

Correction X-ENS PC 2015

Gilbert Primet

20 avril 2015

Première partie

- 1a.** $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel. C'est le noyau de l'endomorphisme $M \mapsto M^{-t}$ de $M_n(\mathbb{R})$ et c'est donc un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Sa dimension est $\frac{n(n+1)}{2}$ car une base est formée de la suite des matrices $E_{i,i}$, ($i \in [1, n]$) et des matrices $E_{i,j} + E_{j,i}$, $1 \leq i < j \leq n$. (où $(E_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}$ est la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.)
- 1b.** Si $n = 1$ l'application s^\perp est l'application $[a] \mapsto a$ (de $M_1(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}) clairement linéaire et si $n > 1$ elle ne l'est pas comme on le voit en calculant $s^\perp(-E_{1,1})$ qui vaut $(0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^n$ et est donc différent de $-(s^\perp(E_{1,1})) = (-1, 0, \dots, 0)$.
- 1c.** $s^\perp(-M) = (-m_n, -m_{n-1}, \dots, -m_1)$
- 1d.** $\chi_M(x) = (x - \lambda)(x - \mu) - h^2 = x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu - h^2$ Le discriminant est donc $\Delta = (\lambda - \mu)^2 + 4h^2 \geq 0$ et

$$s^\perp(M) = \left(\frac{\lambda + \mu + \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{\lambda + \mu - \sqrt{\Delta}}{2} \right).$$

- 2a.** L'endomorphisme u canoniquement associé à M est symétrique donc diagonalisable et admet une base orthonormée (v_1, \dots, v_n) de vecteurs propres pour les valeurs propres respectives m_1, \dots, m_n .
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{k=1}^n \langle v_k, x \rangle v_k$ et donc

$$u(x) = \sum_{k=1}^n m_k \langle v_k, x \rangle v_k.$$

Soit encore :

$$u(x) = \sum_{k=1}^n m_k ({}^t v_k x) v_k.$$

Si y est un vecteur colonne et λ un scalaire identifié à la matrice carrée d'ordre 1 $[\lambda]$, on a $\lambda x = x[\lambda]$ (Loi externe dans le premier membre et produit matriciel dans le second). Ici, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$u(x) = \sum_{k=1}^n m_k v_k ({}^t v_k x) = \sum_{k=1}^n m_k (v_k {}^t v_k) x = Mx.$$

(On peut maintenant utiliser l'associativité du produit matriciel).

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$M = \sum_{k=1}^n m_k (v_k {}^t v_k).$$

- 2b.** Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$ On a à nouveau : $x = \sum_{k=1}^n \langle v_k, x \rangle v_k$ et $Mx = \sum_{k=1}^n m_k \langle v_k, x \rangle v_k$. Donc

$$\langle x, Mx \rangle = \sum_{k=1}^n m_k \langle v_k, x \rangle^2 \leq m_1 \left(\sum_{k=1}^n \langle v_k, x \rangle^2 \right) = m_1.$$

Donc si $\|x\| = 1$, alors $\langle x, Mx \rangle \leq m_1$. Pour $x = v_1$, on a $\langle Mv_1, v_1 \rangle = m_1$. Donc

$$\sup_{\|x\|=1} \langle x, Mx \rangle = m_1$$

et cette borne est atteinte en v_1 par exemple.

2c. On raisonne de façon analogue. Si $x \in \mathcal{V}_j$, alors, comme (v_1, \dots, v_j) est une base orthonormale de \mathcal{V}_j , on peut écrire

$$\langle x, Mx \rangle = \sum_{k=1}^j m_k \langle v_k, x \rangle^2 \geq m_j \sum_{k=1}^j \langle v_k, x \rangle^2 = m_j \|x\|^2 = m_j$$

et on a égalité pour $x = v_j$, donc

$$\inf_{x \in \mathcal{V}_j, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle = m_j$$

On montre de même l'autre inégalité.

