# MINES-PONTS 2004 Maths 2

## Problème 1 : Étude des fonctions harmoniques du plan.

**Quelques exemples de fonctions harmoniques :**

1. (a) Fonction exponentielle : La fonction $f : (x,y) \to \exp x\ (\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le plan $\mathbb{R}^2$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathrm{i}^2 f$. Donc $\Delta f = 0$, i.e. $f$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Fonctions puissances : La fonction $g_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Si $n \leq 1$, alors $\frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g_n}{\partial y^2} = 0$. Sinon, $\frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2} = n(n-1)g_{n-2}$ et $\frac{\partial^2 g_n}{\partial y^2} = \mathrm{i}^2 n(n-1)g_{n-2}$. Dans tous les cas, $\Delta g_n = 0$, i.e. $g_n$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

2. Fonctions radiales : Si $u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$, alors $h : (x,y) \to u(\sqrt{x^2+y^2})$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. En posant $r = \sqrt{x^2+y^2}$, on a $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{r}u'(r)$, puis $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{r}u'(r) - \frac{x^2}{r^3} + \frac{x^2}{r^2}u''(r)$, enfin par symétrie, $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{r}u'(r)$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{r}u'(r) - \frac{y^2}{r^3} + \frac{y^2}{r^2}u''(r)$. Donc $\Delta h(x,y) = \frac{1}{r}u'(r) + u''(r)$.
   Alors $h$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ si et seulement si $u'$ est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle $z' + \frac{1}{r}z = 0$, i.e. si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u' : r \to \frac{k}{r}$, i.e. si et seulement s'il existe $k, c \in \mathbb{R}$ tels que $u : r \to k\ln r + c$.

3. Si $v$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors $k : (x,y) \to v(\frac{y}{x})$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus y'Oy$. En posant $t = \frac{y}{x}$, on a $\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2}v(t)$, $\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x,y) = 2\frac{y}{x^3}v'(t) + \frac{y^2}{x^4}v''(t)$, $\frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}v'(t)$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{x^2}v''(t)$. Donc $\Delta k(x,y) = \frac{1}{x^2}[2tv'(t) + (t^2+1)v''(t)$.
   Alors la fonction $k$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}, (t^2+1)v''(t) + 2tv'(t) = 0$, i.e. si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, (t^2+1)v'(t) = k$, i.e. si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, v'(t) = \frac{k}{t^2+1}$, i.e. si et seulement s'il existe $k, c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, v(t) = k\arctan t + c$.

4. Soit $K$ un fermé borné du plan, i.e. un compact du plan. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (x,y) \in K, |x+iy| \leq C$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in K, |u_n(x,y)| \leq \frac{C^n}{(2n)!} \leq \frac{C^n}{n!} = \alpha_n$. Comme la série $\sum \alpha_n$ est une série convergente indépendante de $(x,y)$, la série $\sum u_n$ converge normalement, donc converge uniformément sur $K$.
   On en déduit la convergence simple sur le plan. De plus comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_n$ est continue sur le plan, la convergence uniforme sur tout compact du plan prouve la continuité de la somme $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sur le plan.

5. On va montrer que $\varphi$ admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 continues sur le plan.
   Existence des dérivées partielles : on fixe $y \in \mathbb{R}$ et on étudie la série de fonctions $\sum u_{y,n}$ où $u_{y,n} : x \to u_n(x,y)$.
   – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_{y,n}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'_{y,n}(x) = (-1)^n n\frac{(x+\mathrm{i}y)^{n-1}}{(2n)!}$ et $u''_{y,n}(x) = (-1)^n n(n-1)\frac{(x+\mathrm{i}y)^{n-2}}{(2n)!}$.
   – Les séries $\sum u_{y,n}$, $\sum u'_{y,n}$ et $\sum u''_{y,n}$ convergent simplement et même absolument sur $\mathbb{R}$ : $\left|u'_{y,n}(x)\right| = n\frac{(\sqrt{x^2+y^2})^{n-1}}{(2n)!} \leq \frac{(\sqrt{x^2+y^2})^{n-1}}{(n-1)!}$ et $\left|u''_{y,n}(x)\right| = n(n-1)\frac{(\sqrt{x^2+y^2})^{n-2}}{(2n)!} \leq \frac{(\sqrt{x^2+y^2})^{n-2}}{(n-2)!}$.
   – La série $\sum u''_{y,n}$ converge uniformément sur tout segment $[-a,a] \subset \mathbb{R}$ : $\forall n \geq 2, \forall x \in [-a,a], \left|u''_{y,n}(x)\right| \leq \frac{(\sqrt{a^2+y^2})^{n-2}}{(n-2)!}$ et la série $\sum \frac{(\sqrt{a^2+y^2})^{n-2}}{(n-2)!}$ est indépendante de $x$ et converge.

