

# Centrale-Supélec PC 2020 — Maths 1

Denis Jourdan, Lycée du Parc, Lyon

## I Cas des matrices de taille $2 \times 2$

**Q 1.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par produit par blocs,

$$J_n^2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}.$$

On a clairement  $J_n^\top = -J_n$  et donc  $J_n^\top J_n J_n = -J_n^3 = J_n$ . Autrement dit :

$$J_n \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$$

**Q 2.** Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On calcule

$$M^\top J_1 M = \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ bc - ad & 0 \end{pmatrix} = \det(M) J_1$$

Il s'ensuit que

$$M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est symplectique si, et seulement si } \det(M) = 1$$

**Q 3.**  $M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$  est orthogonale donc

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 & (1) \\ y_1^2 + y_2^2 = 1 & (2) \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0 & (3) \end{cases} .$$

▷ Si  $M$  est symplectique, alors avec **Q.2.**,  $\det(M) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1$  (4)

Multiplions (3) par  $x_1$  et (4) par  $-x_2$  : tenant compte de la relation (1), on obtient :  $y_1 = -x_2$ .

Multiplions (3) par  $x_2$  et (4) par  $x_1$  : tenant compte de la relation (1), on obtient :  $y_2 = x_1$ .

$$\text{D'où } M_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = -J_1 M_1.$$

▷ Réciproquement, si  $M_2 = -J_1 M_1$ , on a  $y_1 = -x_2$  et  $y_2 = x_1$  donc  $\det(M) = x_1^2 + x_2^2 = 1$  et avec **Q.2.**,  $M$  est symplectique.

$$M \text{ est symplectique si et seulement si } M_2 = -J_1 M_1.$$

**Q 4.** Soit  $X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  de norme 1 : il existe un réel  $\theta$  tel que  $X_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ .

La matrice de colonnes  $X_1$  et  $-J_1 X_1$  est donc  $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ .

$M$  est une matrice orthogonale de déterminant 1, donc est à la fois orthogonale et symplectique.

Si  $X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  est de norme 1, alors  $M = \begin{pmatrix} X_1 & -J_1 X_1 \end{pmatrix}$  est à la fois orthogonale et symplectique.

**Q 5.** Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  à la fois symétrique et symplectique.

$M$  étant symétrique réelle, le *théorème spectral* assure qu'il existe  $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$  et deux réels  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^\top.$$

$M$  étant symplectique,  $\det(M) = 1$  donc  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$  : les valeurs propres de  $M$  sont inverses l'une de l'autre.

De plus, quitte à changer la première colonne de  $P$  en son opposée, on peut supposer que  $P$  est de déterminant égal à 1, donc que  $P$  est symplectique (avec **Q.2.**).

Si  $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cap \text{Sp}_2(\mathbb{R})$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \cap \text{Sp}_2(\mathbb{R})$  tels que  $M = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} P^\top$ .

**Q 6.** Soit  $A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ . Il existe un réel  $a$  tel que  $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ .

Si  $A$  est symplectique, alors  $\det(A) = 1$  donc  $a^2 = 1$ , puis  $A = J_1$  ou  $A = -J_1$ .

Réciproquement,  $J_1$  et  $-J_1$  sont des matrices à la fois antisymétriques et symplectiques.

L'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui sont à la fois antisymétriques et symplectiques est égal à  $\{J_1, -J_1\}$

$J_1$  et  $-J_1$  ont pour polynôme caractéristique  $X^2 + 1$  qui n'a pas de racine réelle.

En particulier  $J_1$  et  $-J_1$  ne sont pas diagonalisables dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

## II Cas des matrices symplectiques et orthogonales.

**Q 7.** Soit  $K \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$ .

▷  $\varphi$  est bien une application de  $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ .

▷ Soit  $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ . Soient  $X_1, X_2$  dans  $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$  et  $\lambda_1, \lambda_2$  dans  $\mathbb{R}$ .

En utilisant la linéarité de  $M \mapsto M^\top$  et la bilinéarité du produit matriciel, il vient :

$$\varphi(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)^\top KY = \lambda_1 X_1^\top KY + \lambda_2 X_2^\top KY = \lambda_1 \varphi(X_1, Y) + \lambda_2 \varphi(X_2, Y)$$

Cela prouve que pour tout  $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ , l'application  $X \mapsto \varphi(X, Y)$  est linéaire.

On vérifie de la même manière que pour tout  $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ , l'application  $X \mapsto \varphi(Y, X)$  est linéaire.

$\varphi$  est une forme bilinéaire sur  $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$

**Q 8.** Soit  $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ .

Vu que  $\varphi(X, X) \in \mathbb{R}$ , on a :  $\varphi(X, X)^\top = \varphi(X, X)$ .

D'autre part,  $\varphi(X, X)^\top = (X^\top K X)^\top = X^\top K^\top (X^\top)^\top = X^\top (-K) X = -\varphi(X, X)$ . D'où  $\varphi(X, X) = 0$ .

