Produit de matrices aléatoires : le théorème de Furstenberg–Kesten.

0. **Question préliminaire.** On a tout d'abord, par propriété du logarithme (néperien ?) et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n} \log |\Psi_n| = \frac{\log |Z^{(1)}| + \cdots + \log |Z^{(n)}|}{n}.$$

De plus, d'après l'énoncé, les variables aléatoires $X_i := \log |Z^{(i)}|$ sont indépendantes, de même loi et (à support fini donc) de carrés intégrables. Comme leur espérance commune est $\mathbb{E}[\log |Z^{(1)}|]$, la loi faible des grands nombres fournit bien :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \log |\Psi_n| - \mathbb{E}[\log |Z^{(1)}|] \right| > \varepsilon \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Partie I. Puissance d'une matrice et théorème de Gelfand

1. Soit $x \in \mathbb{C}^d$ tel que $\|x\| = 1$. Si $Bx = 0$ alors on a évidemment $\|ABx\| = 0 \leqslant |||A||| \; |||B|||$. Sinon, on peut écrire $Bx = \|Bx\| y$ avec $y = Bx/\|Bx\|$ normé et donc

$$\|ABx\| = \|Bx\| \|Ay\| \leqslant \|Bx\| \; |||A||| \leqslant |||A||| \; |||B|||.$$

Par définition de $|||AB|||$ (plus petit majorant des $\|ABx\|$ pour $x \in \mathbb{C}^d$ normé), on a bien démontré $|||AB||| \leqslant |||A||| \; |||B|||$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \operatorname{Spec}(A)$ de module maximal. Il existe donc x non nul, que l'on peut supposer normé (puisque $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_d)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^d$) tel que $Ax = \lambda x$.
D'après le cours, on a aussi $A^n x = \lambda^n x$ et donc

$$\rho(A)^n = |\lambda|^n = \|\lambda^n x\| = \|A^n x\| \leqslant |||A^n|||.$$

3. (a) • Indépendamment du caractère triangulaire de A, une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ amène tout d'abord la formule suivante :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, d\} \quad (A^n)_{i,j} = \sum_{i_1, j_1 \cdots, i_n, j_n \in \{1, \dots, d\} \text{ tels que } i = i_1, j_1 = i_2, \cdots, j_{n-1} = i_n \text{ et } j_n = j} a_{i_1, j_1} \cdots a_{i_n, j_n}.$$

L'hérédité s'obtient en effet aisément par définition du produit de deux matrices en écrivant $A^{n+1} = A^n \times A$.

• Par ailleurs, puisque A est triangulaire supérieure, on a $a_{k,l} = 0$ pour tous entiers k, l vérifiant $1 \leqslant l < k \leqslant d$. Ainsi, d'après la formule précédente, on obtient si $i \leqslant j$,

$$(A^n)_{i,j} = \sum_{i_1, j_1 \cdots, i_n, j_n \in \{1, \dots, d\} \text{ tels que } i = i_1, j_1 = i_2, \cdots, j_{n-1} = i_n, j_n = j \text{ et } i_k \leqslant j_k \quad \text{pour tout } k} a_{i_1, j_1} \cdots a_{i_n, j_n}.$$

puisque les autres termes de la somme sont nuls.

• Enfin, comme $i \geqslant 1$ et $j \leqslant d$, on a aussi

$$d - 1 \geqslant j - i = j_n - j_0 = (j_n - j_{n-1}) + \cdots + (j_1 - j_0) = (j_n - i_n) + \cdots + (j_1 - i_1)$$

pour n'importe quels éléments $i_1, j_1, \cdots, i_n, j_n \in \{1, \cdots, d\}$ vérifiant la conditions apparaissant en indice dans la somme précédente (et en posant $i_1 = j_0$). Comme tous les $j_k - i_k$ sont des entiers positifs, il y en au plus $d - 1$ non nuls (sinon leur somme vaudrait au moins $d \times 1$).

En d'autres termes (et avec les notations de l'énoncé), on a bien démontré :

$$(A^n)_{i,j} = \sum_{i_1, j_1, \cdots, i_n, j_n \in \mathcal{E}_n(i,j)} a_{i_1, j_1} \cdots a_{i_n, j_n}.$$

(b) On observe tout d'abord que la dernière condition définissant l'ensemble $\mathcal{E}_n(i,j)$ est automatiquement vérifiée (puisque $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d$). Ainsi, $\mathcal{E}_n(i,j)$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{F}_n(i,j)$ des suites $(u_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ strictement croissantes de $n+1$ entiers telles que $u_0 = 0$ et $u_n = n + (i - j)$ via l'application

$$f : (i_1, j_1, \cdots, i_n, j_n) \in \mathcal{E}_n(i,j) \mapsto (j_0 - i, j_1 - i + 1, j_2 - i + 2, \cdots, j_n - i + n) \in \mathcal{F}_n(i,j),$$

dans laquelle on a toujours posé toujours $j_0 = i_1$.

[En effet, f est bien à valeurs dans $\mathcal{F}_n(i,j)$ (si $(i_1, j_1, \cdots, i_n, j_n) \in \mathcal{E}_n(i,j)$ alors $j_0 - i = i_1 - i = 0$, $j_n - i + n = j - i + n$ et, pour tout k, $j_k - i + k = i_{k+1} - i + k \leqslant j_{k+1} - i + k < j_{k+1} - i + (k+1)$) et l'unique antécédent de $u = (u_0, \cdots, u_n) \in \mathcal{F}_n(i,j)$ par f est (nécessairement) donné par $(i_1, j_1, i_2, j_2, \cdots, i_n, j_n) = (i + u_0, i - 1 + u_1, i - 1 + u_1, i - 2 + u_2, \cdots, i - (n-1) + u_{n-1}, i - n + u_n)$, qui définit bien un élément de $\mathcal{E}_n(i,j)$ (puisque, pour tout k, $j_k = i_{k+1}$ et $j_k - i_k = u_k - u_{k-1} - 1$ si $k > 0$).]

Puisque l'ensemble $\mathcal{F}_n(i,j)$ est aussi en bijection avec les parties de $n-1$ éléments parmi $\{1, \cdots, n+(j-i)-1\}$ (associer à une suite u l'ensemble de ses termes $u_1, \cdots, u_{n-1}$), on a finalement montré :

$$\#\mathcal{E}_n(i,j) = \binom{n-1+(j-i)}{n-1}.$$

(c) Soient $n \geqslant d$, i, j des entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d$.

Puisque A est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont égales à ses coefficients diagonaux (ce sont les racines du polynôme caractéristique). On a donc également $|a_{k,l}| \leqslant \rho(A)$ pour tous entiers $1 \leqslant k, l \leqslant d$ tels que $k = l$.

Ainsi, si $i_1, j_1, \cdots, i_n, j_n \in \mathcal{E}_n(i,j)$,

$$|a_{i_1,j_1} \cdots a_{i_n,j_n}| \leqslant \rho(A)^{n-(d-1)} N_\infty(A)^{d-1}$$

(en notant $N_\infty(A) = \max\limits_{1 \leqslant k,l \leqslant d} |a_{k,l}|$) comme il y a au plus $d-1$ valeurs de k telles que $i_k \neq j_k$. En posant $k_A = (N_\infty(A)/\rho(A))^{d-1}$ si $\rho(A) \neq 0$ et $k_A = 0$ sinon, on a (puisque $n \geqslant d$)

$$|a_{i_1,j_1} \cdots a_{i_n,j_n}| \leqslant k_A \rho(A)^n.$$

La question précédente fournit alors (par inégalité triangulaire)

$$\begin{aligned}
|(A^n)_{i,j}| &\leqslant k_A \#\mathcal{E}_n(i,j)\rho(A)^n \\
&= k_A \binom{n-1+(j-i)}{j-i} \rho(A)^n \\
&\leqslant k_A (n-1+(j-i))^{j-i} \rho(A)^n \\
&\leqslant k_A (n-1+(j-i))^{d-1} \rho(A)^n \\
&\leqslant k_A (n-1+d-1)^{d-1} \rho(A)^n \\
&\leqslant k_A (2n)^{d-1} \rho(A)^n
\end{aligned}$$

par symétrie des coefficients binomaux, en écrivant $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \leqslant n^k$ pour tous naturels $k \leqslant n$ et puisque $d \leqslant n$.

Ceci montre finalement que tous les coefficients de A^n (même ceux, nuls, situés sous la diagonale) sont bornés en valeur absolue par $C_A n^{d-1} \rho(A)^n$ avec $C_A = 2^{d-1} k_A$.

4. • Traitons tout d'abord le cas où A est triangulaire supérieure.

Par équivalence des normes sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (espace vectoriel de dimension finie d^2), il existe ensuite $C > 0$ une constante numérique (ne dépendant que d) telle que $|||\cdot||| \leqslant C N_\infty$.

D'après la question précédente, on a donc

$$\forall n \geqslant d \quad |||A^n||| \leqslant C N_\infty(A^n) \leqslant C C_A n^{d-1} \rho(A)^n$$

de sorte que, avec la question 2,

$$\forall n \geqslant d \quad \log \rho(A) \leqslant \frac{1}{n} \log |||A^n||| \leqslant \frac{\log(C C_A)}{n} + (d-1)\frac{\log(n)}{n} + \log \rho(A).$$

Le théorème d'encadrement et la croissance comparée fournissent donc bien le résultat voulu.

