

E3A 2006-MP B : corrigé**Exercice 1**

1. Si on pose $a_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k$ et $b_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k$, avec $u_k > 0$ pour tout k de $\mathbb{N}$ et la décroissance de (u_k) , les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes de limite commune $S = \sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$: c'est le théorème de convergence relatif aux séries alternées.

On a également, pour tout n de $\mathbb{N}$ l'encadrement $b_n \leq S \leq a_n$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $b_{n-1} \leq S \leq a_n$ qui donne pour tout n de $\mathbb{N}$, avec $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$, la majoration bien connue $|S - S_n| \leq u_{n+1}$.

On a notamment $S_1 \leq S \leq S_0$, c'est-à-dire $0 \leq u_0 - u_1 \leq S \leq u_0$, ce qui assure $S \geq 0$: la somme a le signe du premier terme et lui est inférieure en valeur absolue.

Donc, ici, R_n est du signe de $(-1)^n$, R_{n+1} est du signe opposé et avec $R_n = (-1)^n u_n + R_{n+1}$ et $|R_{n+1}| \leq u_{n+1} \leq u_n$, on obtient $|R_n| = u_n - |R_{n+1}|$, d'où : $|R_n| + |R_{n+1}| = u_n$ et $|R_n| - |R_{n+1}| = u_n - 2|R_{n+1}|$.

2. a) Il suffit alors de ré-écrire cette dernière égalité, en observant que toutes les séries numériques créées par découpage sont bien convergentes (avec le théorème rappelé ci-dessus)

$$\begin{aligned} u_n - 2|R_{n+1}| &= u_n - 2(-1)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k \\ u_n - 2|R_{n+1}| &= \left[u_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n+k+1} u_k \right] - \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n+k+1} u_k \\ u_n - 2|R_{n+1}| &= \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{n+k} u_k - \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p u_{n+p+1} \\ u_n - 2|R_{n+1}| &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p u_{n+p} - \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p u_{n+p+1}, \end{aligned}$$

et finalement : $u_n - 2|R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p [u_{n+p} - u_{n+p+1}]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si on pose $v_p = u_{n+p} - u_{n+p+1}$ pour tout p de $\mathbb{N}$, alors l'hypothèse *iii)* de l'énoncé se traduit en $v_p \geq 0$ pour tout p de $\mathbb{N}$, et l'hypothèse *iv)* se traduit en $v_{p+1} \geq v_p$, c'est-à-dire (v_p) décroissante.

La suite (u_n) étant de limite nulle, il en est de même pour la suite (v_p) et la série de terme général $(-1)^p v_p$ vérifient toutes les hypothèses du théorème relatif à la convergence des séries alternées.

Ainsi $\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p [u_{n+p} - u_{n+p+1}]$ est du signe de $u_n - u_{n+1}$, c'est-à-dire positif, et finalement $(|R_n|)$ est décroissante.

3. Avec $|R_{n+1}| \leq |R_n|$ et la première égalité on a $u_n \leq 2|R_n|$, c'est-à-dire $\frac{u_n}{2} \leq |R_n|$ pour tout n de $\mathbb{N}$, et avec $2|R_n| \leq |R_{n-1}| + |R_n| = u_{n-1}$ on

obtient de même $\boxed{|R_n| \leq \frac{u_{n-1}}{2} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*}$.

4. Avec $u_n \neq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$, on a pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$1 \leq \frac{|R_n|}{u_n/2} \leq \frac{u_{n-1}}{u_n},$$

et avec l'hypothèse *ii)* de l'énoncé et le signe déjà connu de R_n , on obtient

$$\boxed{R_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (-1)^n \frac{u_n}{2}}.$$

5. On pose $f(t) = \frac{\ln t}{t}$ pour tout $t > 0$.

On a $f(t) > 0$ pour tout $t > 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et avec $f'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$, f est (strictement) décroissante sur $[e, +\infty[$.