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}), \varphi(X, X) = 0}$$

De même, soient  $X, Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ .

$\varphi(X, Y) = \varphi(X, Y)^\top = (X^\top K Y)^\top = Y^\top K^\top (X^\top)^\top = Y^\top (-K) X = -\varphi(Y, X)$ .

$$\boxed{\varphi \text{ est antisymétrique.}}$$

**Remarque :** on peut s'interroger sur l'intérêt de cette question...

On peut aussi remarquer qu'une forme bilinéaire est antisymétrique si, et seulement si elle est alternée.

En effet, soit  $\psi$  est une forme bilinéaire sur un espace vectoriel  $E$ .

Si  $\forall (X, Y) \in E^2, \psi(X, Y) = -\psi(Y, X)$  alors en particulier  $\forall X \in E, \psi(X, X) = -\psi(X, X)$  donc  $\psi$  est alternée.

Réciproquement, supposons  $\psi$  alternée et soient  $X, Y$  dans  $E$ ; en utilisant la bilinéarité de  $\psi$ , il vient :

$\psi(X + Y, X + Y) = \psi(X, X) + \psi(X, Y) + \psi(Y, X) + \psi(Y, Y)$  donc, vu que  $\psi$  est alternée,  $\psi(X, Y) = -\psi(Y, X)$ .

Retenons quand-même, ce qui sera utilisé plusieurs fois par la suite, que

$$\boxed{\text{Si } A \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}), \text{ alors } \forall X, Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}), \langle X, AY \rangle = X^\top AY = -\langle AX, Y \rangle \text{ et } \langle AX, X \rangle = 0.}$$

**Q 9.** Soient  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ . On calcule  $J_n Y = \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{2n} \\ -y_1 \\ \vdots \\ -y_n \end{pmatrix}$ , puis

$$\boxed{\varphi(X, Y) = \langle X, J_n Y \rangle = \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+n} - x_{n+k} y_k).$$

**Q 10.** On notera, pour tous entiers relatifs  $i$  et  $j$  :  $\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Soient  $i, j \in \{1, \dots, 2n\}$ . Vu que  $e_i = \begin{pmatrix} \delta_{1,i} \\ \delta_{2,i} \\ \vdots \\ \delta_{2n,i} \end{pmatrix}$  et  $e_j = \begin{pmatrix} \delta_{1,j} \\ \delta_{2,j} \\ \vdots \\ \delta_{2n,j} \end{pmatrix}$  la question **Q.9.** fournit :

$$\varphi(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n (\delta_{k,i} \delta_{k+n,j} - \delta_{n+k,i} \delta_{k,j}) = \sum_{k=1}^n (\delta_{k,i} \delta_{k,j-n} - \delta_{k,i-n} \delta_{k,j})$$

Calculons séparément les sommes  $\sum_{k=1}^n \delta_{k,i} \delta_{k,j-n}$  et  $\sum_{k=1}^n \delta_{k,i-n} \delta_{k,j}$ .

▷ Si  $i \neq j - n$ , alors  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\delta_{k,i} \delta_{k,j-n} = 0$  donc  $\sum_{k=1}^n \delta_{k,i} \delta_{k,j-n} = 0$ .

▷ Si  $i = j - n$ , alors  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\delta_{k,i} \delta_{k,j-n} = \delta_{k,i}^2 = \delta_{k,i}$ , donc  $\sum_{k=1}^n \delta_{k,i} \delta_{k,j-n} = 1$ .

Ainsi

$$\sum_{k=1}^n \delta_{k,i} \delta_{k,j-n} = \delta_{i,j-n} = \delta_{i+n,j}$$

De même, on montre que

$$\sum_{k=1}^n \delta_{k,i-n} \delta_{k,j} = \delta_{i-n,j} = \delta_{i,j+n}$$

En définitive :

$$\text{Pour tous } i, j \in \{1, \dots, 2n\}, \varphi(e_i, e_j) = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n}$$

**Q 11.** Soit  $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ . On a vu en **Q 8.** que  $\langle X, J_n X \rangle = \varphi(X, X) = 0$ , donc  $J_n X \in X^\perp$ .

D'autre part,  $J_n^\top J_n = -J_n^2 = I_{2n}$  (cf **Q 1.**) donc  $J_n$  est orthogonale et :

$$\varphi(J_n X, X) = (J_n X)^\top J_n X = X^\top J_n^\top J_n X = X^\top X = \|X\|^2.$$

$$\forall X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}), J_n X \in X^\perp \text{ et } \varphi(J_n X, X) = \|X\|^2.$$

**Q 12.** Soient  $X, Z \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ .

Vu que  $\varphi$  est antisymétrique,  $\varphi(X, Z) = -\varphi(Z, X) = -\langle Z, J_n X \rangle$ .

