

Exercice $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1-) La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{x^{a-1}}{1+x^b}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

L'intégrale peut être doublement impropre en 0^+ et en $+\infty$.

Comme cette fonction est positive, les critères de convergences adaptés à l'étude de cette intégrale sont:

- la comparaison avec les intégrales de référence,
- la règle des équivalents,
- la règle de Riemann (qui permet de se ramener au premier point).

2-) $\rightarrow$ Si $b > 0$ alors $\varphi(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{1-a}}$ et $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{b-a+1}}$.

La convergence de $I(a, b)$ exige $\begin{cases} 1-a < 1 \\ b-a+1 > 1 \end{cases}$ soit $0 < a < b$.

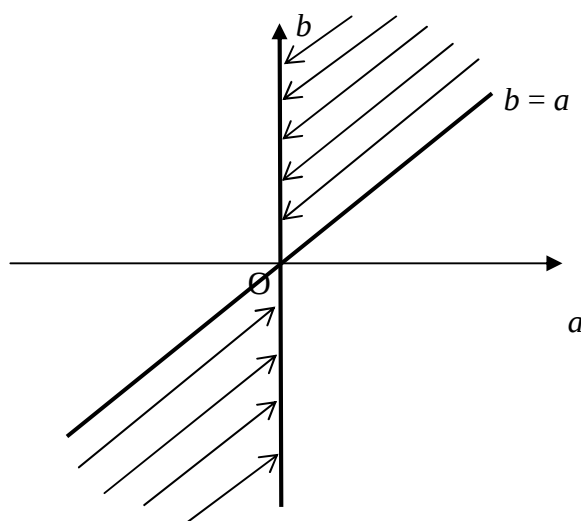
$\rightarrow$ Si $b = 0$ alors $I(a, 0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-a}}$ diverge (référence).

$\rightarrow$ Si $b < 0$ alors $\varphi(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{b-a+1}}$ et $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{1-a}}$.

La convergence de $I(a, b)$ exige $\begin{cases} b-a+1 < 1 \\ 1-a > 1 \end{cases}$ soit $b < a < 0$.

Par suite: $I(a, b)$ converge si et seulement si $0 < a < b$ ou $b < a < 0$.

3-) On obtient le domaine hachuré (frontières exclues).



Problème

I-) $f: x \in \mathbb{R} \mapsto x \cdot \cos(x) - \sin(x)$

I-1.1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -x \cdot \cos(-x) - \sin(-x) = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) = -f(x)$.

Donc f est impaire et on peut restreindre son étude à $\mathbb{R}_+$.

I-1.2) La courbe $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

I-2) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos(x) - x \cdot \sin(x) - \cos(x) = -x \cdot \sin(x)$

donc, sur I_n , $f'(x)$ a le signe de $-\sin(x)$ car $x \in I_n = [n\pi, (n+1)\pi]$ avec $n \in \mathbb{N}$ donc $x \geq 0$.

→ Si n est pair alors $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur I_n .

→ Si n est impair alors $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur I_n .

I-3.1) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

La dérivée de f s'annule donc au point d'abscisse $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

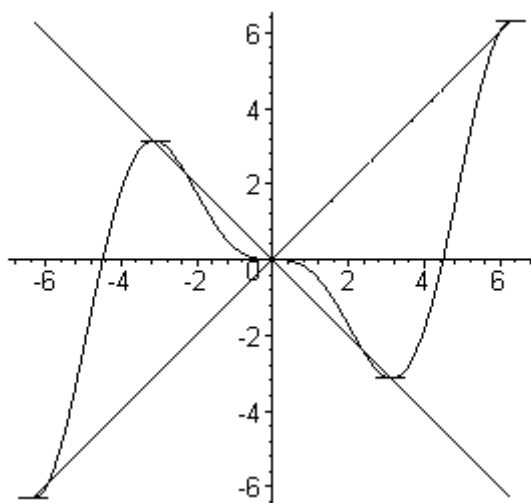
En un tel point, $f(k\pi) = k\pi \cdot \cos(k\pi) - \sin(k\pi) = (-1)^k \cdot k\pi$.

→ Si k est pair, on obtient le point de coordonnées $(k\pi, k\pi)$ situé sur la droite d'équation $y = x$.

→ Si k est impair, on obtient le point de coordonnées $(k\pi, -k\pi)$ situé sur la droite $y = -x$.

Donc les points de $(\mathcal{C})$ à tangente horizontale sont situés sur les bissectrices du repère.

I-3.2)



I-4.1) → $\forall n \in \mathbb{N}, f$ est continue sur $I_n = [n\pi, (n+1)\pi]$.