3a. On a :

$$\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} - \dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) > n - \dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \geq 0.$$

(En effet, $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n).

Par conséquent :

$$\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) > 0.$$

3b. $\dim \mathcal{W}_j + \dim \mathcal{V} = n - j + 1 + j = n + 1 > n$. Donc $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}_j \neq \{0_E\}$.

Soit $x \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}_j$, $\|x\| = 1$. On a alors $\langle x, Mx \rangle \leq m_j$. Et donc $\inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle \geq m_j$ (Remarque : on montre comme en 2.b que si $\|x\|=1$, alors $\langle x, Mx \rangle \geq m_n$, donc la borne inférieure dont il est question existe bien.)

3c. L'ensemble : $\left\{ \inf_{x \in \mathcal{V}} \langle x, Mx \rangle \mid \mathcal{V} \text{ sev de } \mathbb{R}^n, \dim \mathcal{V} = j \right\}$ est donc une partie non vide de \mathbb{R} majorée par m_j . Elle admet donc une borne supérieure qui est inférieure ou égale à m_j . On a égalité puisque m_j appartient à cet ensemble (la borne supérieure est atteinte). Donc :

$$\sup_{\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n, \dim \mathcal{V} = j} \inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle = m_j$$

4a. $M - L$ est encore une matrice réelle symétrique d'ordre n .

D'après la question précédente, pour tout $j = n$:

$$\sup_{\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n, \dim \mathcal{V} = n} \inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, (M - L)x \rangle \geq 0$$

Et donc, \mathbb{R}^n étant le seul sous-espace de E de dimension n , on a donc $\forall x \in E, \|x\| = 1 \Rightarrow \langle x, Mx \rangle \geq \langle x, Lx \rangle$. Mais on a alors, pour tout sous-espace vectoriel \mathcal{V} de E de dimension j :

$$\inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle \geq \inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Lx \rangle$$

Et en prenant la borne supérieure sur tous les sous-espaces vectoriels de dimension j , on obtient : $m_j \geq \ell_j$ où $s^\perp(M) = (m_1, \dots, m_n)$ et $s^\perp(L) = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ Donc :

$$s^\perp(L) \leq s^\perp(M).$$

4b. La matrice $N = \|M\|I_n - M$ est encore symétrique, puisque I_n et M le sont, et $sp(N) = \{\|M\| - \lambda \mid \lambda \in sp(M)\} \subset \mathbb{R}_+$. En effet, pour tout vecteur propre X de module 1 associé à une valeur propre λ : $\|MX\| = |\lambda| \leq \|M\|$.

4c. On applique la propriété précédente aux matrices symétriques $M - L$ et $L - M$. On a

$$(0, \dots, 0) \leq s^\perp(\|M - L\|I_n - (M - L))$$

Donc $s^\perp M \leq s^\perp(\|M - L\|I_n + L)$. Or $s^\perp(\|M - L\|I_n + L) = (\ell_1 + \|M - L\|, \dots, \ell_n + \|M - L\|)$

On a donc :

$$\forall j \in [1, n] \quad m_j \leq \|M - L\| + \ell_j.$$

De façon symétrique :

$$\forall j \in [1, n] \quad \ell_j \leq \|L - M\| + m_j.$$

D'où les inégalités demandées puisque $\|L - M\| = \|M - L\|$.

4d. Lorsque l'on munit \mathbb{R}^n de la norme $\|\cdot\|_\infty$, l'application s^\downarrow est donc lipschitzienne de rapport 1 : elle est donc continue.

5a. Si $n = 1$, tout réel $r > 0$ convient. Sinon, on prend $r = \frac{\min_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket} (m_i - m_{i+1})}{2}$ où $s^\downarrow(M) = (m_1, \dots, m_n)$. Si $L \in B(M, r)$, alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\ell_i > m_i - \frac{r}{2} \geq m_{i+1} + \frac{r}{2} > \ell_{i+1}$$

donc $L \in S_n^\dagger(\mathbb{R})$. (On a noté : $s^\downarrow(L) = (\ell_1, \dots, \ell_n)$). Tout élément de $S_n^\dagger(\mathbb{R})$ est donc intérieur à $S_n^\dagger(\mathbb{R})$, et donc $S_n^\dagger(\mathbb{R})$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.

