ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE
DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1985

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

OPTIONS M, P' ET T.A.

(Durée 2 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

1°) Déterminer la constante A pour que le polynôme $P_1(x) = A + x^4(1 - x)^4$ soit divisible par $x^2 + 1$.

A étant ainsi choisi, calculer (et en donner des valeurs approchées à 10^{-6} près) les intégrales :

$$J_1 = \int_0^1 \frac{P_1(x)}{x^2 + 1}\, dx \qquad \text{et} \qquad I = \int_0^1 \frac{A\, dx}{x^2 + 1}$$

2°) On pose $K_1 = \int_0^1 x^4(1 - x)^4\, dx$; calculer K_1 et vérifier la double inégalité $J_1 - K_1 < \pi < J_1 - \frac{K_1}{2}$.

3°) On désigne par p et q des entiers naturels et on pose $I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1 - x)^q\, dx$; trouver, pour $q \geq 1$, une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$; en déduire une expression de $I_{p,q}$ en fonction de p!, de q! et de (p + q + 1)! Vérifier, sur cette expression, la valeur trouvée au 2° de $K_1 = I_{4,4}$.

4°) Calculer une valeur approchée à 10^{-5} près de $K_2 = I_{8,8}$; démontrer la double inégalité $\frac{K_2}{2} < \int_0^1 \frac{x^8(1 - x)^8}{x^2 + 1}\, dx < K_2$.

5°) Montrer qu'il existe un nombre λ_2 tel que le polynôme $P_2(x) = 4 + \lambda_2 x^8(1 - x)^8$ soit divisible par $x^2 + 1$.

λ_2 étant ainsi choisi, calculer les coefficients du polynôme quotient et donner une valeur approchée, à 10^{-6} près, de l'intégrale :

$$J_2 = \int_0^1 \frac{P_2(x)}{x^2 + 1}\, dx$$

Démontrer la double inégalité $J_2 - \lambda_2 \frac{K_2}{2} < \pi < J_2 - \lambda_2 K_2$. Peut-on la vérifier à partir des valeurs trouvées de J_2, de K_2, de λ_2 et de la valeur connue de π ?

6°) La méthode précédente peut être prolongée en déterminant un nombre λ_3 tel que le polynôme $P_3(x) = 4 + \lambda_3\, x^{12}\,(1 - x)^{12}$ soit divisible par $x^2 + 1$ et en évaluant l'intégrale $K_3 = I_{12,12}$. On trouverait ainsi un nombre rationnel J_3 qui serait une valeur approchée de π. Donner le signe de $\pi - J_3$ et une évaluation de sa valeur absolue.