 - y^2}$$

on en déduit $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{y^2 - n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}}$.

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13 ▷ Soit $f : t \mapsto \dfrac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2}$

- En 0 on a :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1 - (1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2))^{2p+1}}{t^2} \\
&= \frac{1 - (1 - (2p+1)\frac{t^2}{2} + o(t^2))}{t^2} \\
&= \frac{2p+1}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

ainsi $f(t) \underset{t\to 0}{\to} \dfrac{2p+1}{2}$, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0,1]$.

- En $+\infty$ on a :

$$|f(t)| \leq \frac{2}{t^2}$$

donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Par conséquent f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\, dt$ converge .

- Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Une intégration par partie donne :

$$\int_a^b \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\, dt = \left[-\frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t}\right]_a^b + (2p+1)\int_a^b \frac{\sin(t)(\cos(t))^{2p}}{t}\, dt$$

et on a $\frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t} = tf(t)$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{a\to 0\\ b\to+\infty}} \left[-\frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t}\right]_a^b = 0$, par passage à la limite on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\, dt = (2p+1)\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\, dt}$$

14 $\triangleright$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a par changement de variable $t = u + n\pi$

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\, dt = (-1)^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p}\frac{\sin(u)}{u-n\pi}\, dt$$

La relation de Chasles et un changement de variable $t = -u$ donnent

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\, dt &= (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p}\frac{\sin(u)}{u-n\pi}\, dt + (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t+n\pi}\, dt \\ &= (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\sin(t)\left(\frac{1}{t-n\pi} + \frac{1}{t-n\pi}\right)\, dt\end{aligned}$$

ainsi

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\, dt}$$

15 $\triangleright$ Par application de la relation de Chasles on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\, dt &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\, dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\, dt\end{aligned}$$

pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $n^2\pi^2 - \frac{\pi^2}{4} \leq n^2\pi^2 - t^2$ donc $\left|(\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right| \leq \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2-1/4}$.

La série $\sum \frac{1}{n^2-1/4}$ converge donc la série de fonctions $\sum (\cos(t))^{2p}\dfrac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}$ converge normalement et uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On peut donc intervertir les symboles $\sum$ et $\int$ ce qui donne

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right) dt}$$

16 $\triangleright$ D'après la question (12) la dernière formule devient :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\left(1 - \frac{\sin(t)}{t}\right) dt$$

ce qui donne

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\ dt}$$

17 ▷ Linéarisation de $(\cos(t))^{2p}$:

$$\begin{aligned}
(\cos(t))^{2p} &= \left(\frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2}\right)^{2p} \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} \mathrm{e}^{ikt} \mathrm{e}^{-i(2p-k)t} \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} \mathrm{e}^{i2(k-p)t} \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \mathrm{e}^{i2(k-p)t} + \sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} \mathrm{e}^{i2(k-p)t} \right)
\end{aligned}$$

dans la deuxième somme on fait le changement $h = 2p - k$, ce qui donne

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \mathrm{e}^{i2(k-p)t} + \sum_{h=0}^{p-1} \binom{2p}{h} \mathrm{e}^{i2(p-h)t} \right)$$

en regroupant les termes on obtient

$$\boxed{(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2(p-k)t) \right)}$$

18 ▷ D'après la question (16) on a

$$\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\ dt$$

la formule de la question (17) donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\ dt = \frac{1}{2^{2p}} \left(\frac{\pi}{2} \binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(p-k)t) dt \right)$$

or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nt) dt = 0$, donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\ dt = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p} = \frac{\pi (2p)!}{2^{2p+1}.(p!)^2}}$$

De la question (13) on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\ dt = (2p+1) \int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\ dt$, on en déduit alors

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\ dt = \frac{\pi (2p+1)!}{2^{2p+1}.(p!)^2}}$$

Partie IV : Calcul de $\mathbb{E}(|S_n|)$

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé .
Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi donnée par :

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(X_k = -1) = \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, donc $S_n(\Omega) = [\![-n, n]\!]$.