   On déduit du théorème de dérivation terme à terme que la somme de la série $\sum u_{y,n}$, i.e. la fonction $\varphi_y : x \to \varphi(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi'_y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_{y,n}(x)$ et $\varphi''_y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u''_{y,n}(x)$.
   Finalement $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ existent sur $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$.
   On obtient de même l'existence et la valeur de $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ et, de manière presque identique, de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$.
   On remarque que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \mathrm{i}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$.

   Continuité des dérivées partielles secondes : il suffit de la prouver pour $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$. On procède comme à la question 4. Avec les notations de la question 4 : $\forall n \geq 2, \forall (x,y) \in K, \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,y)\right| \leq n(n-1)\frac{C^{n-2}}{(2n)!} \leq \frac{C^{n-2}}{(n-2)!} = \beta_n$ et

$\sum \beta_n$ est une série convergente. La série $\sum \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ converge uniformément sur $K$. La convergence uniforme de la série $\sum \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ sur tout compact du plan et la continuité de son terme général sur le plan assure la continuité de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$.
Finalement $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le plan.
L'égalité $\Delta\varphi = 0$ a déjà été vérifiée. La fonction $\varphi$ est donc harmonique sur le plan.

**Principe du maximum :**

6. $D$ est un fermé borné du plan donc un compact du plan et $f_p$ est continue. Donc $f_p$ admet un maximum sur $D$, en un point $M_p = (a_p, b_p)$.
7. Si $M_p$ est à l'intérieur de $D$ : en notant $g : \mathbb{R} \ni x \to f_p(x, b_p)$, $g$ admet un maximum local en $a_p$ ; or $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ ; donc $g'(a_p) = 0$ et, au voisinage de $a_p$, $g(x) = g(a_p) + \frac{1}{2}(x - a_p)^2 g''(a_p) + o((x - a_p)^2)$ ; donc $g''(a_p) \leq 0$. Comme $g''(x) = \frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(x, b_p)$, on obtient $\frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(a_p, b_p) \leq 0$.
   On obtient, en intervertissant les variables, $\frac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(a_p, b_p) \leq 0$.
8. Or $\Delta f_p = \Delta f + \frac{4}{p} = \frac{4}{p} > 0$. Donc la situation décrite à la question précédente est impossible. On en déduit que $f_p$ atteint son maximum sur $D$ uniquement sur son bord $C$.
9. Le cercle $C$ est compact. On peut donc extraire de la suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(M_{\phi(p)}\right)$ convergeant vers $M = (a, b) \in C$. Comme $\forall (x, y) \in D, \forall p \in \mathbb{N}, f_{\phi(p)}(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{\phi(p)}(x^2 + y^2) \leq f_{\phi(p)}(M_{\phi(p)}) = f(M_{\phi(p)}) + \frac{r^2}{\phi(p)}$, on obtient, en faisant tendre $p$ vers $+\infty$ à $(x, y)$ fixé, $\forall (x, y) \in D, f(x, y) \leq f(M) = f(a, b)$.
10. On note $f_1$ et $f_2$ les deux fonctions harmoniques du plan égales sur $C$ et $f = f_1 - f_2$ leur différence. $f$ est harmonique sur le plan et nulle sur $C$, donc $f$ est négative sur $D$. Le même raisonnement s'applique à $-f$ : $-f$ est négative sur $D$. Finalement $f$ est nulle sur $D$, i.e. $f_1$ et $f_2$ sont égales sur $D$.

