

CCP MP1 2018
Un corrigé

1 “Permutation limite-intégrale” et intégrales de Gauss

1.1 Utilisation d’une série entière

Q.1. La fonction $\exp$ est développable en série entière entière de rayon de convergence infini et

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

En utilisant ceci avec x^2 , on en déduit que

$$I = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)} dx$$

$f_n : x \mapsto (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)}$ est continue sur $[0, 1]$ et $\|f_k\|_{\infty} = \frac{1}{k!}$ est le terme général d’une série convergente. Ainsi, $\sum (f_k)$ converge normalement sur le SEGMENT $[0, 1]$. On est dans le cas simple où l’interversion somme-intégrale est licite. Elle donne

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^{2k} dx$$

Le calcul de l’intégrale est immédiat et on trouve

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$$

Q.2. $u_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$ est le terme général d’une suite alternée, décroissante en module et convergente de limite nulle. La règle spéciale s’applique à la série $\sum (u_k)$. Elle indique que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$$

Ceci s’écrit exactement

$$|I - s_n| \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$$

Q.3.

```
def factorielle(n):  
    if n==0: return 1  
    else: return (factorielle (n-1))*n
```

Q.4. On calcule les termes u_k définis en question 2 tant le module du terme est inférieur à 10^{-6} .

```
def u(k):  
    return (-1)**k/((2*k+1)*factorielle(k))  
  
k=0  
while abs(u(k))>10**(-6):  
    k=k+1  
  
print(k)
```

1.2 Utilisation d'une autre suite de fonctions

Q.5. Soit $x \geq 0$. $x^2/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ et il existe donc un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $0 \leq \frac{x^2}{n} \leq \frac{1}{2}$.
Pour ces n , $1 - \frac{x^2}{n} > 0$ et donc

$$\forall n \geq n_0, f_n(x) = \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{x^2}{n} \right) \right)$$

Le terme dans l'exponentielle équivaut, quand $n \rightarrow +\infty$, à $n \times \left(-\frac{x^2}{n} \right) = -x^2$ et tend donc vers $-x^2$. Par continuité de l'exponentielle, on a donc $f_n(x) \rightarrow e^{-x^2}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

$$(f_n) \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}^+ \text{ vers } x \mapsto e^{-x^2}$$

Q.6. Par concavité de la fonction logarithme,

$$\forall u > -1, \ln(1+u) \leq u$$

Soit $x \in [0, 1]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x^2/n \in [0, 1]$. Si $x^2/n \in [0, 1[$ alors (croissance de $\exp$ et notre inégalité de concavité)

$$f_n(x) = \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{x^2}{n} \right) \right) \leq e^{-x^2}$$

et le résultat reste vrai si $x^2/n = 1$ ($0 \leq e^{-x^2}$ dans ce cas). Ainsi

$$\forall x \in [0, 1], |f_n(x)| \leq e^{-x^2}$$

Utilisons alors le théorème de convergence dominée.

- (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction continue sur $[0, 1]$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], |f_n(x)| \leq e^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, 1]$ puisque continue sur le SEGMENT.

Le théorème s'applique et donne

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{n} \right)^n dx$$

On développe la puissance par formule du binôme et par linéarité du passage à l'intégrale,

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{n} \right)^k dx$$

Le calcul de l'intégrale est immédiat et on trouve

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k (2k+1)}$$

2 Notion de polynôme interpolateur

2.1 Existence du polynôme interpolateur

Q.7. x_k est racine de l_i pour $i \neq k$ et $l_i(x_i) = 0$, c'est-à-dire

$$l_i(x_k) = \delta_{i,k}$$

On en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_n(f)(x_k) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \delta_{i,k} = f(x_k)$$

$L_n(f)$ interpole donc f aux points $x_0, \dots, x_n$.