19 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\mathbb{E}(X_k) = \sum_{x\in X_k(\Omega)} x\mathbb{P}(X_k = x) = -\mathbb{P}(X_1 = -1) + \mathbb{P}(X_1 = 1) = 0$$

ce qui donne $\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = 0}$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{V}(X_k) = \mathbb{E}(X_k^2) - (\mathbb{E}(X_k))^2 = \mathbb{E}(X_k^2)$ et

$$\mathbb{E}\left(X_k^2\right) = \sum_{x\in X_k(\Omega)} x^2\mathbb{P}(X_k = x) = \mathbb{P}(X_1 = -1) + \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$$

donc et $\mathbb{V}(X_k) = 1$.
Les variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes donc $\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = n}$.

Soient S et T deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que $S(\Omega)$ et $T(\Omega)$ sont égaux et finis, donc S et T admettent des espérances .
T et $-T$ suivent la même loi, ce qui revient à dire que si $t \in T(\Omega)$ alors $-t \in T(\Omega)$ et $\mathbb{P}(T = t) = \mathbb{P}(T = -t)$.

20 ▷ On a

$$\mathbb{E}(\cos(S + T)) = \mathbb{E}(\cos(S)\cos(T)) - \mathbb{E}(\sin(S)\sin(T))$$

comme S et T sont indépendantes alors $\cos(S)$ et $\cos(T)$ sont indépendantes, de même que $\sin(S)$ et $\sin(T)$ sont indépendantes, donc

$$\mathbb{E}(\cos(S + T)) = \mathbb{E}(\cos(S))\ \mathbb{E}(\cos(T)) - \mathbb{E}(\sin(S))\ \mathbb{E}(\sin(T))$$

par le théorème de transfert on a

$$\mathbb{E}(\sin(T)) = \sum_{t\in T(\Omega)} \sin(t)\mathbb{P}(T = t)$$

changeons la variable t par $-t$ en tenant compte que $\mathbb{P}(T = t) = \mathbb{P}(T = -t)$,

$$\mathbb{E}(\sin(T)) = \sum_{t\in T(\Omega)} \sin(-t)\mathbb{P}(T = -t) \ = -\sum_{t\in T(\Omega)} \sin(t)\mathbb{P}(T = t) = -\mathbb{E}(\sin(T))$$

donc $\mathbb{E}(\sin(T)) = 0$ et $\boxed{\mathbb{E}(\cos(S + T)) = \mathbb{E}(\cos(S))\ \mathbb{E}(\cos(T))}$.

21 ▷ Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathbb{E}(\cos(tS_n)) = (\cos(t))^n$.

- Initialisation :

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $S_1 = X_1$, le théorème de transfert donne

$$\mathbb{E}(\cos(tX_1)) = \sum_{x \in X_1(\Omega)} \cos(tx)\,\mathbb{P}(X_1 = x) = \cos(-t)\,\mathbb{P}(X_1 = -1) + \cos(t)\,\mathbb{P}(X_1 = 1) = \cos(t)$$

ainsi $\mathbb{E}(\cos(tS_1)) = \cos(t)$. Le résultat est donc vrai pour $n = 1$.

- Hérédité :

Supposons le résultat vrai pour $n \geq 1$.
On a $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, d'après le théorème des coalitions les variables S_n et X_{n+1} sont indépendantes, de plus X_{n+1} et $-X_{n+1}$ suivent la même loi, la question (20) donne alors $\mathbb{E}(\cos(tS_{n+1})) = \mathbb{E}(\cos(tS_n))\,\mathbb{E}(\cos(tX_{n+1}))$.
Les variables X_1 et X_{n+1} suivent la même loi donc $\mathbb{E}(\cos(tX_{n+1})) = \mathbb{E}(\cos(tX_1)) = \cos(t)$, par hypothèse de récurrence on a $\mathbb{E}(\cos(tS_n)) = (\cos(t))^n$, par suite $\mathbb{E}(\cos(tS_{n+1})) = (\cos(t))^{n+1}$, d'où le résultat est vrai pour $n + 1$.
Ainsi on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathbb{E}(\cos(tS_n)) = (\cos(t))^n}$.