De plus: $\forall n \in \mathbb{N}, f(n\pi) = n\pi \cdot \cos(n\pi) - \sin(n\pi) = (-1)^n \cdot n\pi$.

Par suite: $f(n\pi) \times f((n+1)\pi) = (-1)^{2n+1} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \pi^2 = -n \cdot (n+1) \cdot \pi^2 \leq 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f admet au moins une racine dans I_n .

→ On a vu que f' est de signe constant sur I_n et ne s'annule qu'aux bornes de I_n .

Par suite, f est strictement monotone sur I_n .

On en déduit que la restriction de f à I_n est donc injective.

En conclusion, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_n dans chacun des intervalles I_n .

I-4.2) On note que: $(2n+1)\frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2} \in I_n$.

Par ailleurs, $f\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (2n+1)\frac{\pi}{2} \times \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$
donc $f(n\pi) \times f\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \cdot n\pi \times (-1)^{n+1} = -n\pi \leq 0$.

Par suite: pour tout naturel n , la racine x_n est contenue dans l'intervalle $\left[n\pi, (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$.

L'intervalle est ouvert à droite car $f\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1} \neq 0$.

I-4.3) On vient de montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, n\pi \leq x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$

On en déduit que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq \frac{x_n}{n\pi} < 1 + \frac{1}{2n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2n} = 1$, par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$. Donc $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$.

I-4.4) Par définition de x_n : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \cdot \cos(x_n) = \sin(x_n)$ et $x_n \in \left[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(x_n) \neq 0$.

Par suite: $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \tan(x_n)$ et on sait que: $\forall x \in \mathbb{R}, \tan[\text{Arctan}(x)] = x$.

La relation précédente s'écrit donc: $\forall n \in \mathbb{N}, \tan[\text{Arctan}(x_n)] = \tan(x_n)$.

On en déduit: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{Z}, \text{Arctan}(x_n) = x_n + k\pi$.

Comme $x_n \in \left[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ et $\text{Arctan}(x_n) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$k = \frac{1}{\pi} [\text{Arctan}(x_n) - x_n] \in \left]-n+1, -n+\frac{1}{2}\right[.$$

Le seul entier de cet intervalle est $-n$ donc $k = -n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \text{Arctan}(x_n) = x_n - n\pi$.

On a montré que: $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = n\pi + \text{Arctan}(x_n)$.

I-4.5) $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n > 0$ donc $\text{Arctan}(x_n) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq n\pi$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Par suite, $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$ donc $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n\pi}\right)$.

Finalement: $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n\pi}\right)$

ce qui s'écrit: $x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \varepsilon_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$.

II-1) Si $r_n \neq 0$ alors $h_n(t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega t) \right]$.
 Le point de coordonnées $\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right)$ est sur le cercle de centre O et de rayon 1.
 Si on note φ_n son angle polaire dans $]-\pi, \pi]$ alors $\cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$
 et $h_n(t) = r_n [\cos(\varphi_n) \cos(n\omega t) + \sin(\varphi_n) \sin(n\omega t)]$
 Donc $\boxed{\text{si } r_n \neq 0 \text{ alors } h_n(t) = r_n \cos(n\omega t - \varphi_n)}$.

II-2.1) Si g est T-périodique avec $g(t) = 1$ sur $[0, T/2[$ et $g(t) = 0$ sur $[T/2, T[$
 alors g est aussi T-périodique avec $g(t) = \frac{1}{2}$ sur $[0, T/2[$ et $g(t) = -\frac{1}{2}$ sur $[T/2, T[$.

La restriction de $g - \frac{1}{2}$ à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est donc une fonction impaire .

II-2.2) Si on note A_n et B_n les coefficients de Fourier de la fonction $g - \frac{1}{2}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = 0$.

On en déduit que:

$$\rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \left(g(t) - \frac{1}{2} \right) dt = a_0 - \frac{1}{2} = 0 \text{ d'où } \boxed{a_0 = \frac{1}{2}}.$$

$$\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2}{T} \int_0^T \left(g(t) - \frac{1}{2} \right) \cos(n\omega t) dt = a_n - 0 = 0 \text{ d'où } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 0}.$$

II-2.3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^{T/2} = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi}$

donc $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, b_{2p} = 0}$ et $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, b_{2p+1} = \frac{2}{(2p+1)\pi}}$.

On en déduit le développement en série de Fourier de g : $\boxed{S(g)(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{\sin[(2p+1)\omega t]}{2p+1}}$.

II-2.4) La fonction est T-périodique et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$
 donc sa série de Fourier converge en tout point vers sa fonction régularisée.
 (Théorème de Dirichlet).

