

Epreuve de MATHÉMATIQUES 3

Filière MP

durée 4 heures

Les parties I et II sont indépendantes entre elles et du reste du problème (à l'exception de la question III 4) .

Partie I : Étude de $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$, $n \in \mathbb{N}$.

- 1) (a) Rappeler l'énoncé d'un théorème (y compris l'évaluation du reste) permettant de montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^p}{p}$ est convergente, où $p \in \mathbb{N}^*$.
- b) À l'aide d'une suite géométrique montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

- 2) a) Par intégration par parties, montrer qu'il existe un entier $\beta \in \mathbb{N}^*$ et un réel k différent de 0 tel que :

$$R_n = k \frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + O\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right).$$

- b) En déduire la nature de la série de terme général R_n .
- 3) Déterminer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

Partie II : Étude de $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$, $n \in \mathbb{N}$.

- 1) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}}$.

a) Montrer qu'il existe un réel L tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(U_n - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} \right) = L + 2.$$

b) Soit θ un réel strictement supérieur à 1. Justifier l'existence de $\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}$ et en trouver un équivalent quand n tend vers l'infini.

2) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = U_n - 2\sqrt{n} - L$.

a) Étudier la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ et en déduire que v_n équivaut à $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini.

b) Déterminer un équivalent de $v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini; en déduire que U_n est de la forme :

$$U_n = A\sqrt{n} + B + \frac{C}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

3) a) Montrer qu'il existe un réel S tel que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} = S$.

b) Exprimer r_{2n} en fonction de S et des sommes partielles U_n et U_{2n} .

c) En déduire qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que :

$$r_{2n} = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Exprimer S en fonction de L et déterminer la nature de la série de terme général r_n .

Partie III : Étude de $q_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^x}$, $x \in]0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$.

On rappelle que la fonction gamma est définie par, $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{p^x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-pt} dt.$$

2) Vérifier que q_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que :

$$q_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-(n+1)t}}{1 + e^{-t}} dt.$$

3) En déduire que la série de terme général $q_n(x)$ converge, et mettre sa somme sous forme intégrale.

4) Retrouver le résultat de la question I 3).

Partie IV : Étude de $x_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p)$, $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, décroissante sur $]0, +\infty[$, de limite nulle en $+\infty$.

- 1) a) Donner un exemple d'une telle fonction f .
b) Montrer que x_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2x_n - (-1)^{n+1} f(n+1) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \left(f(p) - f(p+1) \right)$$

et en déduire que la série $\sum x_n$ est convergente.

- 3) On suppose de plus que $f(p)$ est équivalent à $f(p+1)$ lorsque p tend vers l'infini. Déterminer un équivalent de x_n lorsque n tend vers l'infini.

Partie V : Étude de $q_0(x)$.

- 1) Montrer que q_0 est continue sur $]0, +\infty[$.
- 2) Montrer que q_0 est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Énoncer avec précision le théorème utilisé.
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} q_0(x)$.
- 4) Dédire du IV 2) que q_0 admet un prolongement continu à $[0, +\infty[$ encore noté q_0 .
- 5) a) Montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad q_0(x) = q_0(0) + \frac{x}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \int_p^{p+1} \frac{dt}{t^{x+1}}.$$

- b) En déduire que q_0 est dérivable en 0 et déterminer $q'_0(0)$ en fonction de $\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right)$.

- 6) Déterminer $\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right)$.

a) Montrer qu'il existe un réel L tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(U_n - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} \right) = L + 2.$$

b) Soit θ un réel strictement supérieur à 1. Justifier l'existence de $\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}$ et en trouver un équivalent quand n tend vers l'infini.

2) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = U_n - 2\sqrt{n} - L$.

a) Étudier la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ et en déduire que v_n équivaut à $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini.

b) Déterminer un équivalent de $v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini ; en déduire que U_n est de la forme :

$$U_n = A\sqrt{n} + B + \frac{C}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

3) a) Montrer qu'il existe un réel S tel que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} = S$.

b) Exprimer r_{2n} en fonction de S et des sommes partielles U_n et U_{2n} .

c) En déduire qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que :

$$r_{2n} = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Exprimer S en fonction de L et déterminer la nature de la série de terme général r_n .

Partie III : Étude de $q_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^x}$, $x \in]0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$.

On rappelle que la fonction gamma est définie par, $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{p^x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-pt} dt.$$

2) Vérifier que q_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que :

$$q_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-(n+1)t}}{1 + e^{-t}} dt.$$

3) En déduire que la série de terme général $q_n(x)$ converge, et mettre sa somme sous forme intégrale.

4) Retrouver le résultat de la question I 3).