Si P est un autre polynôme interpolateur alors $P - L_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ s'annule aux points $x_0, \dots, x_n$. C'est un polynôme de degré $\leq n$ ayant au moins $n + 1$ racines et c'est donc le polynôme nul.

$L_n(f)$ est l'unique polynôme interpolateur de f aux points $x_0, \dots, x_n$

2.2 Calcul effectif du polynôme interpolateur de Lagrange

Q.8. Une première fonction `l(i,x,a)` permet le calcul de $l_i(a)$ associé aux x_k .

```
def l(i,x,a):
    r=1
    for k in range(len(x)):
        if k!=i:
            r=r*(a-x[k])/(x[i]-x[k])
    return r
```

Il reste à calculer la somme définissant L_n associé aux y_i .

```
def lagrange(x,y,a):
    s=0
    for i in range(len(x)):
        s=s+l(i,x,a)*y[i]
    return s
```

Q.9. La matrice cherchée est une matrice de Vandermonde :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

On peut d'ailleurs noter que d'après le cours cette matrice est inversible quand les x_i sont deux à deux distincts ce qui permet de prouver à nouveau l'existence et l'unicité d'un polynôme interpolateur.

Dans la résolution par méthode de Gauss,

- on cherche un pivot sur la colonne 1 que l'on ramène en position 1 (n opérations) et on fait apparaître des zéros par $n - 1$ combinaisons de lignes ($O(n^2)$ opérations)
- on procède de même avec les colonnes $2, \dots, n + 1$ pour à chaque fois $O(n^2)$ opérations
- on en déduit $x_{n+1}, \dots, x_0$ en $O(1 + 2 + \dots + (n + 1)) = O(n^2)$ opérations.

La complexité du calcul est $O(n^3)$

2.3 Expression de l'erreur d'interpolation

Q.10. Montrons par récurrence (finie) que la propriété : " $\phi^{(k)}$ s'annule $p + 1 - k$ fois" est vraie pour $k = 0, \dots, p$.

- Le résultat est vrai au rang 0 par hypothèse sur ϕ .
- Soit $k \in \llbracket 0, p - 1 \rrbracket$ tel que le résultat soit vrai au rang k . On note $y_1 < \dots < y_{p+1-k}$ des points d'annulation de $\phi^{(k)}$. Par théorème de Rolle appliqué à $\phi^{(k)}$, $\phi^{(k+1)}$ s'annule sur $]y_i, y_{i+1}[$ pour $i = 1, \dots, p - k$. $\phi^{(k+1)}$ admet donc au moins $p - k$ annulations et le résultat est vrai au rang $k + 1$.

On en déduit en particulier (propriété au rang p) que $\phi^{(p)}$ s'annule. Ce zéro est strictement entre le minimum et le maximum des éléments de σ et donc dans $]a, b[$.

si $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s'annule $p + 1$ fois, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi^{(p)}(c) = 0$.

Q.11. $f - L_n(f)$ ainsi que π_σ s'annulent en tout point de σ . Pour $x \in \sigma$, $\mathcal{P}_x$ est donc vraie (on peut choisir pour c_x n'importe quel élément de $]a, b[$).

pour tout $x \in \sigma$, la propriété $\mathcal{P}_x$ est vraie

Q.12. Comme $x \notin \sigma$, $\pi_\sigma(x) \neq 0$ et on peut donc poser

$$\lambda = \frac{f(x) - L_n(f)(x) - F(x)}{\pi_\sigma(x)}$$

et on a alors $F(x) = 0$.

Q.13. F s'annule (comme $f - L_n(f)$ et π_σ) en tout point de σ et en $x \notin \sigma$. On a donc $n + 1$ points d'annulation au moins.

F s'annule $n + 2$ fois

On en déduit avec Q.10 que $F^{(n+1)}$ s'annule en un point $c_x \in]a, b[$. Comme $L_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$, sa dérivée $n + 1$ -ième est nulle. Comme π_σ est unitaire de degré $n + 1$, sa dérivée $n + 1$ -ième est le polynôme constante $(n + 1)!$. On en déduit que $\lambda = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$. Comme $F(x) = 0$, on obtient $\mathcal{P}_x$.