On a $\ln(t+1) = \ln t + \ln(1 + \frac{1}{t})$, donc $f(t+1) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t} = f(t)$, c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t+1)}{f(t)} = 1.$$

Enfin, avec $f''(t) = \frac{-t-2t(1-\ln t)}{t^4} = \frac{-3+2 \ln t}{t^3}$, on a $f''(t) \geq 0$ pour tout $t \geq e^{3/2}$ et la fonction f est convexe sur $[e^{3/2}, +\infty[$, donc $\frac{f(t+1)-f(t)}{(t+1)-t} \leq \frac{f(t+2)-f(t+1)}{(t+2)-(t+1)}$ (croissance des pentes des sécantes), c'est-à-dire

$$f(t+2) - f(t+1) \geq f(t+1) - f(t).$$

Avec $e^{3/2} < e^2 < 9$ (en fait $e^{3/2} \in]4, 5[$), si on pose $u_n = f(n+9)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, alors ce qui précède montre que la suite (u_n) vérifie les quatre hypothèses *i)*, *ii)*, *iii)* et *iv)* de l'énoncé. On a donc, avec 4)

$$\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln(k+9)}{k+9} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (-1)^n \frac{\ln(n+9)}{2(n+9)},$$

$$\text{c'est-à-dire : } - \sum_{k=n+9}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -(-1)^{n+9} \frac{\ln(n+9)}{2(n+9)},$$

et finalement $\boxed{\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (-1)^n \frac{\ln n}{2n}}.$

Exercice 2

La série entière $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ est de rayon infini et pour tout t de $\mathbb{R}$, $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ est absolument convergente.

1. Pour tout $t > 0$, $|b_n| t^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} |a_n| t^n$ donc la convergence absolue de $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ entraîne la convergence absolue de $\sum_{n \geq 0} b_n t^n$: la série entière $\sum_{n \geq 0} b_n t^n$ est de rayon de convergence infini, c'est-à-dire $\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

2. Avec $b_n > 0$, on a $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} b_n \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

En posant $\gamma_n = \frac{a_n}{b_n} - 1$, on a $a_n = b_n (1 + \gamma_n)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$.

3. a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la suite $(\gamma_n)_{n \geq m}$ étant convergente, elle est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un $\delta_m = \sup_{n \geq m} |\gamma_n|$: pour tout $n \geq m$, $|\gamma_n| \leq \delta_m$.

b) Pour tout $t > 0$, on a $g(t) > \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n t^n > b_{m+1} t^{m+1} > 0$, puis

$$\frac{f(t)}{g(t)} - 1 = \frac{f(t) - g(t)}{g(t)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n b_n t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n},$$

$$\left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| \leq \frac{\sum_{n=0}^m |\gamma_n| b_n t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n} + \frac{\sum_{n=m+1}^{\infty} |\gamma_n| b_n t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n} \leq \frac{\sum_{n=0}^m |\gamma_n| b_n t^n}{b_{m+1} t^{m+1}} + \delta_m \frac{\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n},$$

et finalement $\boxed{\left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| \leq \frac{\sum_{n=0}^m |\gamma_n| b_n t^n}{b_{m+1} t^{m+1}} + \delta_m}$.

c) On a donc $\left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| \leq \delta_m + \sum_{n=0}^m |\gamma_n| \frac{b_n}{b_{m+1}} \frac{1}{t^{m-n+1}}$.

La convergence de la suite (γ_n) vers 0 entraîne la convergence de la suite (δ_n) vers 0, donc si $\varepsilon > 0$ est fixé il existe un N de $\mathbb{N}$ tel que $m \geq N$ entraîne $\delta_m \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors pour tout n de $\llbracket 0, N \rrbracket$ on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\gamma_n| \frac{b_n}{b_{N+1}} \frac{1}{t^{N-n+1}} = 0$, donc pour tout n de $\llbracket 0, N \rrbracket$, il existe un $\alpha_n > 0$ tel que $t \geq \alpha_n$ entraîne

$$|\gamma_n| \frac{b_n}{b_{N+1}} \frac{1}{t^{N-n+1}} < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}.$$

Finalement, si $A = \max_{0 \leq n \leq N} \alpha_n$, pour tout $t \geq A$ on a

$$\left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + (N+1) \frac{\varepsilon}{2(N+1)} = \varepsilon.$$

Cela signifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$, c'est-à-dire $\boxed{f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)}$.

4. a) On a $\ln[(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}] = (n+1) \ln(1 + \frac{1}{n+1})$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \ln(1 + \frac{1}{n+1}) = 1$, c'est-à-dire par continuité de la fonction exponentielle $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = e$.

On en déduit que pour tout t de $\mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \frac{t^n}{n!} = 0$: avec le lemme d'Abel, la série entière $\sum_{n \geq 0} (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \frac{t^n}{n!}$ est de rayon infini, c'est-à-dire que $\boxed{h \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

b) Avec $\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{n!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e}{n!}$ et ce qui précède on a $h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$, c'est-à-dire finalement $\boxed{h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{t+1}}$.