**Propriété de la moyenne :**

11. La fonction $\psi : (\rho, \theta) \to f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)$ est continue sur le domaine $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$. Donc $F$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
12. Comme $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le plan, la fonction $\psi$ admet une dérivée partielle par rapport à la variable $\rho$ : $\frac{\partial \psi}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)$ et cette dérivée partielle est continue sur le domaine $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$. On déduit du théorème de dérivation sous l'intégrale que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que $F'(\rho) = \int_0^{2\pi} \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)\ \mathrm{d}\theta$.
13. En notant $A = -\frac{\partial f}{\partial y}$, $B = \frac{\partial f}{\partial x}$ et la forme différentielle $\alpha = A\ \mathrm{d}x + B\ \mathrm{d}y$, alors $\rho F'(\rho)$ est l'intégrale curviligne de $\alpha$ sur le cercle $\Gamma$ de centre $M_0$, de rayon $\rho$, parcouru une fois dans le sens positif.
14. La forme différentielle $\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le plan, qui est un ouvert étoilé, et elle est fermée : $\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = \Delta f = 0$. D'après le théorème de Poincaré, elle est donc exacte et son intégrale sur le cercle est nulle. Donc $\rho F'(\rho) = 0$. Donc $F'$ est nulle sur $]0, +\infty[$ et, par continuité, sur $[0, +\infty[$. On en déduit que $F$ est constante sur $\mathbb{R}^+$ : $F = F(0) = 2\pi f(x_0, y_0)$.
15. On calcule l'intégrale double par passage en polaires d'origine $M_0$ :
    $I = \int_0^r \left\{\int_0^{2\pi} f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)\ \mathrm{d}\theta\right\} \rho \mathrm{d}\rho = \int_0^r F(\theta)\rho \mathrm{d}\rho = \int_0^r 2\pi f(x_0, y_0)\rho \mathrm{d}\rho = \pi r^2 f(x_0, y_0)$.

**Fonctions harmoniques bornées dans le plan :**

16. Soit $D$ le disque inclus dans $D_1 \cap D_2$, de centre le milieu de $[O, M_0]$ et de rayon maximum. Son diamètre vaut $d + 2(r - d) = 2r - d$. On a $\text{aire}(L_2) = \text{aire}(D_2) - \text{aire}(D_1 \cap D_2) \leq \text{aire}(D_2) - \text{aire}(D) = \pi r^2 - \pi(r - \frac{d}{2})^2 = \pi r d - \pi \frac{d^2}{4} \leq \pi r d$.
17. On note $L_1$ l'ensemble des points de $D_1$ qui ne sont pas dans $D_2$. Alors $\text{aire}(L_1) = \text{aire}(L_2)$.
    $\pi r^2(f(O) - f(M_0)) = \iint_{D_1} f\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_2} f\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{L_1} f\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{L_2} f\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. On en déduit que $\pi r^2 |f(O) - f(M_0)| \leq \iint_{L_1} |f|\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{L_2} |f|\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq C.\text{aire}(L_1) + C.\text{aire}(L_2) \leq 2C\pi r d$. D'où la majoration $|f(O) - f(M_0)| \leq 2Cd/r$ valable pour tout $r > 0$. Donc $|f(O) - f(M_0)| \leq 0$. Finalement $f(M_0) = f(O)$, i.e. $f$ est constante.