5b. D'après la question 1d, les deux valeurs propres d'une matrice réelle symétrique ne sont égales que si elle est de la forme λI_2 , ($\lambda \in \mathbb{R}$). Donc $S_2^\dagger(\mathbb{R}) = S_2(\mathbb{R}) \setminus \text{vect}(I_2)$. On retrouve ainsi que $S_2^\dagger(\mathbb{R})$ est ouvert (puisque $\text{vect}(I_2)$ est fermé comme sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie). Lorsque l'on identifie (en tant qu'espace vectoriel) $S_2(\mathbb{R})$ à \mathbb{R}^3 , l'application s_1^\downarrow est l'application $(\lambda, \mu, h) \mapsto \frac{\lambda + \mu + \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4h^2}}{2}$. Les projections sont de classe C^1 et l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* . Par composition et théorèmes usuels sur les opérations, s_1^\downarrow est donc de classe C^1 sur $S_2^\dagger(\mathbb{R})$. Par contre, en $(\lambda, \lambda, 0)$, la troisième application partielle est $h \mapsto \lambda + |h|$ qui n'est pas dérivable en 0 : s_1^\downarrow n'est donc pas de classe C^1 sur $S_2(\mathbb{R})$.

Deuxième Partie

6a. Ceci est simplement l'égalité : $\text{tr}(C) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.

6b. On a : $c_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \langle x, Cx \rangle$. Or :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1, \langle x, Cx \rangle = \langle x, Ax \rangle + \langle x, Bx \rangle \leq a_1 + b_1$$

D'où par passage à la borne supérieure :

$$c_1 \leq a_1 + b_1.$$

6c. On utilise la propriété précédente avec $-A = (-B) + (-C)$, ce qui donne $-c_n \leq -a_n - b_n$, puis :

$$c_n \geq a_n + b_n.$$

7a. On a alors

$$\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{W}) > 2n,$$

soit encore :

$$\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{W}) > 2n - \dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) > n.$$

Donc, d'après la question 3.a :

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \neq \{0\}.$$

7b. Appelons $\mathcal{W}_j, \mathcal{W}'_j$ les espaces associés à A et B comme dans la question 2.C, et \mathcal{V}''_j le sous-espace associé à C analogue à l'espace \mathcal{V}_j . On a

$$\dim(\mathcal{V}''_{j+k-1}) + \dim(\mathcal{W}_j) + \dim(\mathcal{W}'_k) = j + k - 1 + n - j + 1 + n - k + 1 = 2n + 1 > 2n.$$

Donc $\mathcal{V}''_{j+k-1} \cap \mathcal{W}_j \cap \mathcal{W}'_k \neq \{0\}$ Soit x un vecteur de norme 1 appartenant à cette intersection. On a alors

$$\langle x, Cx \rangle \geq c_{j+k-1}$$

et

$$\langle x, Cx \rangle = \langle x, Ax \rangle + \langle x, Bx \rangle \leq a_j + b_k.$$

On obtient donc :

$$c_{j+k-1} \leq a_j + b_k.$$

En considérant alors les décompositions spectrales de $-A, -B, -C$, on obtient, pour tout couple d'indices (j, k) tels que $j + k \leq n + 1$:

$$-c_{n+2-j-k} \leq -a_{n+1-j} - b_{n+1-k}.$$

Donc :

$$c_{n+2-j-k} \geq a_{n+1-j} + b_{n+1-k}.$$

En posant $j' = n + 1 - j$, j' parcourt toutes les valeurs de $[[1, n]]$ et, avec $k = 1$:

$$c_{j'} \geq a_{j'} + b_n.$$

On obtient la relation demandée par retour à l'indice initial.