• Dans le cas général, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP =: T$ est triangulaire supérieure. Par ailleurs, puisque les normes $A \mapsto |||P^{-1}AP|||$ et $|||\cdot|||$ sont équivalentes sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, on a immédiatement

$$\frac{1}{n} \log |||A^n||| = \frac{1}{n} \log |||P^{-1}A^nP||| + \underset{n\to\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \log |||T^n||| + \underset{n\to\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \log \rho(T),$$

ce qui conclut puisque $\rho(A) = \rho(T)$ (A et T sont semblables et possèdent donc les mêmes valeurs propres).

5. Ceci se traite comme ci-dessus : puisque N et $|||\cdot|||$ sont équivalentes sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, il existe deux constantes numériques (ne dépendant que de d) $c, C > 0$ telles que $c|||\cdot||| \leqslant N \leqslant C|||\cdot|||$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} \log |||A^n||| + \frac{\log(c)}{n} \leqslant \frac{1}{n} \log N(A^n) \leqslant \frac{1}{n} \log |||A^n||| + \frac{\log(C)}{n};$$

le théorème d'encadrement permet donc de conclure (d'après la question précédente).

6. (a) Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ les valeurs propres complexes de A (répétées avec multiplicités) ainsi que $\sigma_1, \cdots, \sigma_d$ les fonctions symétriques de ces valeurs propres :

$$\forall k \in \{1, \cdots, d\} \quad \sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}.$$

Par définition de $\rho(A)$, l'inégalité triangulaire amène donc immédiatement :

$$\forall k \in \{1, \cdots, d\} \quad |\sigma_k| \leqslant \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} \rho(A)^k = \binom{d}{k} \rho(A)^k.$$

D'autre part, le théorème de Cayley-Hamilton montre que le polynôme caractéristique

$$(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_d) = X^d - \sigma_1 X^{d-1} + \cdots + (-1)^d \sigma_d$$

annule A. On a donc :

$$A^d = \sigma_1 A^{d-1} - \sigma_2 A^{d-2} + \cdots + (-1)^{d-1} \sigma_d I_d$$

et ainsi, d'après l'inégalité triangulaire et les inégalités précédentes,

$$|||A^d||| \leqslant \sum_{k=1}^{d} |\sigma_k| \, |||A^{d-k}||| \leqslant \sum_{k=1}^{d} \binom{d}{k} \rho(A)^k |||A^{d-k}|||.$$

D'autre part, d'après la question 2, $\rho(A)^k = \rho(A)\rho(A)^{k-1} \leqslant \rho(A)|||A^{k-1}|||$ pour tout entier $k \geqslant 1$, on a également :

$$\begin{aligned} |||A^d||| &\leqslant \rho(A) \sum_{k=1}^{d} \binom{d}{k} |||A^{k-1}||| \, |||A^{d-k}||| \\ &\leqslant \rho(A) \sum_{k=1}^{d} \binom{d}{k} |||A|||^{d-1} \end{aligned}$$

puisque, selon la question 1 (et une récurrence immédiate), $|||A^p||| \leqslant |||A|||^p$ pour tout naturel p.

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{d} \binom{d}{k} = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} 1^k 1^{d-k} - 1 = (1+1)^d - 1$ (formule du binôme de Newton), on a bien prouvé le second résultat demandé.

(b) Soit $n \geqslant 1$ un entier. En appliquant le résultat précédent à A^n, on obtient

$$|||A^{nd}||| \leqslant (2^d - 1)\rho(A^n)|||A^n|||^{d-1}.$$

De plus, comme A est trigonalisable, A^n est semblable à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont les puissances n-ièmes des valeurs propres de A. Ainsi, les valeurs propres de A^n sont aussi ces puissances n-ièmes et par suite $\rho(A^n) = \rho(A)^n$.

D'après la question 2 et si A^n est non nul, on a donc bien

$$\frac{|||A^{nd}|||}{(2^d - 1)|||A^n|||^{d-1}} \leqslant \rho(A)^n \leqslant |||A^n|||.$$

Supposons (contrairement à l'énoncé qui suppose uniquement A non nulle, ce qui est clairement insuffisant) A non nilpotente. Alors $\rho(A) \neq 0$ (car si $\rho(A) = 0$ toutes les valeurs propres de A sont nulles donc A, trigonalisable, est nilpotente d'après le cours).

De plus, d'après le théorème de Gelfand (question 4) et par continuité de la fonction exponentielle, on a

$$|||A^{nd}|||^{1/n} = \exp\left(d \frac{1}{nd} \log |||A^{nd}|||\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \exp(d \log \rho(A)) = \rho(A)^d$$

et (de même) $|||A^n|||^{1/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \rho(A)$. Ainsi (puisque $(2^d - 1)^{1/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$),

$$\left(\frac{|||A^{nd}|||}{(2^d - 1)|||A^n|||^{d-1}} \right)^{1/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\rho(A)^d}{\rho(A)^{d-1}} = \rho(A)$$

par opérations sur les limites.

(c) Montrons la continuité de l'application ρ en tout point A de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.
Il suffit pour cela de montrer que, étant donnée (A_p) une suite de limite A (donc bornée), la seule valeur d'adhérence de la suite (bornée par $\sup_p |||A_p|||$) $(\rho(A_p))$ est égale à $\rho(A)$. Notons donc r une valeur d'adhérence de la suite $(\rho(A_p))$; quitte à extraire, on peut écrire $\rho(A_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} r$ et $A_p \xrightarrow[p\to\infty]{} A$.

- Supposons d'abord A nilpotente. D'après le cours, cela signifie exactement que $A^d = 0$ (l'indice de nilpotence est inférieur à d).
Alors $A_p^d \xrightarrow[p\to\infty]{} A^d = 0$ et donc
$$\rho(A_p)^d = \rho(A_p^d) \leqslant |||A_p^d||| \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$$
ce qui montre que $r^d = 0$ par unicité de la limite. Donc $r = 0 = \rho(A)$.
- Si A n'est pas nilpotente alors $A^d \neq 0$ et donc, puisque $\{0\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, il existe un rang p_0 tel que $A_p^d \neq 0$ pour tout $p \geqslant p_0$. D'après la question précédente, on a donc
$$\forall p \geqslant p_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{|||A_p^{nd}|||}{(2^d-1)|||A_p^n|||^{d-1}} \leqslant \rho(A_p)^n \leqslant |||A_p^n|||$$
et ainsi, par passage à la limite lorsque p tend vers l'infini,
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{|||A^{nd}|||}{(2^d-1)|||A^n|||^{d-1}} \leqslant r^n \leqslant |||A^n|||.$$
Prenant la racine n-ième et d'après la seconde partie de la question précédente, un passage à la limite lorsque n tend vers l'infini fournit alors $r = \rho(A)$.

Partie II. Exposants de Lyapunov via la sous-additivité

1. (a) Remarquons tout d'abord qu'une récurrence immédiate sur $k \in \mathbb{N}^*$ fournit, puisque (u_n) est sous-additive,
$$\forall n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N}^* \quad u_{n_1+\cdots+n_k} \leqslant u_{n_1} + \cdots + u_{n_k}.$$
Soit $n \geqslant 1$ un entier. Posons $n = qk_0+r$ la division euclidienne de n par k_0 (avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \cdots, k_0-1\}$). D'après la remarque précédente (et en distinguant le cas $q = 0$), on a alors
$$u_n \leqslant qu_{k_0} + u_r,$$
en convenant que $u_0 = 0$. On obtient donc :
$$\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{q}{n}u_{k_0} + \frac{\max\limits_{0\leqslant i\leqslant k_0-1} u_i}{n} = \frac{qk_0}{n}\frac{u_{k_0}}{k_0} + \frac{\max\limits_{0\leqslant i\leqslant k_0-1} u_i}{n}.$$
Remarque. La version de l'énoncé est doublement fausse. En effet, si tous les $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant k_0-1}$ sont strictement négatifs (par exemple si $k_0 = 2$ et $u_1 < 0$) alors elle entraînerait $\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_{k_0}}{k_0} + \frac{1}{n}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k_0-1} u_i < \frac{u_{k_0}}{k_0}$, ce qui est évidemment absurde pour $n = k_0$. Par ailleurs, sauf si u_{k_0} est positif, on n'a pas toujours $\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_{k_0}}{k_0} + \frac{1}{n}\max\limits_{0\leqslant i\leqslant k_0-1} u_i$ (en prenant par exemple $k_0 = 2$, $n = k_0+1$ avec $u_{k_0} < 0$, $u_1 \geqslant 0$ et $u_{k_0+1} = u_{k_0} + u_1$, on obtiendrait l'absurdité $\frac{u_{k_0}}{n} + \frac{u_1}{n} = \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_{k_0}}{k_0} + \frac{1}{n}\max\limits_{0\leqslant i\leqslant k_0-1} u_i$).