$\forall x \in [a, b]$, $\mathcal{P}_x$ est vraie

Q.14. $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a, b]$ et donc bornée sur ce segment.
On remarque que

$$\forall x \in [a, b], |\pi_\sigma(x)| \leq (b - a)^n$$

Avec la propriété $\mathcal{P}_x$, on en déduit que

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Q.15. On imagine ici que l'on se donne une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de $[0, 2\pi]$ et que l'on considère pour chaque n le polynôme $L_n(f)$ associé à $\sigma_n = \{x_0, \dots, x_n\}$. On définit alors une suite de polynômes. Comme $\sin$ et toute ses dérivées sont majorées en module par 1 sur $\mathbb{R}$, on en déduit avec la question précédente que

$$\|f - L_n(f)\|_{\infty, [0, 2\pi]} \leq \frac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Par croissances comparées, le majorant est de limite nulle et ainsi

$(L_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$

Q.16. On sait que

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$$

Quand une fonction est développable en série entière, son développement est nécessairement celui de Taylor. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^{(2k)}(0) = (-1)^k (2k)!$$

On en déduit que $\|f^{(2k)}\|_\infty \geq |f(0)| \geq (2k)!$ (la norme infinie existe puisque f est de classe C^∞ sur le segment $[-1, 1]$).

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|f^{(2k)}\|_\infty \geq (2k)!$$

3 Famille de polynômes orthogonaux

Q.17. Comme $\langle 1, 1 \rangle = 2$, on a $\boxed{P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$. On calcule alors

$$Q_1 = X - \langle X, P_0 \rangle P_0 = X \quad \text{et} \quad \langle X, X \rangle = \frac{2}{3}$$

pour en déduire que $\boxed{P_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X}$

Q.18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(P_0, \dots, P_n)$ étant orthonormée, P_n est orthogonal aux P_i avec $i \leq n-1$ et donc à l'espace engendré par ces polynômes, c'est-à-dire $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Par ailleurs $P_n \in \text{Vect}(1, \dots, X^n) = \mathbb{R}_n[X]$ et $P_n \notin \text{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (car $(P_0, \dots, P_n)$ est libre). Ainsi, P_n est de degré n .

$$\boxed{P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp \text{ et } \deg(P_n) = n}$$

Q.19. Comme $n \geq 1$, $1 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc $\langle P_n, 1 \rangle = 0$ i.e. $\boxed{\int_{-1}^1 P_n(t) dt = 0}$.

Si, par l'absurde, P_n n'admettait pas de racine dans $[-1, 1]$ alors (théorème des valeurs intermédiaires avec P_n continu), P_n serait de signe constant sur $[-1, 1]$. Avec la continuité de P_n et $\int_{-1}^1 P_n(t) dt = 0$, ceci entraînerait la nullité de P_n sur $[-1, 1]$. P_n serait alors le polynôme nul (infinité de racine) ce qui est faux.

$$\boxed{P_n \text{ admet au moins une racine dans } [-1, 1]}$$

Q.20. Par choix de Q , H n'admet que des racines de multiplicité paire. Sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit alors

$$H = a \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)^{2m_i} H_1(X)$$

où H_1 est un produit de polynômes de degré 2, unitaires, à discriminant < 0 . H est alors de signe constant (selon le signe du coefficient dominant c).

Par ailleurs, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (car $p < n$) et donc $\langle P_n, Q \rangle = 0$, c'est à dire $\boxed{\int_{-1}^1 H(t) dt = 0}$.