5. a) Soit $y(t) = t + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$ solution de (E) sur in intervalle $I \subset]-R, R[$.

Pour tout t de $] - R, R[$, on a

$$\begin{aligned} y'(t) &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n t^{n-1}, \quad y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}, \\ \text{et } \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-1} + [1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n t^{n-1}] - t - \sum_{n=2}^{\infty} n a_n t^n &= 1, \\ -t + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 a_{n+1} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} n a_n t^n &= 0, \\ (4a_2 - 1)t + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)^2 a_{n+1} - n a_n] t^n &= 0, \end{aligned}$$

et, avec l'unicité du développement en série entière de la fonction nulle, on a $a_2 = \frac{1}{4}$ et pour tout $n \geq 2$, $a_{n+1} = \frac{n}{(n+1)^2} a_n$, c'est-à-dire en fait

$$\boxed{a_n = \frac{n-1}{n^2} a_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 2}.$$

Avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, cela définit une unique suite (a_n) à termes strictement positifs pour $n \geq 1$.

Pour tout $t > 0$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} t^{n+1}}{a_n t^n} = 0$, donc la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n t^n$ est de rayon de convergence infini.

Par récurrence on a, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{(n-1)!}{(n!)^2}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \geq 1, a_n = \frac{1}{n \cdot n!}}.$$

On obtient : $z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n \cdot n!}$ pour tout t de $\mathbb{R}$, unique solution de (E) somme d'une série entière et telle que $z(0) = 0$ et $z'(0) = 1$.

b) On obtient alors $\boxed{z'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}}.$

c) Pour tout $t > 0$, on a $t z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n n!}.$

Avec $n n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (n+1)!$ et ce qui précède on a donc

$$t z(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = e^t - 1 - t,$$

et finalement $\boxed{z(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^t}{t}}.$

Exercice 3

Pour que certaines sommes qui apparaissent dans ce qui suit aient un sens, on suppose $n \geq 4$, mais en fait en les adaptant les résultats sont valables à partir de $n = 2$.

1. a) Pour tout z de $\mathbb{C}$, on a

$$\chi_F(z) = \det(F - z \cdot I_n) = \begin{vmatrix} -z & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -z \end{vmatrix}_n,$$

et en développant suivant la première colonne, on a

$$\chi_F(z) = -z \begin{vmatrix} -z & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -z \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -z & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -z & 1 \end{vmatrix}_{n-1},$$

c'est-à-dire finalement $\boxed{\chi_F(z) = (-1)^n (z^n - 1)}$

Les valeurs propres de F sont donc les n racines n -ièmes de l'unité :

$$\boxed{\lambda_k = \exp\left[\frac{2i(k-1)\pi}{n}\right], \text{ pour } k \in \{1, \dots, n\}}.$$

(la suite de l'énoncé sous-entend plutôt $\lambda_k = \exp\left[\frac{2ik\pi}{n}\right]$, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire $\lambda_n = 1$)

b) La matrice F ayant un polynôme caractéristique scindé à racines simples, $\boxed{F \text{ est diagonalisable}}$ (et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles). Comme 0 n'est pas valeur propre, $\boxed{F \text{ est inversible}}$.

c) On considère le morphisme de groupes ψ de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$ défini par $\psi(k) = F^k$ (F est inversible).

On sait que l'image de ψ est un groupe monogène (engendré par F). Il reste à savoir s'il est fini (cyclique) ou non, c'est-à-dire si ψ est injectif ou non.

Son noyau est $\{k \in \mathbb{Z}, F^k = I_n\}$. Avec le théorème de Cayley-Hamilton on a $F^n = I_n$, donc $n \in \ker \psi$ et $\ker \psi$ contient le sous-groupe additif $n\mathbb{Z}$ (ensemble des multiples de n) de $\mathbb{Z}$. Ainsi $\boxed{G \text{ est cyclique}}$.