(b) Distinguons les cas selon que l'infimum soit fini ou non.
- Supposons $\inf\limits_{k\geqslant 1} \frac{u_k}{k} = -\infty$ et considérons a un réel. Alors, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{u_{k_0}}{k_0} \leqslant a - 1$. Notons également $C = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant k_0-1} u_i$ ainsi que $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente (corrigée), on a :
$$\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{qk_0}{n}\frac{u_{k_0}}{k_0} + \frac{C}{n}.$$
Puisque $1 - \frac{k_0-1}{n} \leqslant \frac{qk_0}{n} = \frac{n-r}{n} \leqslant 1$, le théorème d'encadrement montre que $\frac{qk_0}{n}\frac{u_{k_0}}{k_0} + \frac{C}{n}$ tend vers $\frac{u_{k_0}}{k_0} \leqslant a - 1 < a$ lorsque n tend vers l'infini. Il existe donc un rang n_0 tel que
$$\forall n \geqslant n_0 \quad \frac{qk_0}{n}\frac{u_{k_0}}{k_0} + \frac{C}{n} \leqslant a$$
et donc
$$\forall n \geqslant n_0 \quad \frac{u_n}{n} \leqslant a.$$
Par définition, on a donc bien $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty = \inf\limits_{k\geqslant 1} \frac{u_k}{k}$.

- Supposons maintenant $i := \inf_{k \geqslant 1} \frac{u_k}{k}$ fini et considérons ε un réel strictement positif. Alors, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{u_{k_0}}{k_0} \leqslant i + \varepsilon$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente (corrigée) et C défini comme ci-dessus, on a également :
$$\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{qk_0}{n} \frac{u_{k_0}}{k_0} + \frac{C}{n}.$$
Puisque $1 - \frac{k_0 - 1}{n} \leqslant \frac{qk_0}{n} = \frac{n-r}{n} \leqslant 1$, le théorème d'encadrement montre que $\frac{qk_0}{n} \frac{u_{k_0}}{k_0} + \frac{C}{n}$ tend vers $\frac{u_{k_0}}{k_0} \leqslant i + \varepsilon$ lorsque n tend vers l'infini. Il existe donc un rang n_0 tel que
$$\forall n \geqslant n_0 \quad \frac{qk_0}{n} \frac{u_{k_0}}{k_0} + \frac{C}{n} \leqslant (i + \varepsilon) + \varepsilon$$
et donc
$$\forall n \geqslant n_0 \quad i \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant i + 2\varepsilon.$$
Par définition, on a donc bien $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} i = \inf_{k \geqslant 1} \frac{u_k}{k}$.

2. (a) Soit $\omega \in \Omega$. Alors, d'après la question I.1,
$$|||\Psi_n(\omega)||| \leqslant \left|\left|\left| M^{(n)}(\omega) \right|\right|\right| \cdots \left|\left|\left| M^{(1)}(\omega) \right|\right|\right| \leqslant \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant k} |||s_i||| \right)^n$$
puisque $M^{(i)}(\omega)$ appartient à l'ensemble fini $\mathcal{S}$ pour tout i.
Remarquons également que (toujours d'après I.1), pour toutes matrices $A, B \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$, $|||B||| = \left|\left|\left| A^{-1}AB \right|\right|\right| \leqslant \left|\left|\left| A^{-1} \right|\right|\right| |||AB|||$ et donc
$$|||AB||| \geqslant \left|\left|\left| A^{-1} \right|\right|\right|^{-1} |||B||| \geqslant \left|\left|\left| A^{-1} \right|\right|\right|^{-1} \left|\left|\left| B^{-1} \right|\right|\right|^{-1},$$
en appliquant la première inégalité au cas particulier $B = I_d$.
On en déduit donc (par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*{}_+$)
$$|||\Psi_n(\omega)||| \geqslant \left|\left|\left| (M^{(n)}(\omega))^{-1} \right|\right|\right|^{-1} \cdots \left|\left|\left| (M^{(1)}(\omega))^{-1} \right|\right|\right|^{-1} \geqslant \left(\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant k} \left|\left|\left| s_i^{-1} \right|\right|\right| \right)^{-1} \right)^n$$
puisque $M^{(i)}(\omega)^{-1}$ appartient à l'ensemble fini $\{s_1^{-1}, \cdots, s_k^{-1}\}$ pour tout i.

(b) La question I.1 nous montre encore (en écrivant une inégalité entre variables aléatoires)
$$\forall n, m \in \mathbb{N}^* \quad |||\Psi_{n+m}||| \leqslant \left|\left|\left| M^{(n+m)} \cdots M^{(n+1)} \right|\right|\right| |||\Psi_n|||$$
et donc, en posant $\Phi_m = M^{(n+m)} \cdots M^{(n+1)}$ (variable aléatoire de même loi que Ψ_m, indépendante de Ψ_n), on a d'une part
$$\forall n, m \in \mathbb{N}^* \quad \log |||\Psi_{n+m}||| \leqslant \log |||\Phi_m||| + \log |||\Psi_n|||$$
et d'autre part (par croissance de l'espérance et en utilisant l'indépendance précédente)
$$\forall n, m \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{E}[|||\Psi_{n+m}|||] \leqslant \mathbb{E}[|||\Phi_m|||]\mathbb{E}[|||\Psi_n|||] = \mathbb{E}[|||\Psi_m|||]\mathbb{E}[|||\Psi_n|||].$$
Le passage à l'espérance (croissante) dans la première inégalité et celui au logarithme (morphisme de groupes bien connus) dans la seconde concluent quant aux sous-additivités demandées.

(c) Le lemme de Fekete (question 1) s'applique directement. De plus, d'après la question (a), on obtient également
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n}\mathbb{E}[|||\Psi_n|||] \in [\log(\alpha), \log(\beta)] \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \log \mathbb{E}[|||\Psi_n|||] \in [\log(\alpha), \log(\beta)],$$
ce qui montre que les limites respectives de ces suites $\ell(\mu)$ et $\xi(\mu)$ appartiennent encore au fermé $[\log(\alpha), \log(\beta)]$.

3. (a) - La première partie découlera du

Lemme 1 (Inégalité de Jensen). *Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans* $[0, +\infty[$. *Alors, en convenant que* $\log(0) = -\infty$ *(convention déjà implicitement utilisée par l'énoncé),* $\mathbb{E}[\log(X)] \leqslant \log \mathbb{E}[X]$.

Démonstration. Notons $x_1, \cdots, x_k$ les valeurs prises par X avec probabilités strictement positives ainsi que $p_1, \cdots, p_k$ les probabilités associées.
L'inégalité de convexité appliquée à la fonction convexe $-\log$ fournit alors immédiatement
$$\mathbb{E}[\log(X)] = p_1 \log(x_1) + \cdots + p_k \log(x_k) \leqslant \log(p_1 x_1 + \cdots + p_k x_k) = \log \mathbb{E}[X]$$
puisque le terme de gauche vaut $-\infty$ si l'un des x_i vaut 0. □

En effet, d'après le Lemme 1 appliqué à la variable aléatoire finie $|||\Psi_n|||$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n}\mathbb{E}[\log |||\Psi_n|||] \leqslant \frac{1}{n} \log \mathbb{E}[|||\Psi_n|||]$$

et donc, par passage à la limite dans les inégalités larges, $\ell(\mu) \leqslant \xi(\mu)$.

- Considérons ensuite le cas où μ est la loi uniforme sur l'ensemble $\mathcal{S}$ constitué de I_d et de $s = 2I_d$. Alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, Ψ_n est égal à s^{X_n} où X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$. D'une part, on a ainsi (puisque $\left|\left|\left|s^k\right|\right|\right| = 2^k$ pour tout entier k)

$$\mathbb{E}[|||\Psi_n|||] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{-n}2^k = 2^{-n}(2+1)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

d'après la formule du binôme. En conséquence, la suite $\left(\frac{1}{n}\mathbb{E}[\log |||\Psi_n|||]\right)_n$ vaut constamment $\log(3/2)$ et donc $\ell(\mu) = \log(3/2)$.
D'autre part, on a $\log |||\Psi_n||| = X_n \log(2)$ et donc, d'après le cours,

$$\mathbb{E}[\log |||\Psi_n|||] = \frac{n}{2}\log(2).$$

On obtient donc directement $\xi(\mu) = \dfrac{\log(2)}{2} < \log\left(\dfrac{3}{2}\right) = \ell(\mu)$ (comme $2 < (3/2)^2 = 9/4$).

(b) Soit $n \geqslant 1$ un entier. Alors, puisque $\Psi_n(\omega)$ est trigonalisable pour tout $\omega \in \Omega$, la question I.1 fournit immédiatement :

$$|||\Psi_n||| \geqslant \rho(\Psi_n) \geqslant |\det(\Psi_n)|^{1/d} = |\det(M^n))|^{1/d} \cdots \left|\det(M^1))\right|^{1/d}$$

(car $|\det(\Psi_n)| = \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\Psi_n)} |\lambda| \leqslant \rho(\Psi_n)^d$).