Par conséquent,  $\varphi(X, Z) = 0$  si, et seulement si  $Z$  est orthogonal à  $J_n X$ . Autrement dit :

$$X^{J_n} = (J_n X)^\perp$$

**Q 13.** Le système des vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale est une famille orthonormée, donc :

$$\text{Pour tout } (i, j) \in \{1, \dots, 2n\}^2, \|X_i\| = 1 \text{ et } i \neq j \Rightarrow X_i \perp X_j.$$

Soit  $(i, j) \in \{1, \dots, 2n\}^2$ . Vu que  $X_i = P e_i$  et  $X_j = P e_j$ , il vient :

$$\varphi(X_i, X_j) = \varphi(P e_i, P e_j) = e_i^\top P^\top J_n P e_j.$$

Or  $P$  est symplectique donc  $P^\top J_n P = J_n$ , d'où :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, 2n\}^2, \varphi(X_i, X_j) = \varphi(e_i, e_j) = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n}$$

**Remarque :**

Réciproquement, si les colonnes  $X_1, \dots, X_{2n}$  de  $P \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  vérifient

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, 2n\}^2, \begin{cases} \|X_i\| = 1 \\ i \neq j \Rightarrow X_i \perp X_j. \\ \varphi(X_i, X_j) = \varphi(e_i, e_j) = \delta_{i+n, j} - \delta_{i, j+n} \end{cases}$$

Alors  $P$  soit orthogonale et par produit par blocs,  $P^\top J_n P = (\langle X_i, J_n X_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq 2n} = (\varphi(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq 2n} = J_n$ , donc  $P$  est symplectique.

**Q 14.** Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Soit  $Z \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ . On décompose  $Z$  sur la base orthonormée  $(X_1, X_2, \dots, X_{2n})$  :

$$Z = \sum_{j=1}^{2n} z_j X_j \text{ avec, pour tout } j \in \{1, \dots, 2n\}, z_j = \langle Z, X_j \rangle$$

On calcule, avec la bilinéarité de  $\varphi$  :

$$\varphi(X_i, Z) = \sum_{j=1}^{2n} z_j \varphi(X_i, X_j) = \sum_{j=1}^{2n} z_j (\delta_{i+n, j} - \delta_{i, j+n})$$

Or  $i \in \{1, \dots, n\}$ , donc pour tout  $j \in \{1, \dots, 2n\}$ ,  $\delta_{i, j+n} = 0$ . Dès lors :

$$\varphi(X_i, Z) = \sum_{j=1}^{2n} z_j \delta_{i+n, j} = z_{i+n} = \langle Z, X_{i+n} \rangle.$$

Cette dernière égalité prouve que  $Z \in X_i^{J_n}$  si, et seulement si  $Z$  est orthogonal à  $X_{i+n}$  :

$$\boxed{\forall i \in \{1, \dots, n\}, X_i^{J_n} = X_{i+n}^\perp}$$

**Q 15.** Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Les questions **Q 12.** et **Q 14.** montrent que  $X_{i+n}^\perp = (J_n X_i)^\perp$ .

Or pour tout  $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ ,  $(X^\perp)^\perp = (\text{Vect}(X)^\perp)^\perp = \text{Vect}(X)$ , donc  $\text{Vect}(J_n X_i) = \text{Vect}(X_{i+n})$ .

Par conséquent, il existe un réel  $\alpha$  tel que  $X_{i+n} = \alpha J_n X_i$ .

En utilisant la bilinéarité de  $\varphi$  et la question **Q 11.**,

$$\varphi(X_{i+n}, X_i) = \alpha \varphi(J_n X_i, X_i) = \alpha \|X_i\|^2 = \alpha$$

D'autre part, on a vu en **Q 13.** que  $\varphi(X_i, X_{i+n}) = \delta_{i+n, i+n} - \delta_{i, i+2n} = 1$ , donc vu que  $\varphi$  est antisymétrique,

$$\varphi(X_{i+n}, X_i) = -1$$

En définitive,  $X_{i+n} = \alpha J_n X_i$ , avec  $\alpha = -1$  :

$$\boxed{\forall i \in \{1, \dots, n\}, X_{i+n} = -J_n X_i}$$

**Remarque :**

Réciproquement, une matrice orthogonale dont les colonnes sont de la forme  $X_1, \dots, X_n, -J_n X_1, \dots, -J_n X_n$  est symplectique.

En effet, une telle matrice  $P$  est de la forme  $P = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ .

Un calcul par blocs montre que  $J_n P = P J_n$ , donc en multipliant à gauche par  $P^\top$ , et en utilisant que  $P$  est orthogonale, il vient  $P^\top J_n P = P^\top P J_n = J_n$ .

Cette remarque nous servira à la question **Q 24**.