En fait, le polynôme minimal de F est égal à son polynôme caractéristique (au facteur $(-1)^n$ près) car tout polynôme annulateur doit avoir pour racines les valeurs propres, donc $\ker \psi = n\mathbb{Z}$. Ainsi $(G, \times)$ est isomorphe, en tant

que groupe, à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. On sait que les générateurs de ce groupe sont les classes des entiers premiers avec n , ainsi

$$\boxed{\text{les générateurs de } G \text{ sont les } F^k \text{ avec } 1 \leq k \leq n \text{ et } k \wedge n = 1}.$$

Il y en a $\varphi(n)$, où φ est la fonction indicatrice d'Euler.

d) Pour tout k de $\mathbb{N}$, si r est le représentant de la classe de k modulo n , on a $F^k = F^r$, ainsi $G = \{F^k, 0 \leq k \leq n-1\}$

La famille $(F^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre car si elle était liée on aurait l'existence d'un n -uplet non nul $(a_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ de $\mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k F^k = 0$, c'est-à-dire

un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, annulateur de F et de degré strictement inférieur à n , ce qui est contradictoire avec le fait que le polynôme minimal est de degré n .

Finalement, G est une base de l'espace qu'elle engendre :

$$\boxed{\dim[\text{Vect}(G)] = n \text{ et } (F^k)_{0 \leq k \leq n-1} \text{ est une base de } \text{Vect}(G)}.$$

e) Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$, l'endomorphisme f canoniquement associé à F est défini par $f(e_i) = e_{\sigma(i)}$, où $\sigma = (n, n-1, \dots, 2, 1)$ est le cycle d'ordre n , permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $\sigma(i) = i-1$ pour tout i de $\llbracket 2, n \rrbracket$ et $\sigma(1) = n$.

Alors pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, F^k est la matrice de l'endomorphisme f^k , défini par $f^k(e_i) = e_{\sigma^k(i)}$ pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$. En indexant la base $\mathcal{B}$ avec les classes modulo n , $\mathcal{B} = (e_{\bar{i}})_{1 \leq i \leq n}$ on obtient $f(e_{\bar{i}}) = e_{\overline{i-1}}$.

Le i -ème élément de la diagonale de F^k est la coordonnée de $f^k(e_i)$ suivant e_i , elle est nulle si $\overline{i-k} \neq \bar{i}$, c'est-à-dire si $\bar{k} \neq 0$, et elle vaut 1 sinon, cad si $k \in n\mathbb{Z}$. Finalement

$$\boxed{\text{tr}(F^p) = \begin{cases} n & \text{si } p \in n\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } p \notin n\mathbb{Z} \end{cases}}.$$

2. a) On sait que F est diagonalisable, donc il existe un Q de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $Q^{-1} F Q = D$, avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

(on peut prendre $Q = ([\exp(\frac{2i\pi}{n})]^{(r-1)(s-1)})_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 1 \leq s \leq n}}$, mais cela n'est pas demandé ici).

Si $P(X) = \sum_{k=1}^n k X^{k-1}$, on a alors

$$Q^{-1} P(F) Q = P(D) = \text{diag}[P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)],$$

ce qui donne les valeurs propres de $A = P(F)$ (et aussi, en passant, la diagonalisabilité de A et en fait la co-diagonalisabilité de $\{M(A), M \in \mathbb{K}[X]\}$).

On a $\lambda_1 = 1$, donc $P(1) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Si on pose $R(X) = X^n - 1 = (X - 1)S(X)$, avec $S(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$, on a

$$n X^{n-1} = R'(X) = S(X) + (X - 1)S'(X),$$

avec $S'(X) = \sum_{k=1}^{n-1} k X^{k-1} = P(X) - n X^{n-1}$, c'est-à-dire

$$P(X) = \frac{n X^{n-1} - \frac{X^n - 1}{X - 1}}{X - 1} + n X^{n-1} = n \frac{X^n}{X - 1} - \frac{X^n - 1}{(X - 1)^2}.$$

Pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a $P(\lambda_k) = \frac{n}{\lambda_k - 1}$.

Compte-tenu de notre indexation des racines de l'unité on obtient :

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } A \text{ sont } \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{n}{\lambda_k - 1}, 2 \leq k \leq n \right\}}.$$

b) On a alors $\det(A) = \frac{n(n+1)}{2} \prod_{k=2}^n \frac{n}{\lambda_k - 1} = \frac{n^n(n+1)}{2 \prod_{k=2}^n (\lambda_k - 1)}$.