On en déduit donc, par indépendance mutuelle des $M^{(i)}$ (et croissance de l'espérance),

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{E}[|||\Psi_n|||] \geqslant \mathbb{E}[|\det(M^n))|^{1/d}] \cdots \mathbb{E}[\left|\det(M^1))\right|^{1/d}] = \mathbb{E}[\left|\det(M^1))\right|^{1/d}]^n$$

puisque les $M^{(i)}$ sont identiquement distribuées. Un passage au logarithme puis à la limite fournit donc bien

$$\xi(\mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}[|||\Psi_n|||] \geqslant \mathbb{E}[\left|\det(M^1))\right|^{1/d}].$$

En reprenant l'inégalité précédente, on a également

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \log |||\Psi_n||| \geqslant \log\left(|\det(M^n))|^{1/d}\right) + \cdots + \log\left(\left|\det(M^1))\right|^{1/d}\right)$$

de sorte qu'un passage à l'espérance puis à la limite fournit (puisque les $M^{(i)}$ sont identiquement distribuées)

$$\ell(\mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}[\log |||\Psi_n|||] \geqslant \mathbb{E}[\log \left|\det(M^1))\right|^{1/d}].$$

(c) i. Cette question se traite de manière absolument identique à la question I.5, en utilisant l'équivalence des normes (qui donne aisément $\frac{1}{n}\mathbb{E}[\log N(\Psi_n)] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[\log |||\Psi_n|||] + \underset{n\to\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\frac{1}{n}\log \mathbb{E}[N(\Psi_n)] = \frac{1}{n}\log \mathbb{E}[|||\Psi_n|||] + \underset{n\to\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n}\right)$).

ii. En généralisant la formule donnant les coefficients de A^n obtenue à la question I.3.(a), on a tout d'abord (puisque tous les coefficients sont positifs)

$$N(\Psi_n) = \sum_{1 \leqslant i, i_1, j_1, \cdots, i_n, j_n, j \leqslant d \text{ tels que } i = i_1, j_1 = i_2, \cdots, j_{n-1} = i_n \text{ et } j_n = j} M^{(n)}_{i_1,j_1} \cdots M^{(1)}_{i_n,j_n}.$$

Ainsi, par linéarité de l'espérance et indépendance des $M^{(i)}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N(\Psi_n)] &= \sum_{1 \leqslant i, i_1, j_1, \cdots, i_n, j_n, j \leqslant d \text{ tels que } i = i_1, j_1 = i_2, \cdots, j_{n-1} = i_n \text{ et } j_n = j} \mathbb{E}[M^{(n)}]_{i_1,j_1} \cdots \mathbb{E}[M^{(1)}]_{i_n,j_n} \\ &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant d} (\mathbb{E}[M^{(1)}] \cdots \mathbb{E}[M^{(1)}])_{i,j} \\ &= N\left(\mathbb{E}[M^{(1)}]^n\right) \end{aligned}$$

puisque les $M^{(i)}$ sont identiquement distribuées (et d'après la formule déjà citée de I.3.(a)).
La question i fournit alors directement :

$$\xi(\mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}[N(\Psi_n)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N\left(\mathbb{E}[M^{(1)}]^n\right) = \log \rho(\mathbb{E}[M^{(1)}])$$

d'après le théorème de Gelfand (question I.5) appliqué à la matrice déterministe $\mathbb{E}[M^{(1)}]$.

iii. Dans le cas général, l'inégalité triangulaire fournit (en utilisant la formule donnant le coefficient (i,j) d'un produit de n matrices)

$$N(\Psi_n) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} |(\Psi_n)_{i,j}| \leqslant \sum_{1\leqslant i,i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n,j\leqslant d \text{ tels que } i=i_1,j_1=i_2,\cdots,j_{n-1}=i_n \text{ et } j_n=j} \left|M^{(n)}_{i_1,j_1}\right| \cdots \left|M^{(1)}_{i_n,j_n}\right|.$$

pour tout entier $n \geqslant 1$. La même méthode qu'à la question précédente fournit alors

$$\forall n \geqslant 1 \quad \mathbb{E}[N(\Psi_n)] \leqslant N\left(\mathbb{E}[|M^{(1)}|]^n\right)$$

puis, après passage au logarithme puis à la limite,

$$\xi(\mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}[N(\Psi_n)] \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N\left(\mathbb{E}[|M^{(1)}|]^n\right) = \log \rho(\mathbb{E}[|M^{(1)}|])$$

toujours d'après le théorème de Gelfand (question I.5).

Partie III. Calcul de $\ell(\mu)$ et $\xi(\mu)$ dans des cas particuliers

1. (a) Soit $k \in \{1,\cdots,d\}$. Tout d'abord, la question I.1 montre :

$$\forall n \geqslant 1 \quad |||\Psi_n||| \geqslant \rho(\Psi_n) \geqslant \left|M^{(n)}_{k,k}\right| \cdots \left|M^{(1)}_{k,k}\right|$$

puisque Ψ_n est également diagonale, de coefficients diagonaux $(M^{(n)}_{k,k} \cdots M^{(1)}_{k,k})_k$.
Par passage au logarithme (fonction croissante) puis à l'espérance, on obtient donc

$$\forall n \geqslant 1 \quad \frac{1}{n}\mathbb{E}[\log |||\Psi_n|||] \geqslant \mathbb{E}[\log |M^{(1)}_{k,k}|]$$

comme les $M^{(i)}$ sont également identiquement distribuées. Un passage à la limite fournit ainsi :

$$\ell(\mu) \geqslant \mathbb{E}[\log |M^{(1)}_{k,k}|].$$

En utilisant l'indépendance mutuelle des $M^{(i)}$ puis un passage au logarithme, on obtient, de manière similaire,

$$\forall n \geqslant 1 \quad \frac{1}{n} \log \mathbb{E}[|||\Psi_n|||] \geqslant \log \mathbb{E}[|M^{(1)}_{k,k}|]$$

puis, par passage à la limite,

$$\xi(\mu) \geqslant \log \mathbb{E}[|M^{(1)}_{k,k}|].$$

Ces inégalités étant vraies pour tout $k \in \{1,\cdots,d\}$, le résultat suit.

(b) La question II.3.c.iii fournit

$$\xi(\mu) \leqslant \log \rho(\mathbb{E}[|M^{(1)}|]).$$

Cependant, ici $\mathbb{E}[|M^{(1)}|]$ est la matrice diagonale de coefficients $\mathbb{E}[|M^{(1)}_{k,k}|]$ et donc le module maximal de ses valeurs propres est

$$\rho(\mathbb{E}[|M^{(1)}|]) = \max_{1\leqslant k\leqslant d} \mathbb{E}[|M^{(1)}_{k,k}|].$$

La croissance du logarithme fournit donc :

$$\log \rho(\mathbb{E}[|M^{(1)}|]) = \max_{1\leqslant k\leqslant d} \log \mathbb{E}[|M^{(1)}_{k,k}|],$$

et l'on peut conclure à l'égalité voulue d'après la question précédente.

(c) Raisonnons par l'absurde en supposant (d'après la question précédente) $\ell(\mu) > M$ avec $M := \max_{1\leqslant k\leqslant d} \mathbb{E}[\log |M^{(1)}_{k,k}|]$.
Alors, d'après la question préliminaire et puisque $x := \frac{M+\ell(\mu)}{2} > \mathbb{E}[\log |M^{(1)}_{k,k}|]$ pour tout $k \in \{1,\cdots,d\}$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \log |M^{(1)}_{k,k} \cdots M^{(n)}_{k,k}| > x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(les événements apparaissant ci-dessus sont inclus dans les $\left(\left|\frac{1}{n}(\log |M^{(1)}_{k,k}| + \cdots + \log |M^{(n)}_{k,k}|) - \mathbb{E}[\log |M^{(1)}_{k,k}|]\right| > \varepsilon\right)$ avec $\varepsilon = x - \mathbb{E}[\log |M^{(1)}_{k,k}|] > 0$). En écrivant, pour tout $n \geqslant 1$,

$$p_n := \mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant d}\left(\frac{1}{n} \log |M^{(1)}_{k,k} \cdots M^{(n)}_{k,k}|\right) > x\right) \leqslant \sum_{k=1}^{d} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \log |M^{(1)}_{k,k} \cdots M^{(n)}_{k,k}| > x\right),$$

le théorème d'encadrement montre que $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Posant $X_n := \frac{1}{n}\log |||\Psi_n|||$, on peut maintemant écrire, pour tout naturel non nul n,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_n] &= \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{X_n\leqslant x}] + \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{X_n > x}] \\
&\leqslant x + \log(\beta)\mathbb{P}\left(X_n > x\right) \quad \text{(puisque } X_n \leqslant \log(\beta) \text{ selon la question II.2.(a))} \\
&= x + \log(\beta)p_n
\end{aligned}$$

par croissance de l'espérance et puisque, en tant que matrice diagonale, $|||\Psi_n||| = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant d} |M_{k,k}^{(1)} \cdots M_{k,k}^{(n)}|$.
Enfin, puisque (selon la définition de la question II.2.(c)) $(\mathbb{E}[X_n])$ tend vers $\ell(\mu)$, un passage à la limite dans l'inégalité large précédente fournit la contradiction $\ell(\mu) \leqslant x$.

2. (a) On peut identifier (comme l'énoncé le fait implicitement) les matrices $S_1, \cdots, S_k$ de $\mathcal{S}$ à leurs applications linéaires canoniquement associées $s_1, \cdots, s_k \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$. Il s'agit en fait de montrer (on va le faire par récurrence forte sur l'entier $d \geqslant 1$) le résultat suivant : si $S_1, \cdots, S_k \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ commutent alors les S_i sont simultanément semblables à des matrices triangulaires supérieures.