Comme ci-dessus (continuité, intégrale nulle, signe constant), ceci entraîne la nullité de H (sur $[-1, 1]$ puis comme polynôme) et une absurdité (car ni P_n ni Q n'est nul et $\mathbb{R}[X]$ est intègre). On peut en fait reprendre le raisonnement en ne considérant que les racines de multiplicité impaire dans $[-1, 1]$. On prouve alors par l'absurde qu'il y a n racines de multiplicité impaire dans $[-1, 1]$. Comme $\deg(P_n) = n$, les multiplicités valent 1 et on a toutes les racines.

$$\boxed{P_n \text{ admet } n \text{ racines simples dans } [-1, 1]}$$

4 Méthodes de quadrature

Q.21. Le changement de variable affine (et donc licite) $t = 2 \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} - 1$ donne

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \int_{-1}^1 f \left(x_k + (t+1) \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \right) \frac{x_{k+1} - x_k}{2} dt$$

ce qui est la formule demandée.

Q.22. Comme $l_i(x_k) = \delta_{i,k}$, on a $J(l_i) = \alpha_i = \int_{-1}^1 l_i(t) dt$. $P \mapsto \sum_{i=0}^n \alpha_i P(t_i) - \int_{-1}^1 P(t) dt$ est linéaire et nulle en $l_0, \dots, l_n$ et donc sur $\text{Vect}(l_0, \dots, l_n) = \mathbb{R}_n[X]$ (tout polynôme P de degré $\leq n$ est combinaison des l_i puisque $P = \sum_{i=0}^n P(t_i) l_i$). Ainsi,

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \text{ on a } J(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt}$$

Q.23. On a $l_0 = -\frac{1}{2}(X - 1)$ et $l_1 = \frac{1}{2}(X + 1)$ et donc (calcul d'intégrale élémentaire)

$$\boxed{\alpha_0 = \alpha_1 = 1}$$

$2\alpha_0 g(0)$ est l'aire du rectangle $[-1, 1] \times [0, g(-1)]$ et $2\alpha_1 g(1)$ celle du rectangle $[-1, 1] \times [0, g(1)]$.
La demi-somme de ces quantités est l'aire du trapèze $((-1, 0), (-1, 1), (1, g(1)), (-1, g(-1)), (-1, 0))$.
Ceci explique le nom de la méthode.

Quadrature de Gauss

Q.24. On a d'une part (les t_i sont des racines de P_{n+1})

$$J(QP_{n+1}) = \sum_{i=0}^n \alpha_i Q(t_i) P_{n+1}(t_i) = 0$$

D'autre part, comme P est de degré $\leq 2n+1$ et P_{n+1} de degré $n+1$, le quotient Q est de degré $\leq n$ et donc orthogonal à P_{n+1} . Ainsi

$$\int_{-1}^1 P_{n+1} Q(t) dt = 0$$

On a donc

$$\boxed{J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^1 Q(t) P_{n+1}(t) dt = 0}$$

Comme J est linéaire, on a aussi $J(P) = J(QP_{n+1}) + J(R)$. De plus $J(R) = \int_{-1}^1 R(t) dt$ car R est de degré $\leq n$. Ainsi

$$J(P) = J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^1 Q(t) P_{n+1}(t) dt + \int_{-1}^1 R(t) dt = \int_{-1}^1 (Q(t) P_{n+1}(t) + R(t)) dt$$

et donc

$$\boxed{J(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt}$$

Q.25. Fixons $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et posons $P = \prod_{k \neq i} (X - t_k)^2$. $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et donc

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = J(P) = \sum_{k=0}^n \alpha_k P(t_k) = \alpha_i P(t_i)$$

Comme P est continue, positive et non nulle sur $[-1, 1]$, son intégrale sur $[-1, 1]$ est > 0 . De même $P(t_i) > 0$. Ainsi

$$\boxed{\forall i, \alpha_i > 0}$$

On remarque enfin que la somme des α_i vaut $J(1)$ et comme $1 \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, $J(1) = \int_{-1}^1 1 dt = 2$.

$$\boxed{\sum_{i=0}^n \alpha_i = 2}$$