Si $t \notin \frac{T}{2} \mathbb{Z}$ alors $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{\sin[(2p+1)\omega t]}{2p+1} = g(t)$ sinon $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{\sin[(2p+1)\omega t]}{2p+1} = \frac{1}{2}$

Plus précisément, pour tout entier relatif k ,

Si $t \in]kT, (2k+1).T/2[$ alors $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{\sin[(2p+1)\omega t]}{2p+1} = 1$
 Si $t \in](2k+1).T/2, (k+1).T[$ alors $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{\sin[(2p+1)\omega t]}{2p+1} = 0$
 Si $t = k.T/2$ alors $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{\sin[(2p+1)\omega t]}{2p+1} = \frac{1}{2}$

II-2.5) Si n est un nombre pair non nul alors $h_n(t) = 0$.

Si $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$ alors $h_{(2p+1)}(t) = \frac{2 \cdot \sin[(2p+1)\omega t]}{(2p+1)\pi} = \frac{1}{2p+1} \cos\left[(2p+1)\omega t - \frac{\pi}{2}\right]$.

d'où $\forall p \in \mathbb{N}, r_{2p+1} = \frac{2}{(2p+1)\pi}$ et $\phi_{2p+1} = \frac{\pi}{2}$.

II-3.1) Si $u_p = \frac{(-1)^p}{2p+1}$ alors $\sum u_p$ est une série alternée dont le terme général tend vers 0 en décroissant en valeur absolue.

Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^p}{2p+1}$ converge.

II-3.2) On utilise la convergence de la série de Fourier de g pour $t = \frac{T}{4}$.

Il vient: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{\sin[(2p+1)\pi/2]}{2p+1} = 1$ soit $\frac{2}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{1}{2}$ d'où $\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$.

II-4.1) Si la fonction g est T -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, la formule de Parseval dit que: la série $|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$ converge et a pour somme $\frac{1}{T} \int_0^T |g(t)|^2 dt$.

Comme g est à valeurs réelles, cette formule s'écrit: $a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T} \int_0^T g(t)^2 dt$.

II-4.2) Comme $\frac{1}{T} \int_0^T g(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} dt = \frac{1}{2}$

Appliquée à la fonction g , la formule de Parseval donne:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{\pi^2} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{2}$ d'où $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

II-4.3) La convergence des séries $\sum \frac{1}{(2n)^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est claire et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

On remarque que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$

Par passage à la limite dans cette égalité, il vient, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2}$

d'où $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

III-1) Si $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ alors $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$

Dès lors, comme $f(x, y, z) = u(r)$, $\frac{\partial f}{\partial x} = u'(r) \times \frac{\partial r}{\partial x} = u'(r) \times \frac{x}{r}$

et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = u''(r) \times \left(\frac{x}{r}\right)^2 + u'(r) \times \frac{r - x \times \frac{x}{r}}{r^2}$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = u''(r) \times \frac{x^2}{r^2} + u'(r) \times \frac{r^2 - x^2}{r^3}$.

On montre de même que: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = u''(r) \times \frac{y^2}{r^2} + u'(r) \times \frac{r^2 - y^2}{r^3}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = u''(r) \times \frac{z^2}{r^2} + u'(r) \times \frac{r^2 - z^2}{r^3}$.

Par suite: $\Delta f = u''(r) \times \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + u'(r) \times \frac{3r^2 - x^2 - y^2 - z^2}{r^3}$.

En tenant compte de la relation $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, il vient $\boxed{\forall r > 0, \Delta f = u''(r) + \frac{2}{r} \times u'(r)}$.

III-2) L'énoncé me semble ambigu.
Il aurait peut-être fallu écrire "Soit u une solution de (U). On définit la fonction v par ..."

Soit u une solution de l'équation (U): $u''(r) + \frac{2}{r} u'(r) + \omega^2 u(r) = 0$,

si $v(r) = r.u(r)$ alors $v'(r) = u(r) + r.u'(r)$ et $v''(r) = 2.u'(r) + r.u''(r)$.

Par suite: $\forall r > 0, v''(r) + \omega^2.v(r) = r \left[u''(r) + \frac{2}{r} u'(r) + \omega^2 u(r) \right] = 0$.

Donc $\boxed{v \text{ vérifie l'équation différentielle (V): } v'' + \omega^2.v = 0}$.

III-3) (V) est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.
Elle a pour solution générale $\boxed{v(r) = \lambda.\cos(\omega.r) + \mu.\sin(\omega.r), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$.