Les $(\lambda_k - 1)$ pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ sont les racines du polynôme

$$S(X + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} (X + 1)^k,$$

qui est scindé, de degré $n - 1$, de coefficient dominant 1 et de terme constant n (somme des termes constants des $(X + 1)^k$), donc avec les formules de Newton (relations coefficients-racines pour les polynômes scindés), on a

$$\prod_{k=2}^n (\lambda_k - 1) = (-1)^{n-1} \frac{n}{1} = (-1)^{n-1} n.$$

Finalement, $\boxed{\det(A) = (-1)^{n-1} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}}$.

3. a) Le déterminant de A étant non nul, A est inversible. Le polynôme caractéristique de A est de la forme

$$\chi_A(t) = \det(A) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k t^k + (-1)^n t^n.$$

Avec le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$0_n = \det(A) \cdot I_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k A^k + (-1)^n A^n, \text{ c'est-à-dire}$$

$$A \times \frac{1}{\det(A)} \cdot \left[(-1)^{n-1} A^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k A^{k-1} \right] = I_n,$$

ce qui donne $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \left[(-1)^{n-1} A^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k A^{k-1} \right],$

c'est-à-dire $\boxed{A^{-1} \in \text{Vect}(\{A^k, 0 \leq k \leq n - 1\})}$.

b) On pose $H = \text{Vect}(G)$.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, $A^k = [P(F)]^k = P^k(F) \in H$ (l'application $P \mapsto P(F)$ est un morphisme d'algèbre). Comme $\{F^k, 0 \leq k \leq n - 1\}$ est une base de H ,

il existe un (unique) $(u_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ tel que $A^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k F^k$.

c) Avec $(X-1)^2 P(X) = n(X-1)X^n + (X^n-1)$ (voir 2-a) et $F^n = I_n$, on obtient

$$(F - I_n)^2 A = n(F - I_n).$$

d) On en tire $(F - I_n)^2 = n(F - I_n)A^{-1}$, c'est-à-dire, pour $n \geq 4$

$$F^2 - 2F + I_n = n \left[\sum_{k=0}^{n-1} u_k F^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k F^k \right],$$

$$F^2 - 2F + I_n = n \left[(u_{n-1} - u_0) I_n + \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k-1} - u_k) F^k \right],$$

$$(u_{n-1} - u_0 - \frac{1}{n}) I_n + (u_0 - u_1 + \frac{2}{n}) F + (u_1 - u_2 - \frac{1}{n}) F^2 + \sum_{k=3}^{n-1} (u_{k-1} - u_k) F^k = 0.$$

La famille $(F^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ étant libre on obtient

$$\begin{cases} u_{n-1} - u_0 = \frac{1}{n} \\ u_0 - u_1 = -\frac{2}{n} \\ u_1 - u_2 = \frac{1}{n} \\ \forall k \in \llbracket 3, n-1 \rrbracket u_{k-1} = u_k \end{cases},$$

ce qui est équivalent à
$$\begin{cases} u_2 = u_3 = \dots = u_{n-1} \\ u_2 - u_0 = \frac{1}{n} \\ u_1 - u_2 = \frac{1}{n} \end{cases}.$$

e) Avec 1-e) et la linéarité de la trace, on a $\text{tr}(A) = n u_0$.

La matrice A^{-1} a pour valeurs propres les inverses de celles de A , donc,

avec $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$ c'est-à-dire $\sum_{k=2}^n \lambda_k = -1$,

$$\text{tr}(A) = \frac{2}{n(n+1)} + \sum_{k=2}^n \frac{\lambda_k - 1}{n} = \frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \lambda_k - \frac{n-1}{n} = \frac{2}{n(n+1)} - 1 = \frac{2-n-n^2}{n(n+1)}.$$

Finalement,
$$u_0 = \frac{2-n-n^2}{n^2(n+1)}.$$

f) Alors $u_2 = \frac{1}{n} + \frac{2-n-n^2}{n^2(n+1)} = \frac{2}{n^2(n+1)}$ et $u_1 = u_2 + \frac{1}{n} = \frac{n^2+n+2}{n^2(n+1)}$ et finalement

$$A^{-1} = \frac{1}{n^2(n+1)} \cdot \left[(2-n-n^2) I_n + (n^2+n+2) F + 2 \sum_{k=2}^{n-1} F^k \right],$$

ou si l'on préfère,

$$A^{-1} = \frac{1}{n^2(n+1)} \begin{pmatrix} a_n & b_n & 2 & \dots & 2 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_n \\ 2 & \dots & \dots & 2 & a_n \end{pmatrix}, \text{ où } a_n = 2 - n - n^2 \text{ et } b_n = n^2 + n + 2.$$