**III Quelques généralités sur les matrices symplectiques.**

**Q 16.** Soit  $M \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ . On a donc  $M^\top J_n M = J_n$ .

Une matrice carrée et sa transposée ayant le même déterminant, il vient :

$$\det(M)^2 \det(J) = \det(J)$$

Or  $\det(J_n) \neq 0$  d'après **Q1**, donc  $\det(M)^2 = 1$  :

Le déterminant d'une matrice symplectique vaut soit 1 soit -1

**Remarque :** on peut montrer que le déterminant d'une matrice symplectique vaut toujours 1.

(voir le sujet Mines-Ponts PSI 2015, Maths 1).

**Q 17.** Soit  $M \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ . D'après la question précédente,  $M$  est inversible.

En multipliant la relation  $M^\top J_n M = J_n$  par  $M^{-1}$  à gauche et par  $(M^\top)^{-1}$  à droite, on obtient :

$$J_n = (M^\top)^{-1} J_n M^{-1} = (M^{-1})^\top J_n M^{-1}$$

ce qui prouve que  $M^{-1}$  est symplectique.

L'inverse d'une matrice symplectique est encore symplectique

**Q 18.** Soient  $M, N \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ .

$$(MN)^\top J (MN) = N^\top M^\top J M N = N^\top J N = J$$

Le produit de deux matrices symplectiques est symplectique.

Toute matrice symplectique étant inversible, la matrice nulle n'appartient pas à  $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ . En particulier :

$\text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$

## IV Réduction des matrices symétriques et symplectiques.

Soit  $M \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$ . On a donc  $MJ_nM = J_n$ .

**Q 19.** Supposons que  $\lambda$  soit valeur propre de  $M$ , et soit  $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$  un vecteur propre associé.

$M$  est inversible d'après **Q 16.**, donc  $\lambda \neq 0$ .

$$MJ_nX = MJ_n\left(\frac{1}{\lambda}MX\right) = \frac{1}{\lambda}MJ_nMX = \frac{1}{\lambda}J_nX.$$

De plus,  $X$  est non nul et  $J_n$  est inversible, donc  $J_nX \neq 0$ .

Ainsi  $J_nX$  est un vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre  $\frac{1}{\lambda}$ .

Si  $X$  est un vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre  $\lambda$ ,  
alors  $J_nX$  est un vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre  $\frac{1}{\lambda}$ .

**Q 20.** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M$ . La question **Q 19.** permet de définir l'application

$$f_\lambda : \begin{cases} E_\lambda(M) & \rightarrow & E_{1/\lambda}(M) \\ X & \mapsto & J_nX \end{cases}$$

▷  $f_\lambda$  est linéaire

▷  $f_\lambda$  est injective car  $J_n$  est inversible.

▷ Montrons que  $f_\lambda$  est surjective.

Soit  $Y \in E_{1/\lambda}(M)$ . D'après **Q.1**,  $Y = J_nX$  avec  $X = -J_nY$ .

On a  $MX = -MJ_nY = -MJ_n(\lambda MY) = -\lambda J_nY = \lambda X$  donc  $X \in E_\lambda(M)$  et  $f_\lambda(X) = J_nX = Y$ .

On a montré que  $f_\lambda$  est un isomorphisme de  $E_\lambda(M)$  sur  $E_{1/\lambda}(M)$ .

$E_\lambda(M)$  et  $E_{1/\lambda}(M)$  ont la même dimension.

Plus précisément, si  $(X_1, \dots, X_p)$  est une base de  $E_\lambda(M)$ , alors  $(J_nX_1, \dots, J_nX_p)$  est une base de  $E_{1/\lambda}(M)$

**Remarque :** vu que  $J_n$  est une matrice orthogonale, on peut même dire que si  $(X_1, \dots, X_p)$  est une base orthonormée de  $E_\lambda(M)$ , alors  $(J_nX_1, \dots, J_nX_p)$  est une base orthonormée de  $E_{1/\lambda}(M)$ .

**Q 21.** Soient  $Y_1, \dots, Y_p$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ .

Supposons que  $Y \in (\text{Vect}(Y_1, \dots, Y_p, J_nY_1, \dots, J_nY_p))^\perp$ .

Soit  $i \in \{1, \dots, p\}$ . On a donc  $\langle Y, Y_i \rangle = \langle Y, J_nY_i \rangle = 0$ .

La question **Q 8.** fournit :  $\langle J_nY, Y_i \rangle = -\langle Y, J_nY_i \rangle = 0$  et  $\langle J_nY, Y \rangle = 0$ .

De plus,  $J_n$  est une matrice orthogonale, donc  $\langle J_nY, J_nY_i \rangle = \langle Y, Y_i \rangle = 0$ .

Par conséquent,  $J_nY$  est orthogonal à tous les vecteurs de la famille  $(Y_1, \dots, Y_p, Y, J_nY_1, \dots, J_nY_p)$ , et donc  $J_nY \in (\text{Vect}(Y_1, \dots, Y_p, Y, J_nY_1, \dots, J_nY_p))^\perp$ .