- Si $d = 1$, toutes les matrices sont déjà triangulaires supérieures.
- Supposons le résultat acquis pour toute famille de matrices commutantes de taille strictement inférieure à $d \geqslant 2$. Montrons le résultat pour $S_1, \cdots, S_k \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, toujours sous hypothèse de commutation.
  Le résultat est évident si toutes les S_i sont des matrices d'homothéties. Sinon l'on peut supposer que S_1 n'est pas une homothétie (quitte à renuméroter).
  Soit également λ_0 une valeur propre de S_1. Le sous-espace vectoriel $V := \mathrm{Ker}(S_1 - \lambda_0\,\mathrm{Id})$ est stable par tous les S_i (puisque $S_1 - \lambda_0 I_d$ commute avec tous les S_i). Notons également $s_i \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$ les applications linéaires canoniquement associées aux S_i.
  Comme $\dim(V) < d$ (on a $V \neq \mathbb{C}^d$ puisque S_1 n'est pas une homothétie), l'hypothèse de récurrence appliquée aux matrices des induits $\hat{s}_i$ des s_i sur V, dans n'importe quelle base de V, montre que les $\hat{s}_i$ admettent une base commune de trigonalisation $\mathcal{B}_0$.
  Ainsi, en complétant $\mathcal{B}_0$ en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^d$, les matrices des s_i dans la base $\mathcal{B}$ prennent les formes par blocs suivantes :
  $$M_i = \begin{pmatrix} T_i & * \\ 0 & A_i \end{pmatrix}$$
  avec T_i des matrices triangulaires supérieures et A_i des matrices carrées de taille $d' := d - \dim(V) < d$.
  Par suite, les S_i sont simultanément semblables aux M_i.
  D'après l'hypothèse de récurrence, il existe de plus une matrice de passage $P \in \mathrm{GL}_{d'}(\mathbb{C})$ telle que $T_i' := P^{-1}A_iP$ soit triangulaire supérieure pour tout i. Ainsi, en posant $Q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, on obtient :
  $$\forall i \in \{1, \cdots, k\} \quad Q^{-1}M_iQ = \begin{pmatrix} T_i & * \\ 0 & P^{-1}A_iP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_i & * \\ 0 & T_i', \end{pmatrix}$$
  ce qui conclut puisque les S_i sont alors simultanément semblables aux $\begin{pmatrix} T_i & * \\ 0 & T_i', \end{pmatrix}$.

(b) Soit $n \geqslant 1$ un entier. Puisque les Ψ_n sont (dans la base $\mathcal{B}$) triangulaires de coefficients diagonaux $(\mathfrak{M}_{k,k}^{(n)} \cdots \mathfrak{M}_{k,k}^{(1)})_k$, on a immédiatement
$$\rho(\Psi_n) = \max_{1\leqslant k\leqslant d} \left|\mathfrak{M}_{k,k}^{(n)}\right| \cdots \left|\mathfrak{M}_{k,k}^{(1)}\right|.$$
Le même raisonnement qu'à la question 1.(a) fournit donc
$$\ell(\mu) \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant d} \mathbb{E}[\log|\mathfrak{M}_{k,k}^{(1)}|]$$
et
$$\xi(\mu) \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant d} \log \mathbb{E}[|\mathfrak{M}_{k,k}^{(1)}|].$$
De plus, d'après la question II.3.(c).iii, on a également :
$$\xi(\mu) \leqslant \log\rho(\mathbb{E}[|\mathfrak{M}^{(1)}|]) = \max_{1\leqslant k\leqslant d} \log \mathbb{E}[|\mathfrak{M}_{k,k}^{(1)}|]$$
par croissance du log et puisque $\mathbb{E}[|\mathfrak{M}^{(1)}|]$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\mathbb{E}[|\mathfrak{M}_{k,k}^{(1)}|]$. La preuve est complète.

3. (a)
- Dans le cas de la loi μ_0, l'expérience est presque sûrement déterministe (Ψ_n vaut presque sûrement R^n pour tout n). D'après le théorème de Gelfand (question I.4), on a donc
  $$\ell(\mu_0) = \xi(\mu_0) = \log\rho(R) = 0$$
  puisque $\mathrm{Spec}(R) = \{i, -i\}$ (le polynôme caractéristique de R vaut aisément $X^2 + 1$).

- Dans le second cas, Ψ_n vaut presque sûrement D^n pour tout n et le théorème de Gelfand (question I.4) fournit donc aisément
$$\ell(\mu_1) = \xi(\mu_1) = \log \rho(D) = \log(2)$$
puisque $\mathrm{Spec}(D) = \{2, 1/2\}$ (D est diagonale).

(b) - Montrons, par récurrence sur le naturel n, qu'il existe deux signes $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$ tels que
$$\Psi_n e_1 = \varepsilon_1 2^{\sum_{i=1}^n \chi_i} e_{1+N_n} \quad \text{et} \quad \Psi_n e_2 = \varepsilon_2 2^{-\sum_{i=1}^n \chi_i} e_{2+N_n},$$
en notant les indices des e_j modulo 2 et avec $N_n = \#\{i \in \{1, \cdots, n\} : M^{(i)} = R\}$.
Le résulat est d'abord évident si $n = 0$. Supposons maintenant le résultat acquis à un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons-le au rang $n+1$.
* Supposons d'abord que $M^{(n+1)} = R$. Alors $N_{n+1} = 1 + N_n$ et l'on a (puisque $Re_1 = e_2$ et $Re_2 = -e_1$)
$$\Psi_{n+1} e_1 = \varepsilon_1' 2^{\sum_{i=1}^n \chi_i} e_{1+N_{n+1}} \quad \text{et} \quad \Psi_{n+1} e_2 = \varepsilon_2' 2^{-\sum_{i=1}^n \chi_i} e_{2+N_{n+1}}$$
pour certains signes $\varepsilon_1', \varepsilon_2'$. Comme $\chi_{n+1} = 0$ on a $\sum_{i=1}^{n+1} \chi_i = \sum_{i=1}^{n} \chi_1$ et le résultat est démontré au rang $n+1$.
* Supposons maintenant que $M^{(n+1)} = D$. Alors l'on a (puisque $De_1 = 2e_1$ et $De_2 = 2^{-1}e_2$)
$$\Psi_{n+1} e_1 = \varepsilon_1 2^{\sum_{i=1}^n \chi_i + 1} e_{1+N_n} \quad \text{et} \quad \Psi_{n+1} e_2 = \varepsilon_2 2^{-(\sum_{i=1}^n \chi_i + 1)} e_{2+N_n}$$
si N_n est pair, et
$$\Psi_{n+1} e_1 = \varepsilon_1 2^{\sum_{i=1}^n \chi_i - 1} e_{1+N_n} \quad \text{et} \quad \Psi_{n+1} e_2 = \varepsilon_2 2^{-(\sum_{i=1}^n \chi_i - 1)} e_{2+N_n}$$
sinon. Comme $N_{n+1} = N_n$ ici, la définition de χ_{n+1} fournit finalement (dans tous les cas) :
$$\Psi_{n+1} e_1 = \varepsilon_1 2^{\sum_{i=1}^{n+1} \chi_i} e_{1+N_{n+1}} \quad \text{et} \quad \Psi_{n+1} e_2 = \varepsilon_2 2^{-\sum_{i=1}^{n+1} \chi_i} e_{2+N_{n+1}},$$
ce qui conclut notre preuve par récurrence.
- On en déduit immédiatement, pour tout naturel n,
$$\|\Psi_n e_1\| = 2^{\sum_{i=1}^n \chi_i} \quad \text{et} \quad \|\Psi_n e_2\| = 2^{-\sum_{i=1}^n \chi_i}.$$
De plus, si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ est un vecteur normé (tel que $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$) alors, pour tout naturel n,
$$\|\Psi_n x\|^2 = \|x_1 \Psi_n e_1 + x_2 \Psi_n e_2\|^2 = |x_1|^2 2^{2\sum_{i=1}^n \chi_i} + |x_2|^2 2^{-2\sum_{i=1}^n \chi_i} \leqslant 2^{2\left|\sum_{i=1}^n \chi_i\right|}$$
puisque $\Psi_n e_1$ et $\Psi_n e_2$ sont orthogonaux (d'après l'expression préliminaire de ces deux vecteurs). On a donc (par définition) $|||\Psi_n||| \leqslant 2^{\left|\sum_{i=1}^n \chi_i\right|}$ puis comme $|||\Psi_n||| \geqslant \max(\|\Psi_n e_1\|, \|\Psi_n e_2\|)$,
$$|||\Psi_n||| = 2^{\left|\sum_{i=1}^n \chi_i\right|}.$$

(c) - Notons d'abord, pour i un naturel, π_i la probabilité que N_i (défini ci-dessus comme le nombre de $j \in \{1, \cdots, i\}$ tels que $M^{(j)} = R$) soit pair.
Alors, en conditionnant avec le système complet d'événements $[M^{(i)} = R], [M^{(i)} = D]$, on obtient :
$$\begin{aligned}
\pi_i &= \mathbb{P}(N_i \text{ est pair et } M^{(i)} = R) + \mathbb{P}(N_i \text{ est pair et } M^{(i)} = D) \\
&= \mathbb{P}(N_{i-1} \text{ est impair et } M^{(i)} = R) + \mathbb{P}(N_{i-1} \text{ est pair et } M^{(i)} = D) \\
&= (1-p)(1-\pi_{i-1}) + p\pi_{i-1}
\end{aligned}$$
pour tout $i \geqslant 1$ (par indépendance de N_{i-1} et de $M^{(i)}$). On en déduit encore :
$$\forall i \geqslant 1 \quad 2\pi_i - 1 = (2p-1)(2p_{i-1} - 1)$$
puis (suite géométrique)
$$\forall i \in \mathbb{N} \quad 2\pi_i - 1 = (2p-1)^i.$$