## Problème 2 :
## Difféomorphismes du plan transformant une suite de $n$ points en une autre suite de $n$ points.

**Un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ :**

18. La fonction $\varphi_I$ est la composée de l'exponentielle et d'une fonction rationnelle sans pôle dans $I$, donc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
S'il existe un polynôme $P_n$ tel que $\forall t \in I, \varphi_I^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(t^2-1)^{2n}} \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right)$, alors $\forall t \in I$,
$$\begin{aligned}\varphi_I^{(n+1)}(t) &= \left(\frac{P_n'(t)}{(t^2-1)^{2n}} + P_n(t)\frac{-2n.2t}{(t^2-1)^{2n+1}} + \frac{P_n(t)}{(t^2-1)^{2n}}.\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\right)\exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{(t^2-1)^2P_n'(t) - 4nt(t^2-1)P_n(t) - 2tP_n(t)}{(t^2-1)^{2(n+1)}}\exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right).\end{aligned} \tag{1}$$
Donc, avec le polynôme $P_{n+1}(t) = (t^2-1)^2P_n'(t) - 4nt(t^2-1)P_n(t) - 2tP_n(t)$, on obtient :
$$\forall t \in I, \varphi_I^{(n+1)}(t) = \frac{P_{n+1}(t)}{(t^2-1)^{2(n+1)}}\exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right).$$
Comme $\forall t \in I, \varphi_I^{(0)}(t) = \varphi_I(t) = \frac{P_0(t)}{(t^2-1)^{2.0}}\exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right)$ avec $P_0 = 1$ :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \forall t \in I, \varphi_I^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(t^2-1)^{2n}}\exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right).$$

19. La fonction $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ses restrictions à $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi^{(n)}$ a pour limite 0 en 1 et en -1 (en 1 à gauche et en -1 à droite par croissances comparées). Donc $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Comme $\varphi'$ est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors du compact $[-1,1]$, elle est bornée sur $\mathbb{R}$. D'où l'existence de $M = \sup\limits_{\mathbb{R}} |\varphi'|$.

20. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\psi_\lambda$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \psi_\lambda'(x) = 1 + \lambda\varphi'(x)$. Comme $|\lambda\varphi'(x)| \leq |\lambda|M$, si $|\lambda| < 1/M$, alors $\psi_\lambda'(x) \geq 1 - |\lambda|M > 0$ et la fonction $\psi_\lambda$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Mieux, c'est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\psi_\lambda(\mathbb{R}) = ]\lim\limits_{-\infty}\psi_\lambda, \lim\limits_{+\infty}\psi_\lambda[$.
De plus, si $x \notin [-1,1], \psi_\lambda(x) = x$. Donc $\lim\limits_{+\infty}\psi_\lambda = +\infty$. De même que $\lim\limits_{-\infty}\psi_\lambda = -\infty$. Donc la fonction $\psi_\lambda$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

**Difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ :**

21. Par la fonction $\theta_{\lambda,r}^P$, le point $P$ est envoyé sur le point de coordonnées $(p + \frac{\lambda}{\mathrm{e}}, q)$. En notant $M = (x,y)$ et $PM$ la distance usuelle de $P$ à $M$, on a $\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{r^2} = \frac{PM^2}{r^2}$ et $\varphi(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{r^2}) = 0$ dès que $PM \geq r$. Donc la fonction $\theta_{\lambda,r}^P$ fixe tout point hors du disque ouvert de centre $P$ et de rayon $r$ ; en particulier les points du cercle $C_r^P$ et de l'ouvert $\Omega_r^P$.

**Existence de difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ :**

22. Comme $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $\theta_{\lambda,r}^P$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le plan $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème d'inversion globale, il suffit que la fonction $\theta_{\lambda,r}^P$ soit bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et que son jacobien ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$ pour que ce soit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
<u>Étude du jacobien</u> : au point $(x,y)$, il vaut :
$J(x,y) = \det\begin{pmatrix} 1 + \lambda\frac{2(x-p)}{r^2}\varphi'\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{r^2}\right) & *** \\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1 + \lambda\frac{2(x-p)}{r^2}\varphi'\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{r^2}\right).$
Si $(x-p)^2 + (y-q)^2 \geq r^2$, alors $J(x,y) = 1$ ; sinon $|x-p| \leq r$, donc $\left|\lambda\frac{2(x-p)}{r^2}\varphi'\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{r^2}\right)\right| \leq \frac{2|\lambda|M}{r}$, donc $J(x,y) \geq 1 - \frac{2|\lambda|M}{r}$.