Si  $Y \in (\text{Vect}(Y_1, \dots, Y_p, J_nY_1, \dots, J_nY_p))^\perp$ , alors  $J_nY \in (\text{Vect}(Y_1, \dots, Y_p, Y, J_nY_1, \dots, J_nY_p))^\perp$ .

**Q 22.** Le lemme suivant sera utilisé à plusieurs reprises par la suite :

**Lemme :** si un sous-espace  $F$  de  $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$  est stable par  $J_n$ , alors sa dimension est paire.

en effet, si  $F$  est stable par  $J_n$ , l'application  $J_F : \begin{cases} F \rightarrow F \\ X \mapsto J_n X \end{cases}$  est un endomorphisme de  $F$  qui vérifie  $J_F^2 = -\text{Id}_F$ , donc en prenant les déterminants :  $\det(J_F)^2 = (-1)^{\dim(F)} \geq 0$ .

Supposons que 1 soit valeur propre de  $M$ .

La question **Q 20.** montre que  $E_1(M)$  est stable par  $J_n$ , donc est de dimension paire d'après le lemme.

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\dim(E_1(M)) = 2p$ .

Montrons par récurrence sur  $k \in \{1, \dots, p\}$  la propriété

$\mathcal{P}_k : \left\{ \begin{array}{l} \ll \text{Il existe } X_1, \dots, X_k \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}) \text{ tels que } (X_1, \dots, X_k, J_n X_1, \dots, J_n X_k) \text{ soit} \\ \text{une famille orthonormée de } E_1(M) \gg \end{array} \right.$

▷  $\mathcal{P}_1$  est vraie : soit  $X$  un vecteur de  $E_1(M)$  de norme 1. D'après **Q 19.**,  $J_n X$  appartient à  $E_1(M)$ .

$J_n$  est antisymétrique donc  $\langle X, J_n X \rangle = 0$  et  $J_n$  est orthogonale, donc  $\|J_n X\| = \|X\| = 1$ .

Ainsi  $(X, J_n X)$  est une famille orthonormée de  $E_1(M)$ .

▷ Supposons que  $\mathcal{P}_k$  soit vraie pour un certain  $k \in \{1, \dots, p-1\}$ .

Soient  $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$  tels que  $(X_1, \dots, X_k, J_n X_1, \dots, J_n X_k)$  soit une famille orthonormée de  $E_1(M)$ .

Vu que  $2k < 2p$ ,  $(\text{Vect}(X_1, \dots, X_k, J_n X_1, \dots, J_n X_k))^\perp$  qui est de dimension  $2n - 2k > 2n - 2p$  n'est pas en somme directe avec  $E_1(M)$ , donc il existe un vecteur  $X_{k+1}$  dans  $E_1(M)$  de norme 1 tel que

$$X_{k+1} \in (\text{Vect}(X_1, \dots, X_k, J_n X_1, \dots, J_n X_k))^\perp.$$

La question **Q 21.** assure alors que  $J_n X_{k+1} \in (\text{Vect}(X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, J_n X_1, \dots, J_n X_k))^\perp$ .

De plus  $\|J_n X_{k+1}\| = \|X_{k+1}\| = 1$ , donc la famille  $(X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, J_n X_1, \dots, J_n X_k, J_n X_{k+1})$  est une famille orthonormée de  $E_1(M)$ . D'où  $\mathcal{P}_{k+1}$

Par récurrence,  $\mathcal{P}_k$  est vraie pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$  et  $\mathcal{P}_p$  fournit le résultat voulu.

Il existe une base orthonormée de  $E_1(M)$  de la forme  $(X_1, \dots, X_p, J_n X_1, \dots, J_n X_p)$

**Q 23.** Un raisonnement en tout point analogue montre que  $E_{-1}(M)$  est de dimension paire et qu'il existe une base orthonormée de  $E_{-1}(M)$  de la forme  $(X_1, \dots, X_p, J_n X_1, \dots, J_n X_p)$ .

**Q 24.** Supposons que les valeurs propres distinctes de  $M$  soient 1 et  $-1$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_s, 1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_s$  où  $|\lambda_1| < 1, \dots, |\lambda_s| < 1$ .

(le raisonnement s'adapte sans aucune difficulté dans les cas où 1 ou  $-1$  ne sont pas valeurs propres de  $M$  ou que  $M$  n'a pas de valeur propre de valeur absolue différente de 1).

Pour alléger, on note  $E_\lambda$  au lieu de  $E_\lambda(M)$ .

Le *théorème spectral* fournit :

$$\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}) = E_1 \oplus E_{-1} \oplus E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r} \oplus E_{1/\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{1/\lambda_r}$$

Il existe une base orthonormée de  $E_1$  de la forme  $(X_1, \dots, X_p, J_n X_1, \dots, J_n X_p)$ .

La famille  $(X_1, \dots, X_p, -J_n X_1, \dots, -J_n X_p)$  est encore une base orthonormée de  $E_1$ .