- On a ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\chi_i] &= 1\cdot\mathbb{P}(M^{(i)}=D \text{ et } N_i \text{ pair}) - 1\cdot\mathbb{P}(M^{(i)}=D \text{ et } N_i \text{ impair})\\ &= \mathbb{P}(M^{(i)}=D \text{ et } N_{i-1} \text{ pair}) - \mathbb{P}(M^{(i)}=D \text{ et } N_{i-1} \text{ impair})\\ &= p\pi_{i-1} - p(1-\pi_{i-1})\\ &= p(2p-1)^{i-1}\end{aligned}$$

  par indépendance de $M^{(i)}$ et de N_{i-1} (et d'après le calcul préliminaire).
- De même, pour tous entiers tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\chi_i\chi_j] &= 1\cdot\mathbb{P}(M^{(i)}=D, M^{(j)}=D \text{ et } N_i, N_j \text{ de même parité})\\ &- 1\cdot\mathbb{P}M^{(i)}=D, M^{(j)}=D \text{ et } N_i, N_j \text{ de parités opposées})\\ &= \mathbb{P}(M^{(i)}=D, M^{(j)}=D \text{ et } N'_{i,j} \text{ pair}) - \mathbb{P}(M^{(i)}=D, M^{(j)}=D \text{ et } N'_{i,j} \text{ impair})\end{aligned}$$

  en notant $N'_{i,j} = \#\{k \in \{i+1,\cdots,j-1\} : M^{(k)}=R\}$. Puisque cette variable est indépendante de $M^{(i)}, M^{(j)}$ et de même loi que N_{j-1-i} (puisque les $M^{(k)}$ sont identiquement distribuées), on a alors :

$$\mathbb{E}[\chi_i\chi_j] = p^2\pi_{j-i-1} - p^2(1-\pi_{j-i-1}) = p^2(2\pi_{j-i-1}-1) = p^2(2p-1)^{j-i-1},$$

  toujours d'après le calcul préliminaire.

(d) On a tout d'abord :

$$\left(\sum_{i=1}^n \chi_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \chi_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\chi_i\chi_j$$

et donc, par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\chi_i\right)^2\right) &= n^{-2}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\chi_i^2] + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbb{E}[\chi_i\chi_j]\right)\\ &= n^{-2}\left(np + 2p^2\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=i+1}^n (2p-1)^{j-i-1}\right)\right)\end{aligned}$$

puisque chaque χ_i^2 est une loi de Bernoulli de paramètre d'échec $\mathbb{P}[\chi_i=0] = 1-p$ et d'après la question précédente. Le changement d'indice $k = j-i-1$ dans la somme interne précédente fournit donc finalement :

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\chi_i\right)^2\right) = pn^{-1} + 2p^2n^{-2}\sum_{i=1}^n\sum_{k=0}^{n-i-1}(2p-1)^k = pn^{-1} + 2p^2n^{-2}\underset{n\to\infty}{\mathrm{O}}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

puisque, comme $p \in]0,1[$ (et donc $|2p-1|<1$), la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}(2p-1)^k$ converge.

(e) D'après la question (b), on a d'abord

$$\left|\frac{1}{n}\mathbb{E}[\log |||\Psi_n|||]\right| = \log(2)\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\chi_i\right| \leqslant \log(2)\left(\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\chi_i\right)^2\right)\right)^{1/2}$$

selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'après la question précédente, on a donc :

$$\ell(\mu_p) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbb{E}[\log |||\Psi_n|||] = 0.$$

(f) Comme à la question II.3.(c), on a d'abord

$$N(\Psi_n) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant 2}\left|\sum_{1\leqslant i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n\leqslant 2 \text{ tels que } i=i_1,j_1=i_2,\cdots,j_{n-1}=i_n \text{ et } j_n=j} M^{(n)}_{i_1,j_1}\cdots M^{(1)}_{i_n,j_n}\right|.$$

Néanmoins, puisque $M^{(i)} \in \{R,D\}$ pour tout i, alors, pour tout $k \in \{1,2\}$, il existe au plus un $l \in \{1,2\}$ tel que $M^{(i)}_{k,l}$ est non nul (cette propriété est vérifée pour R et D). Ainsi, pour tous entiers tels que $1 \leqslant i,j \leqslant 2$, il existe au plus un élément $(i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n)$ tel que $i=i_1, j_1=i_2,\cdots,j_{n-1}=i_n$, $j_n=j$ et $M^{(n)}_{i_1,j_1}\cdots M^{(1)}_{i_n,j_n} \neq 0$. La somme interne de la somme précédente se réduit donc au plus à un élément et donc :

$$N(\Psi_n) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant 2}\sum_{1\leqslant i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n\leqslant 2 \text{ tels que } i=i_1,j_1=i_2,\cdots,j_{n-1}=i_n \text{ et } j_n=j}\left|M^{(n)}_{i_1,j_1}\cdots M^{(1)}_{i_n,j_n}\right|.$$

On peut alors conclure comme aux questions II.3.(c).ii et iii que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}[N(\Psi_n)] = N\left(\mathbb{E}[|M^{(1)}|]^n\right).$$

(g) En raisonnant comme à la question II.3.(c).ii, la question précédente nous fournit tout d'abord

$$\xi(\mu_p) = \log \rho(\mathbb{E}[|M^{(1)}|]).$$

Ensuite, un calcul direct fournit

$$\mathbb{E}[|M^{(1)}|] = p|R| + (1-p)|D| = \begin{pmatrix} 2p & 1-p \\ 1-p & p/2 \end{pmatrix}.$$

Puisque le polynôme caractéristique de cete matrice vaut

$$X^2 - \frac{5}{2}pX + (p^2 - (1-p)^2) = X^2 - \frac{5}{2}pX + (2p-1)$$

(de discriminant $2^{-2}(25p^2 - 32p + 16) > 2^{-2}(5p-4)^2$), ses valeurs propres sont de plus $\lambda_\pm = \dfrac{5p \pm \sqrt{25p^2 - 32p + 16}}{4}$.
Comme visiblement $\max(0, \lambda_-) < \lambda_+$ et que $\lambda_+ - (-\lambda_-) = \frac{5}{2}p > 0$, on a finalement $\rho(\mathbb{E}[|M^{(1)}|] = \lambda_+$ et donc

$$\xi(\mu_p) = \log \rho(\mathbb{E}[|M^{(1)}|]) = \log \left(\frac{5p + \sqrt{25p^2 - 32p + 16}}{4} \right).$$

Partie IV. Le théorème de Furstenberg–Kesten

1. On a tout d'abord

$$\Psi_n = (M^{(n)} \cdots M^{(qk_0+1)})(M^{(qk_0)} \cdots M^{((q-1)k_0+1)}) \cdots (M^{(k_0)} \cdots M^{(1)})$$

de sorte que, en posant $Q_{k_0}^{(i)} = M^{(ik_0)} \cdots M^{((i-1)k_0+1)}$ pour tout $i \in \{1, \cdots, q\}$ et $Q_r = M^{(n)} \cdots M^{(qk_0+1)}$, on obtient :

$$|||\Psi_n||| = \left|\left|\left| Q_r Q_{k_0}^{(q)} \cdots Q_{k_0}^{(1)} \right|\right|\right| \leqslant |||Q_r||| \cdot \left|\left|\left| Q_{k_0}^{(q)} \right|\right|\right| \cdots \left|\left|\left| Q_{k_0}^{(1)} \right|\right|\right|,$$

d'après la question I.1.
Par ailleurs, puisque les $M^{(j)}$ sont mutuellement indépendantes, le lemme des coalitions montre que les variables $(Q_{k_0}^{(i)})_{1 \leqslant i \leqslant q}$ et Q_r sont mutuellement indépendantes. De plus, les $Q_{k_0}^{(i)}$ sont identiquement distribuées (puisque les $M^{(j)}$ le sont), de même loi que $Q_{k_0}^{(1)} = \Psi_{k_0}$ et $Q_r = M^{(n)} \cdots M^{(qk_0+1)}$ a même loi que $M^{(r)} \cdots M^{(1)} = \Psi_r$.

