

# Corrigé<sup>1</sup>

## A) Théorème du point fixe

1. Si  $x$  et  $y$  sont tels que  $f(x) = x$  et  $f(y) = y$  alors on a  $\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$

donc  $\|x - y\| \leq k \|x - y\|$

donc  $\|x - y\| (1 - k) \leq 0$

donc  $\|x - y\| \leq 0$  car  $1 - k > 0$

donc  $\|x - y\| = 0$

d'où  $x = y$ .

2. On a  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq k \|x_n - x_{n-1}\| \leq \dots k^n \|x_1 - x_0\|$$

donc si  $x_1 = x_0$  alors  $(x_n)_n$  est constante donc de Cauchy.

On suppose maintenant  $x_1 \neq x_0$ ,

et  $\forall n \geq m, n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &= \|x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + \dots + x_{n-m+1} - x_m\| \\ &\leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \dots + \|x_{n-m+1} - x_m\| \\ &\leq k^{n-1} \|x_1 - x_0\| + k^{n-2} \|x_1 - x_0\| + \dots + k^m \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \left( \sum_{p=m}^{n-1} k^p \right) \|x_1 - x_0\| \\ &= \frac{k^m - k^{n+1}}{1 - k} \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , on a  $(k^n)_n$  est une suite géométrique de raison  $k \in [0, 1[$  donc convergente dans  $\mathbb{R}$  donc c'est une suite de Cauchy d'où il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n, m \geq n_0$  on a

$$(k^m - k^{n+1}) \leq \frac{(1 - k)\varepsilon}{\|x_1 - x_0\|},$$

d'où  $\forall n, m \geq n_0, \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$

3. On  $E$  est un Banach donc toute suite de Cauchy est une suite convergente vers  $l \in E$ .

4. Conclusion :  $l$  est le point fixe de  $f$ .

En effet :

On a d'une part  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$  et  $A$  fermé donc  $l \in A$  et  $f$  continue sur  $A$  car lipschitzienne donc continue en  $l$  donc  $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(l)$

et d'autre part  $x_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$  et  $x_{n+1} = f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(l)$  et l'unicité de la limite permet de conclure que  $f(l) = l$ .

---

1. Auteur Ratbi My Lhassan, CPGE My Youssef, Rabat, Maroc. email : mylhassan@yahoo.fr

## B) Invariance par homotopie

5.  $f$  admet un point fixe  $l$  et donc  $h(l, 0) = f(l) = l$  donc  $0 \in T$ .

6. On a  $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \in T$ , donc  $\exists x_n \in A, x_n = h(x_n, t_n)$  donc la donnée de  $(t_n)_n$  assure l'existence de  $(x_n)_n$ .  
et  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &= \|h(x_n, t_n) - h(x_m, t_m)\| \\ &= \|h(x_n, t_n) - h(x_n, t_m) + h(x_n, t_m) - h(x_m, t_m)\| \\ &\leq \|h(x_n, t_n) - h(x_n, t_m)\| + \|h(x_n, t_m) - h(x_m, t_m)\| \\ &\leq k' |t_n - t_m| + k \|x_n - x_m\| \text{ d'après les hypothèses } \boxed{a} \text{ et } \boxed{b} \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \|x_n - x_m\| \leq \frac{k'}{1-k} |t_n - t_m|$$

et comme  $\frac{k'}{1-k} > 0$  et  $(t_n)_n$  est une suite réelle convergente donc elle est de Cauchy ( $\mathbb{R}$  est complet) d'où  $(x_n)_n$  est de Cauchy.