De même, il existe une base orthonormée de  $E_{-1}$  de la forme  $(Y_1, \dots, Y_q, -J_n Y_1, \dots, -J_n Y_q)$ .

Prenons enfin  $(Z_1, \dots, Z_r)$  une base orthonormée adaptée à  $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_s}$ .

D'après la remarque faite à la fin de **Q 20.**, la famille  $(-J_n Z_1, \dots, -J_n Z_r)$  une base orthonormée adaptée à  $E_{1/\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{1/\lambda_s}$ .

Soit  $P$  la matrice dont les colonnes sont (dans cet ordre) :

$$X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q, Z_1, \dots, Z_r, -J_n X_1, \dots, -J_n X_p, -J_n Y_1, \dots, -J_n Y_q, -J_n Z_1, \dots, -J_n Z_r$$

Les colonnes de  $P$  forment une base orthonormée de  $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$  donc  $P$  est orthogonale et la remarque faite à la fin de la partie II montre que  $P$  est aussi symplectique.

De plus, par construction de  $P$ , la matrice  $P^{-1}MP$  est diagonale de coefficients diagonaux  $d_1, \dots, d_{2n}$  où pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $d_{n+k} = 1/d_k$ .

la propriété annoncée au début de la partie IV est donc démontrée.

**Q 25.** Soit  $A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix}$  en posant  $B = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ .

On constate que  $A^\top = A$ .

D'autre part, notons  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . On a  $B = U + 8I_2$  et  $C = 3U$  et  $U^2 = 2U$ .

Donc  $B$  et  $C$  commutent et  $B^2 - C^2 = U^2 + 16U + 64I_2 - 9U^2 = 64I_2$ .

En faisant du produit par blocs, on obtient donc :

$$A^\top J_2 A = A J_2 A = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} BC - CB & B^2 - C^2 \\ C^2 - B^2 & BC - CB \end{pmatrix} = J_2$$

$A$  est symétrique et symplectique

**Q 26.** On reprend le raisonnement de **Q 24.** sur cet exemple.

On observe que  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et que  $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Posons  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

D'après **Q 19.**,  $-JX_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $-JX_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  sont des vecteurs propres de  $A$  respectivement associés aux valeurs propres 1 et 1/2.

Considérons la matrice :

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 & -1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

$P$  est orthogonale car ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$  et on vérifie que  $P^T J_2 P = J_2$ , c'est-à-dire que  $P$  est symplectique.

De plus, par la formule du changement de base :  $P^T A P = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$

## V Étude du cas des matrices antisymétriques.

Soit  $M \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ . On a donc  $MJ_n M = -J_n$ . On a déjà observé en **Q 8.** que

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}), \langle X, MY \rangle = X^T M Y = -\langle MX, Y \rangle \text{ et } \langle MX, X \rangle = 0.$$

**Q 27.** Raisonnons par l'absurde et supposons que  $M$  ait une valeur propre réelle  $\lambda$ .

Vu que  $M$  est symplectique, elle est inversible (**Q 16.**) et donc  $\lambda \neq 0$ .

Soit  $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$  non nul tel que  $MX = \lambda X$ .

On a  $0 = \langle MX, X \rangle = \lambda \|X\|^2$  avec  $X$  non nul, ce qui est absurde.

$$M \text{ n'a pas de valeur propre réelle}$$

**Q 28.**  $M$  est antisymétrique donc  $(M^2)^T = M^T M^T = (-M)^2 = M^2$  i.e.  $M^2 \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$ .

D'autre part,  $M^2$  est symplectique comme produit de deux matrices symplectiques (**Q 17.**).

Le résultat voulu découle donc de la partie IV.

Soit  $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$  un vecteur de norme 1 tel que  $M^2 X = \lambda X$ .

**Q 29.**  $\triangleright$  Tout d'abord, les matrices  $J_n$  et  $M$  étant inversibles, les trois vecteurs  $MX$ ,  $J_n X$  et  $J_n M X$  ne sont pas nuls.

$\triangleright M^2 M X = M(\lambda X) = \lambda M X$  donc  $M X$  est un vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre  $\lambda$

$\triangleright M^2 J_n X = M^2 J_n (\frac{1}{\lambda} M^2 X) = \frac{1}{\lambda} M^2 J_n M^2 X = \frac{1}{\lambda} J_n X$  car  $M^2$  est symplectique.

$$\triangleright M^2 J_n M X = M^2 J_n M \left(\frac{1}{\lambda} M^2 X\right) = \frac{1}{\lambda} M^2 J_n M^2 M X = \frac{1}{\lambda} J_n M X$$

Si  $X$  est un vecteur propre de  $M^2$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors  $M X$  est un vecteur propre de  $M^2$  associé à  $\lambda$  et  $J_n X$  et  $J_n M X$  sont des vecteurs propres de  $M^2$  associés à la valeur propre  $\frac{1}{\lambda}$

**Q 30.** Soit  $F = \text{Vect}(X, M X, J_n X, J_n M X)$ .

$\triangleright F$  est stable par  $M$  :

en effet,  $M X \in F$ ,  $M(M X) = M^2 X = \lambda X \in F$ ,

$M(J_n X) = M J_n \left(\frac{1}{\lambda} M^2 X\right) = \frac{1}{\lambda} M J_n M M X = \frac{-1}{\lambda} J_n M X \in F$  et  $M(J_n M X) = -J_n X \in F$ .