2. Soient x et ε deux réels strictement positifs.
D'une part, puisque $\ell(\mu)$ est la limite des $\frac{1}{k}\mathbb{E}[\log |||\Psi_k|||]$ lorsque k tend vers l'infini (d'après la question II.2.(c)), il existe $k_0 \geqslant 1$ tel que

$$\frac{1}{k_0}\mathbb{E}[\log |||\Psi_{k_0}|||] \leqslant \ell(\mu) + x.$$

D'autre part, la loi faible des grands nombres appliquée à une suite $\left(\log \left|\left|\left| Q_{k_0}^{(i)} \right|\right|\right|\right)_{i \geqslant 1}$ de variables indépendantes (comme celle que permet de construire la question précédente) et de même loi que $\log |||\Psi_{k_0}|||$ (variable finie donc de carré intégrable) fournit

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{qk_0} \left(\log \left|\left|\left| Q_{k_0}^{(1)} \right|\right|\right| + \cdots + \log \left|\left|\left| Q_{k_0}^{(q)} \right|\right|\right| \right) \geqslant \frac{1}{k_0}\mathbb{E}[\log |||\Psi_{k_0}|||] + x \right) \xrightarrow[q \to \infty]{} 0,$$

et donc *a fortiori* (puisque cet événement est inclus dans le précédent) il existe $q_0 \geqslant 1$ tel que pour tout entier $q \geqslant q_0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{qk_0} \left(\log \left|\left|\left| Q_{k_0}^{(1)} \right|\right|\right| + \cdots + \log \left|\left|\left| Q_{k_0}^{(q)} \right|\right|\right| \right) \geqslant \ell(\mu) + 2x \right) \leqslant \varepsilon.$$

Soit maintenant $n \geqslant 1$ un entier. En posant $C > 0$ un majorant des variables aléatoires finies $(|||Q_r|||)_{0 \leqslant r \leqslant k_0 - 1}$, la question précédente (dont on conserve les notations) fournit

$$\frac{1}{n}\log |||\Psi_n||| \leqslant \frac{\log(C)}{n} + \frac{1}{n}\left(\log \left|\left|\left| Q_{k_0}^{(1)} \right|\right|\right| + \cdots + \log \left|\left|\left| Q_{k_0}^{(q)} \right|\right|\right| \right) \leqslant x + \frac{1}{qk_0}\left(\log \left|\left|\left| Q_{k_0}^{(1)} \right|\right|\right| + \cdots + \log \left|\left|\left| Q_{k_0}^{(q)} \right|\right|\right| \right)$$

pourvu que n soit supérieur à un certain entier déterministe N (qui existe puisque $\frac{\log(C)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$).
On peut également supposer $N \geqslant q_0 k_0$. D'après la définition de q_0, on a alors, pour tout $n \geqslant N$ (ce qui implique $q \geqslant q_0$),

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\log |||\Psi_n||| \geqslant \ell(\mu) + 3x \right) \leqslant \mathbb{P}\left(\frac{1}{qk_0} \left(\log \left|\left|\left| Q_{k_0}^{(1)} \right|\right|\right| + \cdots + \log \left|\left|\left| Q_{k_0}^{(q)} \right|\right|\right| \right) \geqslant \ell(\mu) + 2x \right) \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\log |||\Psi_n||| \geqslant \ell(\mu) + 3x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$; ce qu'il fallait démontrer.

3. Sans nuire à la généralité (quitte à étudier la suite $(X'_n) := (X_n - \ell)$), on peut tout d'abord supposer que $\ell = 0$. Soient maintenant x et ε deux réels strictement positifs. Posons encore x_0 un réel strictement positif à choisir ultérieurement.
   On a tout d'abord, pour tout $n \geqslant 1$,
$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{X_n<0}] + \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{X_n\in[0,x_0]}] + \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{X_n>x_0}]$$
   de sorte que, par croissance de l'espérance,
$$\begin{aligned} x\mathbb{P}(X_n < -x) &\leqslant \mathbb{E}[-X_n \mathbb{1}_{X_n<-x}] \\ &\leqslant \mathbb{E}[-X_n \mathbb{1}_{X_n<0}] \\ &= -\mathbb{E}[X_n] + \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{X_n\in[0,x_0]}] + \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{X_n>x_0}] \\ &\leqslant -\mathbb{E}[X_n] + x_0 + b\mathbb{P}(X_n > x_0) \end{aligned}$$
   puisque $0 = \ell \in [a,b]$ et $X_n \in [a,b]$.
   Fixons maintenant $x_0 \in]0, \varepsilon x]$. D'après les hypothèses, il existe un rang N tel que $b\mathbb{P}(X_n > x_0) = b(1 - \mathbb{P}(X_n \leqslant \ell + x_0)) \leqslant \varepsilon x$ et $-\mathbb{E}[X_n] \leqslant \varepsilon x$ pour tout $n \geqslant N$. L'inégalité précédente fournit ainsi, sous les mêmes conditions,
$$x\mathbb{P}(X_n < -x) \leqslant 3\varepsilon x \quad \text{donc} \quad |\mathbb{P}(X_n < -x) - 0| \leqslant 3\varepsilon,$$
   après division par $x > 0$. On a donc démontré que $\mathbb{P}(X_n < -x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et ainsi, d'après la deuxième hypothèse,
$$\mathbb{P}(|X_n| > x) = \mathbb{P}(X_n < -x) + \mathbb{P}(X_n > x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
   pour tout $x > 0$. La preuve est complète.
4. Il suffit d'appliquer la question précédente à la suite de variables aléatoires $\left(\frac{1}{n}\log |||\Psi_n|||\right)_{n\geqslant 1}$. C'est possible d'après la question 2, puisque (selon la question II.2.(a)) cette suite est à valeurs dans $[\log(\alpha), \log(\beta)]$ et que (selon la définition de la question II.2.(c)) $\ell(\mu) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\log |||\Psi_n|||\right)$.
5. (a) Tout découlera du :
   Lemme 2. *Soient $(X_n), (Y_n), (Z_n)$ des suites de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé ainsi que x, y, ℓ des réels tels que $\ell > \max(x,y)$. Si $\max(X_n, Y_n, Z_n)$ converge en probabilité vers ℓ et que X_n (respectivement Y_n) converge en probabilité vers x (respectivement y) alors Z_n converge en probabilité vers ℓ.*

   Démonstration. Soit ε un réel tel que $0 < \varepsilon < \ell - \max(x,y)$. Puisque l'on a d'abord, pour tout n,
$$\mathbb{P}(|\max(X_n,Y_n,Z_n) - \ell| \leqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(\max(X_n,Y_n,Z_n) \leqslant \ell + \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(Z_n \leqslant \ell + \varepsilon),$$
   le théorème d'encadrement (et l'hypothèse de convergence en probabilité de $\max(X_n, Y_n, Z_n)$ vers ℓ) montre que $\mathbb{P}(Z_n \leqslant \ell + \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. On a ensuite, pour tout n,
$$\mathbb{P}(|\max(X_n,Y_n,Z_n) - \ell| \leqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(\max(X_n,Y_n,Z_n) \geqslant \ell - \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(X_n \geqslant \ell - \varepsilon) + \mathbb{P}(Y_n \geqslant \ell - \varepsilon) + \mathbb{P}(Z_n \geqslant \ell - \varepsilon),$$
   et donc, puisque
$$0 \leqslant \mathbb{P}(X_n \geqslant \ell - \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|X_n - x| > \overbrace{\ell - x - \varepsilon}^{>0}) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \mathbb{P}(Y_n \geqslant \ell - \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|Y_n - y| > \overbrace{\ell - y - \varepsilon}^{>0}),$$
   le théorème d'encadrement (et l'hypothèse de convergence en probabilité de X_n, Y_n vers x, y) montre que $\mathbb{P}(Z_n \geqslant \ell - \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
   Par suite,
$$\mathbb{P}(|Z_n - \ell| > \varepsilon) = \mathbb{P}(Z_n < \ell - \varepsilon) + \mathbb{P}(Z_n > \ell + \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
   ce qui conclut (le résultat reste immédiatement vrai pour des valeurs de ε supérieures, par croissance de $\mathbb{P}$). □

   Voyons maintenant comment appliquer ce résultat. Tout d'abord, puisque $N_\infty(A) = \max_{1\leqslant i,j\leqslant d} |a_{i,j}|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, le théorème de Furstenberg–Kesten (démontré à la question précédente) et un raisonnement similaire à la question II.3.(c).i montrent que
$$\frac{1}{n}\log N_\infty(\Psi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \ell(\mu).$$

[En notant c, C des réels strictement positifs tels que $c|||\cdot||| \leqslant N_\infty \leqslant C|||\cdot|||$, l'inégalité triangulaire fournit en effet, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(|\log\left(N_\infty(\Psi_n)\right)/n - \ell(\mu)| > 2\varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|\log\left(|||\Psi_n|||\right)/n - \ell(\mu)| > \varepsilon\right)$ pour tout naturel n supérieur ou égal à $\max(|\log(C)|, |\log(c)|)/\varepsilon$.]
Avec les notations de l'énoncé (et par croissance du logarithme), on a donc :

$$\max\left(\frac{1}{n}\log|X_{1,1}^{(n)}|, \frac{1}{n}\log|X_{2,2}^{(n)}|, \frac{1}{n}\log|X_{1,2}^{(n)}|\right) \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \ell(\mu).$$

Par ailleurs, la question préliminaire montre que (puisque toutes les matrices de $\mathcal{S}$ sont triangulaires supérieures)

$$\frac{1}{n}\log|X_{k,k}^{(n)}| = \frac{1}{n}\log|\mathfrak{M}_{k,k}^{(n)}\cdots\mathfrak{M}_{k,k}^{(1)}| \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \mathbb{E}[\log|\mathfrak{M}_{k,k}^{(1)}|]$$

pour tout $k \in \{1, 2\}$. Les hypothèses du lemme précédent sont remplies et l'on obtient bien :

$$\frac{1}{n}\log|X_{1,2}^{(n)}| \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \ell(\mu).$$