8a. Si $e_1 = {}^t(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, alors $\langle e_1, Ae_1 \rangle = a_{1,1} \leq a_1$ puisque $\|e_1\| = 1$.

8b.

$$\sum_{i=1}^j s_i - f(t_1, \dots, t_k) = \sum_{i=1}^j s_i(1 - t_i) - \sum_{i=j+1}^k s_j t_j$$

Or

$$\sum_{i=j+1}^k s_j t_j \leq s_j \sum_{i=j+1}^k t_j = s_j(j - \sum_{i=1}^j t_j).$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^j s_i - f(t_1, \dots, t_k) = \sum_{i=1}^j s_i(1 - t_i) - j s_j + \sum_{i=1}^j s_j t_j = \sum_{i=1}^j (s_i - s_j)(1 - t_i).$$

Les termes du 2° membre sont positifs donc :

$$\forall (t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{D}_{j,k} f(t_1, \dots, t_k) \leq \sum_{i=1}^j s_i$$

Ce majorant est atteint pour $t_1 = \dots = t_j = 1$ et $t_{j+1} = \dots = t_k = 0$. Donc :

$$\sup_{\mathcal{D}_{j,k}} f = \sum_{i=1}^j s_i.$$

8c. On a

$$\sum_{i=1}^j a_{i,i} = \sum_{i=1}^j \langle e_i, Ae_i \rangle$$

où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n . Ce nombre représente la trace de $p \circ f$ où p est la projection orthogonale sur $\text{vect}(e_1, \dots, e_j)$ (La matrice dans la base canonique est obtenue en gardant les j premières lignes de A . Si l'on se place dans une base orthonormale de vecteurs propres v_1, \dots, v_n , et si la matrice de p dans cette base a pour terme général $p_{i,j}$, alors

$$\text{tr } p \circ f = \sum_{i=1}^n p_{i,i} a_i.$$

On a $\forall i \in [[1, n]] p_{i,i} = \langle p(v_i) | v_i \rangle = \|p(v_i)\|^2 \leq \|v_i\|^2 = 1$ et donc $p_{i,i} \in [0, 1]$. De plus $\text{tr}(p) = \text{rg}(p) = j$ donc $\sum_{i=1}^n p_{i,i} = j$. On peut donc appliquer la question 8b. avec $p_{i,i} = t_i$, $s_i = a_i$ et $k = n$.

On obtient :

$$\sum_{i=1}^j a_i - \sum_{i=1}^j a_{i,i} \geq \sum_{i=1}^j (a_i - a_j)(1 - p_{i,i}) \geq 0.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

8d. Au lieu de partir de la base canonique, on pourrait partir de n'importe que base orthonormale. Or, toute famille orthonormale $(x_1, \dots, x_j) \in \mathcal{K}_j$ peut être complétée en une base orthonormée. On a donc, pour une telle famille orthonormale de j éléments (x_1, \dots, x_j) :

$$\sum_{i=1}^j \langle x_i, Ax_i \rangle \leq \sum_{i=1}^j a_i.$$

De plus, si (v_1, \dots, v_n) est une base orthonormée correspondant à une résolution spectrale de A , alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \langle v_i, Av_i \rangle = a_i$. Donc

$$\sum_{i=1}^j \langle v_i, Av_i \rangle = \sum_{i=1}^j a_i$$

. On a donc bien :

$$\sum_{i=1}^j a_i = \sup_{(x_1, \dots, x_j) \in \mathcal{K}_j} \sum_{i=1}^j \langle x_i, Ax_i \rangle$$

8e. Pour toute famille $(x_1, \dots, x_j) \in \mathcal{K}_j$:

$$\sum_{i=1}^j \langle x_i, Cx_i \rangle = \sum_{i=1}^j \langle x_i, Ax_i \rangle + \sum_{i=1}^j \langle x_i, Bx_i \rangle \leq \sum_{i=1}^j a_i + \sum_{i=1}^j b_i.$$