Soit alors  $Y \in F$ ;  $Y$  est combinaison linéaire de  $X, M X, J_n X, J_n M X$ , donc d'après les calculs ci-dessus,  $M Y$  est aussi combinaison linéaire de  $X, M X, J_n X, J_n M X$  donc appartient à  $F$ .

$\triangleright F$  est stable par  $J_n$  :

en effet,  $J_n X \in F$ ,  $J_n(M X) = J_n M X \in F$ ,  $J_n(J_n X) = -X \in F$  et  $J_n(J_n M X) = -M X \in F$ .

On en déduit comme précédemment que  $F$  est stable par  $J_n$ .

Si  $X$  est un vecteur propre de  $M^2$ , alors  $F = \text{Vect}(X, M X, J_n X, J_n M X)$  est stable par  $M$  et par  $J_n$ .

**Q 31.** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M^2$ . Il existe  $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $X \neq 0$  et  $M^2 X = \lambda X$ .

Vu que  $M$  est antisymétrique,  $\langle M^2 X, X \rangle = -\langle M X, M X \rangle = -\|M X\|^2$ .

D'autre part,  $\langle M^2 X, X \rangle = \lambda \|X\|^2$ .

Vu que  $X$  est non nul et  $M$  inversible, on a  $\|X\|^2 \neq 0$  et  $\|M X\|^2 > 0$  donc  $\lambda = -\frac{\|M X\|^2}{\|X\|^2} < 0$

Les valeurs propres de  $M^2$  sont strictement négatives

**Q 32.** Supposons  $\lambda \neq -1$ , donc  $\lambda \neq \frac{1}{\lambda}$ .

Les espaces propres d'une matrice symétrique réelle étant deux à deux orthogonaux,  $E_\lambda(M^2) \perp E_{1/\lambda}(M^2)$ .

Observons que  $\langle X, M X \rangle = 0$  car  $M$  est antisymétrique.

$J_n$  étant orthogonale, on a alors  $\langle J_n X, J_n M X \rangle = \langle X, M X \rangle = 0$ .

Par conséquent, la question **Q 29** montre que la famille  $(X, M X, J_n X, J_n M X)$  est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls, donc est libre. Autrement dit,

$F = \text{Vect}(X, M X, J_n X, J_n M X)$  est de dimension 4.

On vient d'observer que la famille  $\left(X, \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}} M X, -J_n X, \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_n M X\right)$  est orthogonale.

De plus,  $\left\|\frac{-1}{\sqrt{-\lambda}} M X\right\|^2 = \frac{1}{-\lambda} \langle M X, M X \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle M^2 X, X \rangle = \|X\|^2 = 1$

Enfin,  $J_n$  est orthogonale donc  $\|J_n X\| = \|X\| = 1$  et  $\left\|\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_n M X\right\| = \left\|\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} M X\right\| = 1$ .

La famille  $\left(X, \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}} M X, -J_n X, \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_n M X\right)$  est une base orthonormée de  $F$

$$\text{Enfin } \begin{cases} MX = -\sqrt{-\lambda} \left( \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}} MX \right) \\ M \left( \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}} MX \right) = \frac{-\lambda}{\sqrt{-\lambda}} X = \sqrt{-\lambda} X \\ M(-J_n X) = \frac{1}{\lambda} J_n MX = \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}} \left( \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_n MX \right) \text{ en utilisant Q 30.} \\ M \left( \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_n MX \right) = \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}} J_n X \end{cases}$$

La matrice de  $m_F$  dans la base orthonormée  $\left( X, \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}} MX, -J_n X, \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_n MX \right)$  est donc égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-\lambda} & 0 & 0 \\ -\sqrt{-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-\lambda} J_1 & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_1 \end{pmatrix}$$

**Remarque :** Dans la perspective de la question **Q 34.**, traitons le cas où  $\lambda = -1$ .

Soit  $X$  un vecteur unitaire tel que  $MX = -X$ .

Le sous-espace  $F = \text{Vect}(X, MX, J_n X, J_n MX)$  est stable par  $J_n$  donc d'après le **lemme** vu en **Q 22.**, la dimension de  $F$  est paire.

Vu que  $X$  et  $MX$  sont orthogonaux et non nuls, la dimension de  $F$  est donc égale à 2 ou 4.

▷ Si  $\dim(F) = 2$ , alors  $F = \text{Vect}(X, MX)$ , la famille  $(X, -MX)$  est une base orthonormée de  $F$  et la matrice de  $m_F$  dans cette base est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J_1$ .