**Déduction :**

On a  $(x_n)_n$  est de Cauchy dans  $E$  qui est de Banach donc  $(x_n)_n$  est convergente vers  $x \in E$  et comme  $(x_n)_n$  est une suite d'éléments convergente de  $A$  et  $A$  est fermé donc sa limite  $x \in A$ .  
Et on a  $\forall (x, t), (x', t') \in A \times [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \|h(x, t) - h(x', t')\| &= \|h(x, t) - h(x', t) + h(x', t) - h(x', t')\| \\ &\leq \|h(x, t) - h(x', t)\| + \|h(x', t) - h(x', t')\| \\ &\leq k \|x - x'\| + k' \|t - t'\| \text{ d'après les hypothèses } \boxed{a} \text{ et } \boxed{b} \\ &\leq (k + k') \max(|t - t'|, \|x - x'\|) \end{aligned}$$

donc  $h$  est  $(k + k')$  est lipshitzienne dans l'evn produit  $E \times \mathbb{R}$  muni de la norme produit  $\max(\|\cdot\|, |\cdot|)$  par suite  $h$  est continue sur  $A \times [0, 1]$ .

et on a  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$  et  $t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t$  donc dans l'evn produit  $E \times [0, 1]$  on a  $(x_n, t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (x, t) \in A \times [0, 1]$ , et puisque  $h$  est continue sur  $A \times [0, 1]$ ,  $h(x_n, t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} h(x, t)$

et la relation  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = h(x_n, t_n)$  donne quand on fait tendre  $n$  vers  $+\infty$ ,  $x = h(x, t)$  et cette relation donne que  $t \in T$

Conclusion : toute suite  $(t_n)_n$  de  $T$  qui est convergente admet sa limite dans  $T$  donc  $T$  est fermé.

7. On a  $\exists t \in [0, 1], x = h(x, t)$  donc d'après la négation de l'hypothèse  $\boxed{c}$   $x \notin \partial A$  donc  $d(x, \partial A) \neq 0$  (car en général  $x \in F \Leftrightarrow d(x, F) = 0$ ) et comme on a  $d(x, \partial A) \geq 0$  on a  $d(x, \partial A) > 0$ .

8. Soit  $y \in \overline{B}(x, r) \cap A$  on a,

$$\begin{aligned} \|x - h(y, u)\| &= \|h(x, t) - h(y, t) + h(y, t) - h(y, u)\| \text{ car on a } x = h(x, t) \\ &\leq \|h(x, t) - h(y, t)\| + \|h(y, t) - h(y, u)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq k \|x - y\| + k' |t - u| \text{ d'après les hypothèses } \boxed{a} \text{ et } \boxed{b} \\ &\leq kr + k'\varepsilon = kr + k(1 - r) = r \end{aligned}$$

9. On a  $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = A \setminus A^\circ$  car  $\overline{A} = A$  puisque  $A$  est fermé, on en tire que  $A^\circ = A \setminus \partial A$ . donc : comme  $x \in A$  et  $x \notin \partial A$  on a  $x \in A^\circ$  et comme  $r < d(x, \partial A)$  on a  $\overline{B}(x, r) \subset A$  donc l'application  $y \mapsto h(y, u)$  est définie de  $A$  dans  $A$  et contractante d'après  $\boxed{a}$  donc d'après le théorème du Picard cette application admet un unique point fixe  $x' \in A$  et comme  $x' = h(x', u)$  on a  $x' \notin \partial A$  d'où  $x' \in A^\circ$ .

10. D'après ce qu'on vient d'établir  $\exists x' \in A, x' = h(x', u)$  donc  $u \in T$  on conclut que  $\forall t \in T, \forall \varepsilon > 0, \forall u \in [0, 1], |t - u| < \varepsilon \implies u \in T$  donc :  $\forall t \in T, \forall \varepsilon > 0, ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \cap [0, 1] \subset T$  donc  $T$  est une partie de  $[0, 1]$  qui est voisinage de tout ces points dans  $[0, 1]$  d'où  $T$  est un ouvert relatif de  $[0, 1]$ .

**Conclusion :**

On a  $T \subset [0, 1]$  et donc  $T$  est borné et  $T$  non vide donc  $T$  admet une borne supérieur qu'on notera  $v = \sup(T)$ , comme  $T$  est fermé on a  $v \in T$  donc  $\exists x'' \in A, h(x'', v)$ , et pour conclure on va montrer que  $v = 1$  :

Par absurde supposons que  $v < 1$  on pose alors  $\varepsilon = 1 - v$  on a alors

$]v - \varepsilon, v + \varepsilon[ \cap [0, 1] \subset T$  et comme  $v + \frac{\varepsilon}{2} \in ]v - \varepsilon, v + \varepsilon[ \cap [0, 1]$  donc  $v + \frac{\varepsilon}{2} \in T$  absurde avec  $v = \sup T$ , doù  $v = 1 \in T$ .

on a alors  $1 \in T$  donc  $\exists x'' \in A, x'' = h(x'', 1) = g(x'')$  donc  $x''$  est point fixe de  $g$  et l'unicité vient de fait que  $g$  est contractante.