(b) Remarquons tout d'abord qu'une identité du type de l'énoncé (il semble qu'il y ait un problème d'ordre, peu important pour la suite) vient juste de la traduction par blocs de la relation $\Psi_{2n} = \tilde{\Psi}_n\Psi_n$ où $\tilde{\Psi}_n = M^{(2n)}\cdots M^{(n+1)}$ est indépendante de $\Psi_n = M^{(n)}\cdots M^{(1)}$ (par indépendance mutuelle des $M^{(k)}$) et de même loi.
Posons désormais $M = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant 2}\mathbb{E}[\log|\mathfrak{M}_{k,k}^{(1)}|]$. Soit aussi ε un réel strictement positif à fixer ultérieurement.
D'après les convergences en probabilité de la question précédente, on a ensuite :

$$\mathbb{P}\left(|X_{1,1}^{(n)}| > \exp(nM')\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad\text{et}\quad \mathbb{P}\left(|\tilde{X}_{2,2}^{(n)}| > \exp(nM')\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{1}$$

pour tout $M' > M$, ainsi que :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(|X_{1,2}^{(n)}| > \exp(n(\ell(\mu)+\varepsilon))\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \mathbb{P}\left(|\tilde{X}_{1,2}^{(n)}| > \exp(n(\ell(\mu)+\varepsilon))\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ \text{et}\quad &\mathbb{P}\left(|X_{1,2}^{(2n)}| \geqslant \exp(2n(\ell(\mu)-\varepsilon))\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Cependant, puisque $X_{1,2}^{(2n)} = \tilde{X}_{1,1}^{(n)}X_{1,2}^{(n)} + \tilde{X}_{1,2}^{(n)}X_{2,2}^{(n)}$ pour tout n, on a également :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|X_{1,2}^{(2n)}| \geqslant \exp(2n(\ell(\mu)-\varepsilon))\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(|\tilde{X}_{1,1}^{(n)}X_{1,2}^{(n)}| \geqslant \frac{1}{2}\exp(2n(\ell(\mu)-\varepsilon))\right) \\ &+ \mathbb{P}\left(|\tilde{X}_{1,1}^{(n)}X_{1,2}^{(n)}| \geqslant \frac{1}{2}\exp(2n(\ell(\mu)-\varepsilon))\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(\left(|\tilde{X}_{1,1}^{(n)}X_{1,2}^{(n)}| > \frac{1}{2}\exp(2n(\ell(\mu)-\varepsilon))\right) \cap \left(|X_{1,2}^{(n)}| \leqslant \exp(n(\ell(\mu)+\varepsilon))\right)\right) \\ &+ \mathbb{P}\left(|X_{1,2}^{(n)}| > \exp(n(\ell(\mu)+\varepsilon))\right) \\ &+ \mathbb{P}\left(|\tilde{X}_{1,2}^{(n)}X_{2,2}^{(n)}| \geqslant \frac{1}{2}\exp(2n(\ell(\mu)-\varepsilon))\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(|\tilde{X}_{1,1}^{(n)}| \geqslant \frac{1}{2}\exp(n(\ell(\mu)-3\varepsilon))\right) + \mathbb{P}\left(|X_{1,2}^{(n)}| > \exp(n(\ell(\mu)+\varepsilon))\right) \\ &+ \mathbb{P}\left(|X_{2,2}^{(n)}| \geqslant \frac{1}{2}\exp(n(\ell(\mu)-3\varepsilon))\right) + \mathbb{P}\left(|\tilde{X}_{1,2}^{(n)}| > \exp(n(\ell(\mu)+\varepsilon))\right). \end{aligned} \tag{3}$$

On a ici utilisé le fait que, si a, b et x sont des réels tels que $|a+b| \geqslant x$ alors (par inégalité triangulaire) $|a| \geqslant x/2$ ou $|b| \geqslant x/2$.
En remarquant maintenant qu'il existe un entier N tel que $\frac{1}{2}\exp(n(\ell(\mu)-3\varepsilon)) > \exp(n(\ell(\mu)-4\varepsilon))$ pour tout $n \geqslant N$, on obtient (sous les mêmes conditions) :

$$\mathbb{P}\left(|\tilde{X}_{1,1}^{(n)}| \geqslant \frac{1}{2}\exp(n(\ell(\mu)-3\varepsilon))\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|\tilde{X}_{1,1}^{(n)}| > \exp(n(\ell(\mu)-4\varepsilon))\right)$$

et

$$\mathbb{P}\left(|X_{2,2}^{(n)}| \geqslant \frac{1}{2}\exp(n(\ell(\mu)-3\varepsilon))\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|X_{2,2}^{(n)}| > \exp(n(\ell(\mu)-4\varepsilon))\right).$$

Finalement, en choisissant $4\varepsilon < \ell(\mu) - M$, les convergences (1)–(2) fournissent la contradiction $1 \leqslant 0$ par passage à la limite dans l'inégalité (3) !

(c) Il semble naturel de vouloir procéder par récurrence sur l'entier $d \geqslant 1$. Détaillons cela.

Le résultat étant acquis aux rangs $d = 1$ (d'après la question III.1.(c)) et $d = 2$ (d'après la question précédente), il suffit de traiter l'hérédité. Supposons donc le résultat acquis en dimension d et montrons-le en dimension $d+1$.

- Dans la base $\mathcal{B}$, toutes les matrices s_i du support $\mathcal{S}$ peuvent être écrites sous les formes blocs suivantes :

$$s_i = \begin{pmatrix} s_i' & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

les s_i' étant des matrices inversibles de taille d. Notons également μ' la loi de probabilité (de support $\{s_1', \cdots, s_k'\}$) induite par μ sur les matrices extraites $\mathfrak{M}'^{(k)} = (\mathfrak{M}_{i,j}^{(k)})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ ainsi que, pour tout n,

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} \Psi_n' & C_n \\ 0 & X_n \end{pmatrix}$$

avec, pour tout $\omega \in \Omega$, $\Psi_n'(\omega)$ est une matrice inversible de taille d, $C_n(\omega)$ une matrice de format $d \times 1$ et $X_n(\omega)$ un complexe non nul.

- Raisonnons maintenant par l'absurde en supposant que $\ell(\mu) > M$ avec $M = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant d+1} \mathbb{E}[\log |\mathfrak{M}_{k,k}^{(1)}|]$.

Par hypothèse de récurrence appliquée à la suite (Ψ_n'), on a tout d'abord

$$\ell(\mu') = \max_{1 \leqslant k \leqslant d} \mathbb{E}[\log |\mathfrak{M}_{k,k}^{(1)}|] < \ell(\mu)$$

et donc, d'après le lemme 2 précédent (et avec des notations évidentes),

$$\frac{1}{n} \log \|C_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \ell(\mu)$$

puisque, d'après le théorème de Furstenberg–Kesten (question 4),

$$\max\left(\frac{1}{n}\log|X_n|, \frac{1}{n}\log\|C_n\|_\infty, \frac{1}{n}\log N_\infty(\Psi_n')\right) = \frac{1}{n}\log N_\infty(\Psi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \ell(\mu),$$
$$\frac{1}{n}\log|X_n| \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \mathbb{E}[\log|\mathfrak{M}_{d+1,d+1}^{(1)}|] \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\log N_\infty(\Psi_n') \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \ell(\mu').$$

Pour n un entier, on peut désormais écrire (avec des notations analogues à celles de l'énoncé)

$$C_{2n} = \tilde{\Psi}_n' C_n + X_n \tilde{C}_n.$$

D'après l'inégalité triangulaire et les propriétés de la norme infinie, on obtient alors

$$\|C_{2n}\|_\infty \leqslant |X_n| \|\tilde{C}_n\|_\infty + d \|\tilde{\Psi}_n'\|_\infty \|C_n\|_\infty,$$

de sorte que le même raisonnement qu'à la question précédente s'adapte et fournit (toujours pour ε un réel strictement positif tel que $4\varepsilon < \ell(\mu) - M$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\|C_{2n}\|_\infty \geqslant \exp(2n(\ell(\mu)-\varepsilon))\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(|X_n|\|\tilde{C}_n\|_\infty \geqslant \frac{1}{2}\exp(2n(\ell(\mu)-\varepsilon))\right) \\
&+ \mathbb{P}\left(\|\tilde{\Psi}_n'\|_\infty \|C_n\|_\infty \geqslant \frac{1}{2d}\exp(2n(\ell(\mu)-\varepsilon))\right) \\
&\leqslant \mathbb{P}\left(|X_n| \geqslant \frac{1}{2}\exp(n(\ell(\mu)-3\varepsilon))\right) + \mathbb{P}\left(\|\tilde{C}_n\|_\infty > \exp(n(\ell(\mu)+\varepsilon))\right) \\
&+ \mathbb{P}\left(\|\tilde{\Psi}_n'\|_\infty \geqslant \frac{1}{2d}\exp(n(\ell(\mu)-3\varepsilon))\right) + \mathbb{P}\left(\|C_n\|_\infty > \exp(n(\ell(\mu)+\varepsilon))\right) \\
&\leqslant \mathbb{P}\left(|X_n| > \exp(n(\ell(\mu)-4\varepsilon))\right) + \mathbb{P}\left(\|\tilde{C}_n\|_\infty > \exp(n(\ell(\mu)+\varepsilon))\right) \\
&+ \mathbb{P}\left(\|\tilde{\Psi}_n'\|_\infty > \exp(n(\ell(\mu)-4\varepsilon))\right) + \mathbb{P}\left(\|C_n\|_\infty > \exp(n(\ell(\mu)+\varepsilon))\right)
\end{aligned}$$

à partir d'un certain rang déterministe N.

Le passage à la limite dans l'inégalité précédente fournit encore l'absurdité $1 \leqslant 0$ (puisque $\ell(\mu) - 4\varepsilon > M$) ; ceci clôt la récurrence.