Finalement, sur tout le plan, $J(x,y) \geq 1 - \frac{2|\lambda|M}{r}$.
Donc, si on choisit $\lambda$ et $r$ tels que $1 - \frac{2|\lambda|M}{r} > 0$, i.e. $|\lambda| < \frac{r}{2M}$, le jacobien $J$ ne s'annule pas sur le plan.
Bijectivité de $\theta^P_{\lambda,r}$ sous cette condition en $\lambda$ :
Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(X,Y) = \theta^P_{\lambda,r}(x,y)$. Or

$$\begin{aligned}(X,Y) = \theta^P_{\lambda,r}(x,y) &\Leftrightarrow X = x + \lambda\varphi\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{r^2}\right) \text{ et } Y = y \\ &\Leftrightarrow y = Y \text{ et } X = f(x)\end{aligned} \tag{2}$$

où $f(x) = x + \lambda\varphi\left(\frac{(x-p)^2+(Y-q)^2}{r^2}\right)$. Il suffit donc de montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ pour obtenir l'existence et l'unicité de $(x,y)$ tel que $(X,Y) = \theta^P_{\lambda,r}(x,y)$.
La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f'(x) = 1 + \lambda\frac{2(x-p)}{r^2}\varphi'\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{r^2}\right) \geq 1 - \frac{2|\lambda|M}{r}$. Comme $1 - \frac{2|\lambda|M}{r}$ est une constante strictement positive, $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ; mieux, $f$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. Au voisinage de l'infini, $\frac{(x-p)^2+(Y-q)^2}{r^2} > 1$, donc $f(x) = x$ et, comme à la question 20, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $f$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Finalement, sous la condition $|\lambda| < \frac{r}{2M}$, la fonction $\theta^P_{\lambda,r}$ est bijective du plan sur lui-même. Avec l'étude du jacobien, $\theta^P_{\lambda,r}$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

23. L'application $\theta^B_{\lambda,r}$ transforme $B$ en $B'$ dès que $b' = b + \frac{\lambda}{\mathrm{e}}$, i.e. $\lambda = \mathrm{e}(b'-b)$. C'est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme du plan si $|\lambda| < \frac{r}{2M}$. Elle laisse les points $A_i$ invariants dès que $\forall i, BA_i \geq r$, i.e. $r \leq \min\limits_{1\leq i\leq n} BA_i$.
Il suffit donc de trouver un couple $(\lambda, r)$ tel que $\lambda = \mathrm{e}(b'-b)$ et $2M|\lambda| < r \leq \min\limits_{1\leq i\leq n} BA_i$, i.e. $\lambda = \mathrm{e}(b'-b)$ et $2M\mathrm{e}|b'-b| < r \leq \min\limits_{1\leq i\leq n} BA_i$. C'est possible dès que $2M\mathrm{e}|b'-b| < \min\limits_{1\leq i\leq n} BA_i$, i.e. $|b'-b| < \frac{\min\limits_{1\leq i\leq n} BA_i}{2M\mathrm{e}}$.
On pose alors $\lambda = \mathrm{e}(b'-b)$ ; on choisit $r$ dans l'intervalle $]2M\mathrm{e}|b'-b|, \min\limits_{1\leq i\leq n} BA_i]$ : l'application $\theta^B_{\lambda,r}$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme du plan transformant $B$ en $B'$ et conservant les points $A_i$.
Remarque : on peut remplacer $\min\limits_{1\leq i\leq n} BA_i$ par $\min\limits_{1\leq i\leq n} |y_i - c|$ sans changement.