22 ▷

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$ et $|b| \leq |a|$. On a

$$|a + b| = |\ |a|\,\text{signe}(a) + b\ | = |\ |a| + \text{signe}(a)b\ |$$

comme $|a| + \text{signe}(a)b \geq |b| + \text{signe}(a)b \geq 0$ alors $\boxed{|a + b| = \ |a| + \text{signe}(a)b}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|S_{2n}| = |S_{2n-1} + X_{2n}|$ et S_{2n-1} est la somme d'un nombre impair de variables qui prennent les valeurs 1 ou -1 , donc $0 \notin S_{2n-1}(\Omega)$ et $|S_{2n-1}| \geq 1$, ainsi $|X_{2n}| = 1 \leq |S_{2n-1}|$.

Le résultat précédent donne $|S_{2n}| = |S_{2n-1} + X_{2n}| = |S_{2n-1}| + \text{signe}(S_{2n-1})X_{2n}$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|S_{2n}|) &= \mathbb{E}(|S_{2n-1}|) + \mathbb{E}(\text{signe}(S_{2n-1})X_{2n}) \\ &= \mathbb{E}(|S_{2n-1}|) + \text{signe}(S_{2n-1})\mathbb{E}(X_{2n}) \\ &= \mathbb{E}(|S_{2n-1}|) \quad (\text{ car } \mathbb{E}(X_{2n}) = 0) \end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(|S_{2n}|) = \mathbb{E}(|S_{2n-1}|)}$.

23 ▷ Soit $s \in \mathbb{R}^*$ et $A \geq 0$ on a

$$\int_0^A \frac{1 - \cos(st)}{t^2}\,dt = \int_0^A \frac{1 - \cos(|s|\,t)}{t^2}\,dt \overset{u=|s|t}{=} |s| \int_0^{|s|A} \frac{1 - \cos(u)}{u^2}\,du$$

d'après la partie III l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2}\,dt$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$, par passage à la limite on obtient

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}|s|}$$

Le cas $s = 0$ est trivial .

24 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $\omega \in \Omega$ on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n(\omega))}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}|S_n(\omega)|$ qu'on écrit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}|S_n|$.
- Montrons que $\displaystyle\mathbb{E}(|S_n|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathbb{E}(\cos(tS_n))}{t^2}\,dt$.

Comme $S_n(\Omega) = [\![-n, n]\!]$, alors on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|S_n|\right) &= \sum_{k \in [\![-n,n]\!]} |k|\, \mathbb{P}\left(S_n = k\right) \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k \in [\![-n,n]\!]} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tk)}{t^2}\, dt \right) \mathbb{P}\left(S_n = k\right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{+\infty} \sum_{k \in [\![-n,n]\!]} \frac{1 - \cos(tk)}{t^2} \mathbb{P}\left(S_n = k\right) \right) dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\mathbb{E}\left(1\right) - \mathbb{E}\left(\cos(tS_n)\right)}{t^2}\, dt
\end{aligned}$$

ce qui donne alors $\mathbb{E}\left(|S_n|\right) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathbb{E}\left(\cos(tS_n)\right)}{t^2}\, dt$.

- D'après la question (21) on a $\mathbb{E}\left(\cos\left(tS_n\right)\right) = (\cos(t))^n$ donc

$$\boxed{\mathbb{E}\left(|S_n|\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^n}{t^2}\, dt}$$

25 ▹ D'après la question (18) on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\, dt = \frac{\pi(2p+1)!}{2^{2p+1}.(p!)^2}$ et la question (22) permet de conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}\left(|S_{2n}|\right) = \mathbb{E}\left(|S_{2n-1}|\right) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}}$$