En passant à la borne supérieure, on obtient alors :

$$\sum_{i=1}^j c_i \leq \sum_{i=1}^j a_i + \sum_{i=1}^j b_i.$$

Troisième partie

9. Si A et B sont diagonales $A + B$ est diagonale et ses valeurs propres sont de la forme $a_i + b_j$, $(i, j) \in \llbracket 1, 2 \rrbracket^2$. Donc s^\perp peut prendre les valeurs $M_1 = \overline{a_1 + b_1, a_2 + b_2}$ ou $M_2 = \overline{a_1 + b_2, a_2 + b_1}$ (puisque $a_1 + b_2 \geq a_2 + b_1$). Ce segment a pour longueur $\|M_1 M_2\| = \sqrt{2(b_2 - b_1)^2} = \sqrt{2}(b_1 - b_2)$.

Si $(c_1, c_2) = s^\perp(A + B)$, alors $c_1 + c_2 = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) = a_1 + b_1 + a_2 + b_2$. De plus, après la deuxième partie :

$$a_1 + b_2 \leq c_1 \leq a_1 + b_1$$

Donc, si $b_1 = b_2$, alors $c_1 = a_1 + b_1$ et $c_2 = a_2 + b_1$: Σ est un singleton, c'est à dire un segment de longueur nulle.

Si $b_1 > b_2$, c_1 est comprise entre les abscisses des points M_1 et M_2 , donc $N(c_1, c_2) \in [M_1, M_2]$.

10a. Dans le cas général, A est orthogonalement semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ et l'on

peut écrire : $A = PDP^{-1}$. Si l'on pose $B' = P^{-1}BP$, on a alors : $B = PB'P^{-1}$ et $s^\perp(B') = (b_1, b_2)$. On a alors $s^\perp(A + B) = s^\perp(D + B')$. Réciproquement P peut prendre comme valeur n'importe quelle matrice orthogonale d'ordre 2. On a donc :

$$\Sigma = \left\{ s^\perp(A + B) \mid A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, B \in S(b_1, b_2) \right\}.$$

10.b Quitte à changer un vecteur d'une base de diagonalisation en son opposé, on peut supposer que les matrices de passage appartiennent à $SO(2)$: il existe $\theta \in [-\pi, \pi]$ tel que $P = r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

L'application $\theta \mapsto r(\theta)$ est continue puisque ses fonctions coordonnées sont continues, ainsi que

l'application $\theta \mapsto r(-\theta)$. Si $D \in M_2(\mathbb{R})$ les applications $\begin{cases} M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto MD \end{cases}$ et $\begin{cases} M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto DM \end{cases}$ sont

linéaires donc continues (on est en dimension finie). Par composition l'application $\begin{cases} [-\pi, \pi] \rightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ \theta \mapsto r(\theta) \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} r(-\theta) \end{cases}$

est continue et son image est $S(b_1, b_2)$.

10.c D'après ce qui précède l'application $u : \begin{cases} [-\pi, \pi] \rightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ \theta \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + r(\theta) \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} r(-\theta) \end{cases}$ est continue.

Or l'application s^\downarrow est continue sur $S_2(\mathbb{R})$, donc par composition l'application $v = s^\downarrow \circ u$ est continue sur $[-\pi, \pi]$ et son image est Σ . De plus $v(0) = s^\downarrow \left(\begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{pmatrix} \right) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = M_1$ et $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = s^\downarrow \left(\begin{pmatrix} a_1 + b_2 & 0 \\ 0 & a_2 + b_1 \end{pmatrix} \right) = (a_1 + b_2, a_2 + b_1)$. La première composante s_1^\downarrow de s^\downarrow est encore continue. Donc $s_1^\downarrow \circ u$ est continue sur $[-\pi, \pi]$ et prend donc en particulier toute valeur entre $a_1 + b_1$ et $a_1 + b_2$. Donc $L \subset \Sigma$ donc $L = \Sigma$