24. On partage le segment $[B, B']$ en $k+1$ sous-segments de sorte que $\frac{|b'-b|}{k+1} < \frac{\min\limits_{1\leq i\leq n} |y_i-c|}{2M\mathrm{e}}$. On note $B_i$ le point de coordonnées $(b + i\frac{b'-b}{k+1}, 0)$. Les couples $(B_i, B_{i+1})$ vérifient les hypothèses de la question 23 : $B_iB_{i+1} = \frac{|b'-b|}{k+1} < \frac{\min\limits_{1\leq i\leq n} |y_i-c|}{2M\mathrm{e}}$. On pose alors $\lambda = \mathrm{e}\frac{(b'-b)}{k+1}$ ; on choisit $r$ dans l'intervalle $]2M\mathrm{e}\frac{|b'-b|}{k+1}, \min\limits_{1\leq i\leq n} |y_i - c|]$ : l'application $\theta^{B_i}_{\lambda,r}$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme du plan transformant $B_i$ en $B_{i+1}$ et conservant les points $A_j$. L'application $F = \theta^{B_k}_{\lambda,r} \circ \ldots \circ \theta^{B_1}_{\lambda,r} \circ \theta^{B_0}_{\lambda,r}$ est alors un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme du plan transformant $B$ en $B'$ et conservant les points $A_j$.

25. On échange le rôle des coordonnées : on utilise l'application $\eta^P_{\lambda,r}$ définie par $\eta^P_{\lambda,r}(x,y) = \left(x, y + \lambda\varphi\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{r^2}\right)\right)$.

26. Deux cas :
Cas particulier : aucun point $A_i$ n'appartient à la droite $(BB')$.
On se ramène au cas étudié dans la question 24 par rotation. On note $\theta$ l'angle entre l'axe $y = 0$ et la droite $(BB')$ et, pour $\tau \in \mathbb{R}$, on note $R_\tau$ la rotation d'angle $\tau$ autour de l'origine. Les points $\hat{B} = R_{-\theta}(B)$ et $\hat{B}' = R_{-\theta}(B')$ et la suite finie constituée des points $\hat{A}_i = R_{-\theta}(A_i)$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ sont dans la configuration de la question 24. On considère un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme du plan : $F$, transformant $\hat{B}$ en $\hat{B}'$ et conservant les points $\hat{A}_i$. Soit $G = R_\theta \circ F \circ R_{-\theta}$. Comme les rotations sont des $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphismes du plan, $G$ aussi et $G$ transforme $B$ en $B'$ et conserve les points $A_i$.
Cas général : on utilise un point $A$ tel qu'aucun point $A_i$ n'appartienne aux droites $(BA)$ et $(AB')$.
D'après le cas particulier, il existe des $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphismes du plan $F_1$ et $F_2$ conservant les points $A_i$ et transformant respectivement $B$ en $A$ et $A$ en $B'$. L'application $F_2 \circ F_1$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme du plan conservant les points $A_i$ et transformant $B$ en $B'$.
Existence de $A$ : il suffit de choisir $A$ sur le cercle $(C)$ de diamètre $[B, B']$ autre que $B$, $B'$, et les points (en nombre fini) d'intersection du cercle $(C)$ et des droites $(BA_i)$ et $(B'A_i)$.

**Difféomorphisme transformant une suite de $n$ points en une autre suite de $n$ points :**

27. On procède par récurrence sur $n$.

La propriété est évidente si $n = 1$ : on peut utiliser la translation de vecteur $\overrightarrow{A_1 A'_1}$.

On suppose la propriété vraie pour deux suites quelconques contituées chacune de $n$ points distincts.

Soient deux suites quelconques contituées chacune de $n + 1$ points distincts : $A_1, \ldots, A_{n+1}$ et $A'_1, \ldots, A'_{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme du plan : $f$, tel que $\forall i \leq n, f(A_i) = A'_i$. Si le point $A = f(A_{n+1})$ est le point $A'_{n+1}$, c'est terminé. Sinon, $A$ est distinct des points $A'_i$ avec $i \leq n$ ($f$ injective) et, d'après la question 26, il existe un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme du plan : $g$ conservant les points $A'_i$ avec $i \leq n$ et transformant $A$ en $A'_{n+1}$. Alors $g \circ f$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme du plan transformant la suite $A_1, \ldots, A_{n+1}$ en la suite $A'_1, \ldots, A'_{n+1}$. Ce qui achève la récurrence.