### 11. Une application

On définit la fonction

$$g : A \longrightarrow E \text{ par } \forall x \in A, g(x) = 0$$

on a  $g$  est contractante et admet un point fixe car  $0 \in A$  et  $g(0) = 0$ , de plus on a  $g$  et  $f$  sont homotopes en effets :

On définit la fonction  $h : A \times [0, 1] \longrightarrow E$  par  $\forall (x, t) \in A \times [0, 1], h(x, t) = tf(x)$

on a  $h$  vérifie :

$$\boxed{a} : \forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1],$$

$$\|h(x, t) - h(y, t)\| = \|tf(x) - tf(y)\| \leq |t| \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\| \text{ car } t \leq 1$$

on a bien  $k \in [0, 1[$  du fait que  $f$  est contractante.

$$\boxed{b} : \forall x \in A, \forall t, t' \in [0, 1],$$

$$\|h(x, t) - h(x, t')\| = \|tf(x) - t'f(x)\| = |t - t'| \|f(x)\| \leq k' |t - t'| \text{ avec } k' \text{ un majorant strictement positif de } \|f(A)\| \text{ qui existe car } f(A) \text{ est bornée.}$$

$$\boxed{c} : \text{On } \forall x \in \partial A, \forall t \in [0, 1], x \neq tf(x) = h(x, t)$$

et ceci d'après l'hypothèse  $\boxed{f}$ .

on remarque enfin que la condition  $0 \in A^\circ$  est donné pour assurer la condition  $\boxed{f}$  car sinon  $0 \in \partial A$  et pour  $x = 0$  et  $t = 0$  la condition  $x \neq tf(x)$  ne sera pas vérifiée.

On conclut :  $g$  et  $f$  sont homotopes et  $g$  admet un point fixe donc  $f$  admet un point fixe unique intérieur à  $A$  et ceci d'après l'étude faite dans les question 4) à 10).

### C) Étude de certains opérateurs à noyau

12.  $\forall t \in [a, b],$

$$\begin{aligned} |F(y)(t) - F(z)(t)| &= \left| \int_a^b K(t, x)(f(x, y(x)) - f(x, z(x))) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |K(t, x)| |(f(x, y(x)) - f(x, z(x)))| dx \\ &\leq \int_a^b |K(t, x)| K_0 |y(x) - z(x)| dx \\ &\leq K_0 \|y - z\| \int_a^b |K(t, x)| dx \\ &\leq \alpha K_0 \|y - z\| \end{aligned}$$

et par passage au sup on a  $\|F(y) - F(z)\| \leq \alpha K_0 \|y - z\|$

13. On notera  $E = \mathcal{C}[a, b]$  et la restriction de  $F$  à  $A$  sera noté aussi  $F$ , on a alors  $F : A \rightarrow E$  contractante d'après Q-12 et la condition  $\alpha K_0$  et  $A$  fermé. et vérifie les conditions

$\boxed{d}$ ,  $\boxed{e}$  et  $\boxed{f}$  de Q-11 en effet :

$\boxed{d}$  Le vecteur nul est intérieur à  $A$ .

$$\boxed{e} \forall \varphi \in A, \forall t \in [a, b], |F(\varphi)(t)| = \left| \int_a^b K(t, x) f(x, \varphi(x)) dt \right| \leq \underbrace{\sup_{[a, b]^2} |K| \left| \int_a^b f(x, \varphi(x)) dx \right|}_M$$

donc  $\forall \varphi \in A, \|F(\varphi)\| \leq M$  on en tire que  $F(A)$  est bornée.

$\boxed{f}$   $\forall \varphi \in \partial A, \forall \lambda \in [0, 1], \varphi \neq \lambda F(\varphi)$ .

donc :  $F$  admet un point fixe unique qui appartient à l'intérieur de  $A$  d'après Q-11.