▷ Si  $\dim(F) = 4$ , alors  $(X, -MX, -J_n X, J_n MX)$  est une base orthonormée de  $F$  et la matrice de  $m_F$  dans cette base orthonormée est  $\begin{pmatrix} J_1 & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & J_1 \end{pmatrix}$

**Q 33.** Montrons plus généralement que

$$\boxed{\text{Si } A \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}) \text{ stabilise un sous-espace } V, \text{ alors } A \text{ stabilise aussi } V^\perp.}$$

Démonstration : Soit  $Y \in V^\perp$ . Soit  $X \in V$ .  $A$  est antisymétrique, donc  $\langle AY, X \rangle = -\langle Y, AX \rangle$ .

Or  $A$  stabilise  $V$  donc  $AX \in V$  et  $\langle Y, AX \rangle = 0$ .

Ainsi  $AY$  est orthogonal à tout vecteur  $X$  de  $V$  c'est-à-dire  $AY \in V^\perp$ .

$$\boxed{\text{Les matrices } M \text{ et } J_n \text{ sont antisymétriques et stabilisent } F, \text{ donc elles stabilisent } F^\perp}$$

**Q 34.** • Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M^2$  et  $X_1$  un vecteur de norme 1 tel que  $M^2 X_1 = \lambda X_1$ .

Notons  $F_1 = \text{Vect}(X_1, MX_1, J_n X_1, J_n MX_1)$ .

On a vu en **Q 32.** et **Q 33.** que  $F_1$  est de dimension 2 ou 4, que  $F_1$  et  $F_1^\perp$  sont stables par  $M$  et  $J_n$  et qu'il existe une base orthonormée de  $F_1$  dans laquelle la matrice de  $m_{F_1}$  a une des deux formes indiquées.

- $\triangleright$  Si  $F_1^\perp = \{0\}$ , c'est terminé.
- $\triangleright$  Sinon,  $F_1^\perp$  est un sous espace stable par  $M$  donc par  $M^2$ . L'endomorphisme induit par  $m^2$  sur  $F_1^\perp$  est symétrique, donc il existe  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$  et  $X_2 \in F_1^\perp$ , tels que  $M^2 X_2 = \lambda_2 X_2$  et  $\|X_2\| = 1$ .  
Notons  $F_2 = \text{Vect}(X_2, MX_2, J_n X_2, J_n M X_2)$ .  
Avec **Q 32.** et **Q 33.**, il est immédiat que  $F_1$  et  $F_2$  vérifient les propriétés (b), (c), (e) et (f).  
De plus,  $F_1$  et  $F_2$  sont orthogonaux et si  $Y \in F_1, Z \in F_2$ , alors  $\varphi(Y, Z) = \langle Y, J_n Z \rangle = 0$  car  $J_n Z \in F_2$ .  
Donc  $F_1$  et  $F_2$  vérifient (d).

- Supposons avoir construit, pour un certain  $k \in \mathbb{N}^*$ , des sous-espaces  $F_1, \dots, F_k$  deux à deux orthogonaux (donc en somme directe) et vérifiant les propriétés (b) à (f).

- $\triangleright$  Si  $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_k = \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ , c'est terminé.
- $\triangleright$  Sinon  $G := (F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_k)^\perp$  est un sous-espace stable par  $M$  donc par  $M^2$ .  
L'endomorphisme induit par  $m^2$  sur  $G$  est symétrique, donc il existe  $\lambda_{k+1} \in \mathbb{R}$  et  $X_{k+1} \in G$ , tels que  $M^2 X_{k+1} = \lambda_{k+1} X_{k+1}$  et  $\|X_{k+1}\| = 1$ .  
Posons  $F_{k+1} = \text{Vect}(X_{k+1}, MX_{k+1}, J_n X_{k+1}, J_n M X_{k+1})$ .  
On vérifie comme précédemment que les sous-espaces  $F_1, \dots, F_k, F_{k+1}$  satisfont aux propriétés (b) à (f).

Vu que  $\dim(F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_k) \geq 2k$ , ce procédé de construction s'arrête au bout d'au plus  $n$  étapes, ce qui prouve le résultat voulu.

**Q 35.** Soit  $B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Posons  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On calcule  $B U = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  puis  $B^2 U = -4U$ .

$$B^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Q 36.** On applique **Q 32.** sur cet exemple, avec  $\lambda = -4$  et  $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On calcule donc  $\frac{-1}{2}BX = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $-J_2X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\frac{1}{2}J_2BX = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Considérons la matrice  $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$P$  est orthogonale car ses colonnes forment une base orthonormée.

De plus ses colonnes sont de la forme  $X_1, X_2, -J_2X_1, -J_2X_2$  donc  $P$  est symplectique (cf remarque à la fin de la partie II).

Enfin, on a vu en **Q 32.** que  $P^\top BP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

—FIN—