### D) Une généralisation

14. Pour  $x = 0 \in A$  et  $t = 0 \in [0, 1]$ , on a  $x = tf(x)$ , donc  $0 \in X$  d'où  $X \neq \emptyset$ .

Montrons que  $X$  est fermée : Soit  $(x_n)_n$  une suite d'éléments de  $X$  qui converge vers  $x \in E$  montrons que  $x \in X$ .

on a d'abord  $(x_n)_n$  est une suite d'éléments de  $A$  car  $X \subset A$  et  $A$  fermée donc  $x \in A$ .

On a  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in X$  donc  $\exists t_n \in [0, 1], x_n = t_n f(x_n)$ , la suite  $(t_n)_n$  ainsi obtenue est une suite de compact  $[0, 1]$  donc admet un sous-suite  $(t_{\varphi(n)})_n$  convergente vers  $t \in [0, 1]$

on a alors :

$$- \forall n \in \mathbb{N}, x_{\varphi(n)} = t_{\varphi(n)} f(x_{\varphi(n)}) \quad (1)$$

-  $(x_{\varphi(n)})$  est sous-suite de la suite convergente  $(x_n)$  donc converge vers  $x$ .

-  $f$  continue sur  $A$  donc en  $x$  et par suite  $f(x_{\varphi(n)})$  tend vers  $f(x)$ .

et par passage à la limite dans (1) on a alors :  $x = tf(x)$  donc  $x \in X$  d'où  $X$  est fermée.

**Déduction :**

On a  $\forall x \in A$ ,

Si  $x \in X$ , alors  $x \notin \partial A$  alors  $d(x, X) = 0$  et  $d(x, \partial A) \neq 0$  alors  $d(x, \partial A) + d(x, X) > 0$ .

Si  $x \notin X$  alors  $d(x, X) \neq 0$  alors  $d(x, X) + d(x, \partial A) > 0$ .

par suite  $\mu$  est bien définie sur  $A$ .

On sait le résultat classique suivant : si  $A$  est une partie d'un evn  $E$  alors l'application  $x \mapsto d(x, A)$  est continue car 1-lipschitzienne.

donc  $\mu$  est continue sur  $A$  comme rapport de deux fonctions continues.

on a :  $\forall x \in A, \mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \partial A \\ 1 & \text{si } x \in X \end{cases}$

15. On  $g|_A = f$  et  $g|_{(C|A)} = 0$  qui sont continues en plus  $g|_{\partial A} = 0 = g|_{(C|A)}$  donc  $g$  est continue en les points frontières de  $A$  et  $(C|A)$ , doù  $g$  est continues sur  $C$ .

on considère  $K = \{tf(x), t \in [0, 1], x \in A\}$ , on a  $K$  est un compact de  $E$  en effet :

Soit  $(u_n)_n$  une suite d'éléments de  $K$ , donc  $\exists (t_n)_n$  suite de  $[0, 1]$  et  $(x_n)_n$  suite de  $A$

tq  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = t_n f(x_n)$

Or  $[0, 1]$  et  $\overline{f(A)}$  sont compactes donc  $\exists \alpha$  une extraction (on compose deux extractions) tq

$(t_{\alpha(n)})_n$  converge vers  $t \in [0, 1]$  et  $(f(x_{\alpha(n)}))_n$  converge vers  $l \in \overline{f(A)}$

donc  $(u_{\alpha(n)})_n$  admet une sous suite convergente et comme  $K$  est fermé par construction on a cette limite appartient à  $K$  d'où  $K$  est compact.

pour conclure on  $\overline{g(C)}$  est fermé dans un compact donc  $\overline{g(C)}$  est compacte.

16. On a clairement  $g$  vérifie le théorème de Schauder donc  $\exists x \in C, x = g(x)$ .

Supposons  $x \in C|A$ , on a  $x = g(x) = 0$  alors  $x = 0 \in C|A$  or  $0 \in A$  absurde donc  $x \in A$ .

Supposons  $x \in A|X$ , on a  $x = g(x) = \mu(x)f(x)$  alors  $x = tf(x)$  ici  $t = \mu(x)$  donc  $x \in X$  absurde.

donc on conclut que  $x \in X$  et dans ce cas  $x = g(x) = f(x)$ .

et puisque  $A$  est fermé on a  $A = A^\circ \cup \partial A$  et comme  $X \cap \partial A = \emptyset$  on a  $X \subset A^\circ$

d'où le point fixe  $x$  est intérieur à  $A$ .

**E) Application aux intégrales de Fredholm**

17. D'après la fameuse inégalité de Cauchy Schwartz pour la norme  $\|\cdot\|_2$  on a

$$\left| \int_0^1 K(t, x)g(x, \varphi(x)) dx \right| \leq \left( \int_0^1 |K(t, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 |g(x, \varphi(x))|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = c_\varphi \|K_t\|_2$$

$$\text{avec } c_\varphi = \left( \int_0^1 |g(x, \varphi(x))|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On a  $\forall t, u \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} |F(\varphi)(t)| &= \left| h(t) + \int_0^1 K(t, x)g(x, \varphi(x)) dx \right| \\ &\leq |h(t)| + \left| \int_0^1 K(t, x)g(x, \varphi(x)) dx \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq |h(t)| + c_\varphi \|K_t\|_2 \\ &\leq \|h\|_0 + c_\varphi \sup_{s \in [0,1]} \|K_s\|_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |F(\varphi)(t) - F(\varphi)(u)| &= \left| h(t) - h(u) + \int_0^1 (K_t - K_u)(x)g(x, \varphi(x)) dx \right| \\ &\leq |h(t) - h(u)| + \left| \int_0^1 (K_t - K_u)(x)g(x, \varphi(x)) dx \right| \\ &\leq |h(t) - h(u)| + c_\varphi \|K_t - K_u\|_2 \end{aligned}$$

18. On a d'après la deuxième inégalité de Q-17 et la continuité de l'application  $h$  et l'application  $t \mapsto K_t$ ,  $F(\varphi)$  est continue sur  $[0, 1]$ , donc  $F$  est une application de  $E$  dans  $E$ .

19. Soit  $t \in [0, 1]$ , on appliquant le théorème de convergence dominée sur  $(f_n)_n$  dont les conditions sont simples à vérifier on aura  $\int_0^1 \underbrace{K(t, x)g(x, \varphi_n(x))}_{f_n(x)} dx \longrightarrow \int_0^1 K(t, x)g(x, \varphi(x)) dx$

et donc

$$F(\varphi_n)(t) = h(t) + \int_0^1 K(t, x)g(x, \varphi_n(x)) dx \xrightarrow[0,1]{CS} h(t) + \int_0^1 K(t, x)g(x, \varphi(x)) dx = F(\varphi)(t)$$

20. D'après Q-17 on a  $\forall t, u \in [0, 1]$ ,

$$|F(\varphi_n)(t) - F(\varphi_n)(u)| \leq |h(t) - h(u)| + c_{\varphi_n} \|K_t - K_u\|_2$$

$$\text{avec } c_{\varphi_n} = \left( \int_0^1 |g(x, \varphi_n(x))|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

or  $\varphi_n \in \overline{B}(0, M)$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], |\varphi_n(x)| \leq M$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], |\varphi_n(x)| \leq M \text{ d'après } \boxed{j} \exists \mu_M \in L^2, g(x, \varphi_n(x)) \leq \mu_M(x)$$

$$\text{d'où } \forall n \in \mathbb{N}, c_{\varphi_n} = \left( \int_0^1 |g(x, \varphi_n(x))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\mu_M\|_2$$

Et en utilisant la continuité de l'application  $h$  et l'application  $t \mapsto K_t$  sur  $[0, 1]$  permet de conclure.

21. On va montrer que  $F(\varphi_n)$  est une suite de Cauchy dans la Banach  $(E, \|\cdot\|_0)$  :

Soit  $\varepsilon > 0$ ,

On a il existe un réel  $\delta > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tous  $t, u \in [0, 1]$ ,

$$|t - u| < \delta \text{ implique } |F(\varphi_n)(u) - F(\varphi_n)(t)| < \varepsilon.$$

on a pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ , on a  $F(\varphi_n) - F(\varphi_m)$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ ,

$$\text{donc } \exists u \in [0, 1], \|F(\varphi_n) - F(\varphi_m)\|_0 = |F(\varphi_n)(u) - F(\varphi_m)(u)|.$$

Et d'après le rappel il existe une famille finie  $t_1, t_2, \dots, t_N$  de  $[0, 1]$  telle que le segment  $[0, 1]$  soit inclus dans la réunion des intervalles  $]t_i - \delta, t_i + \delta[$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

donc :  $\exists i \in \{1, 2, \dots, N\}, u \in ]t_i - \delta, t_i + \delta[$  c-à-d  $|u - t_i| < \delta$

La convergence simple de  $F(\varphi_n)$  donne que  $\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$ , la suite réelle convergente  $(F(\varphi_n)(t_k))_n$  de Cauchy dans  $\mathbb{R}$  donc il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  telle que

$\forall n, m \geq n_0, \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}, |F(\varphi_n)(t_k) - F(\varphi_m)(t_k)| \leq \varepsilon$

et finalement,

$\forall n, m \geq n_0,$

$$\begin{aligned} |F(\varphi_n)(u) - F(\varphi_m)(u)| &\leq |F(\varphi_n)(u) - F(\varphi_n)(t_i)| + |F(\varphi_n)(t_i) - F(\varphi_m)(t_i)| + \\ &\quad |F(\varphi_m)(t_i) - F(\varphi_m)(u)| \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

d'où :  $(F(\varphi_n))_n$  est une suite de Cauchy dans la Banach  $(E, \|\cdot\|_0)$  donc convergente dans  $E$ .

**Déduction :** Utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité.

$\forall \varphi \in A$ , on a si  $(\varphi_n)_n$  est une suite qui converge vers  $\varphi$  dans  $E$ , d'après Q-19 la convergence simple de  $(F(\varphi_n))_n$  sur  $[0, 1]$  vers  $F(\varphi)$  et d'après ce qu'on vient de démontrer on a la convergence de  $(F(\varphi_n))_n$  qui n'est autre que la convergence uniforme vers  $F(\varphi)$ .

Conclusion :  $F$  est continue sur  $A$ .

**22.** on a  $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n \in \overline{B}(0, M)$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], |\varphi_n(x)| \leq M$

donc d'après [j],  $\exists \mu_M \in L^2, g(x, \varphi_n(x)) \leq \mu_M(x)$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, c_{\varphi_n} = \left( \int_0^1 |g(x, \varphi_n(x))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\mu_M\|_2$$

donc : et d'après la première inégalité de Q-17,  $\forall t \in [0, 1]$ , la suite réelle  $(F(\varphi_n)(t))_n$  est bornée et d'après le théorème de Stone-Weirstrass, on peut en extraire une suite convergente  $(F(\varphi_{\alpha(n)})(t))_n$ . et d'après Q-20 on peut montrer que pour  $u$  assez proche de  $t$   $(F(\varphi_{\alpha(n)})(u))_n$  converge (on montre qu'il est de Cauchy).

**Construction de l'extraction  $\alpha$  :**

On considère une partie dénombrable et dense du segment  $[0, 1]$ , c-à-d  $D = (t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  avec  $\overline{D} = [0, 1]$   $\exists \alpha_0$ , tq  $(F(\varphi_{\alpha_0(n)})(t_0))_n$  converge, on fait une extraction de la suite bornée  $(F(\varphi_{\alpha_0(n)})(t_1))_n$  d'une sous-suite convergente par une extraction  $\alpha_1$  et on a alors  $(F(\varphi_{\alpha_0 \circ \alpha_1(n)})(t_0))_n$  et  $(F(\varphi_{\alpha_0 \circ \alpha_1(n)})(t_1))_n$  convergent et par récurrence on construit une extraction  $\alpha$  qui donnent la convergence simple sur  $D$  de  $(F(\varphi_{\alpha(n)}))_n$  et par densité le résultat s'étend aux points du segment  $[0, 1]$ .

**23.**  $F$  vérifie les conditions de la partie D) et par suite admet un point fixe intérieur à  $A = \overline{B}(0, M)$  c-à-d dans la boule ouverte  $B(0, M)$ .