Si u est une solution de (U) alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, r.u(r) = \lambda.\cos(\omega.r) + \mu.\sin(\omega.r)$
donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall r > 0, u(r) = \frac{\lambda.\cos(\omega.r) + \mu.\sin(\omega.r)}{r}$.

Réciproquement, si $u = \lambda.\cos(\omega.r) + \mu.\sin(\omega.r) \times \frac{1}{r}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

alors $u' = [-\lambda\omega.\sin(\omega.r) + \mu\omega.\cos(\omega.r)] \times \frac{1}{r} - u \times \frac{1}{r}$

et $u'' = -\omega^2.[\lambda.\cos(\omega.r) + \mu.\sin(\omega.r)] \times \frac{1}{r} - [-\lambda\omega.\sin(\omega.r) + \mu\omega.\cos(\omega.r)] \times \frac{1}{r^2} - u' \times \frac{1}{r} + u \times \frac{1}{r^2}$

donc
$$\begin{cases} \frac{2}{r} u' = 2[-\lambda\omega.\sin(\omega.r) + \mu\omega.\cos(\omega.r)] \times \frac{1}{r^2} - 2u \times \frac{1}{r^2} \\ u'' = -\omega^2.u(r) - 2[-\lambda\omega.\sin(\omega.r) + \mu\omega.\cos(\omega.r)] \times \frac{1}{r^2} + 2u \times \frac{1}{r^2} \end{cases}$$

Par suite $u'' + \frac{2}{r} u' = -\omega^2 \times u$ donc u est bien solution de (U).

$\boxed{\text{Les solutions réelles de (U) sont les fonctions } u : r \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\lambda.\cos(\omega.r) + \mu.\sin(\omega.r)}{r}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$.

III-4) $\lambda \cdot \cos(\omega r) + \mu \cdot \sin(\omega r) = \lambda + \mu \cdot \omega r + o(r)$ donc $u(r) = \frac{\lambda}{r} + \mu \omega + o(1)$.

Pour que u admette une limite finie en 0, il faut et il suffit que λ soit nul.

Les solutions non nulles de (U) admettant une limite finie quand r tend vers 0 sont les fonctions $r \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\mu \cdot \sin(\omega \cdot r)}{r}$, $\mu \in \mathbb{R}^*$.

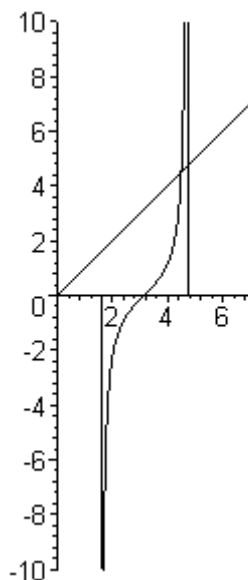
III-5) Si $u(r) = \frac{\mu \cdot \sin(\omega \cdot r)}{r}$ avec $\mu \neq 0$ alors $u'(r) = \mu \cdot \frac{(\omega \cdot r) \cdot \cos(\omega \cdot r) - \sin(\omega \cdot r)}{r^2}$.

La condition $u'(1) = 0$ se traduit par $\boxed{\omega \cdot \cos(\omega) - \sin(\omega) = 0 \quad (\Omega)}$.

III-6) Sur $J_n = \left] \frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi \right[$, $(\Omega) \Leftrightarrow \omega = \tan(\omega)$

et la première bissectrice ne coupe la courbe de la restriction à J_n de la fonction tangente qu'en un point unique.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (\Omega) \text{ admet une solution unique sur } J_n}$.



III-7) $I = \int_0^1 u_n(r) \cdot u_p(r) \cdot r^2 \cdot dr = k \int_0^1 \frac{\sin(\omega_n r) \cdot \sin(\omega_p r)}{r^2} r^2 \cdot dr = k \int_0^1 \sin(\omega_n r) \cdot \sin(\omega_p r) \cdot dr$

$$I = \frac{k}{2} \int_0^1 \{ \cos[(\omega_n - \omega_p)r] - \cos[(\omega_n + \omega_p)r] \} \cdot dr = \frac{k}{2} \left[\frac{\sin[(\omega_n - \omega_p)r]}{\omega_n - \omega_p} - \frac{\sin[(\omega_n + \omega_p)r]}{\omega_n + \omega_p} \right]_0^1$$

$$I = \frac{k}{2} \left[\frac{\sin(\omega_n - \omega_p)}{\omega_n - \omega_p} - \frac{\sin(\omega_n + \omega_p)}{\omega_n + \omega_p} \right] = \frac{k}{2(\omega_n^2 - \omega_p^2)} \times K$$

avec $K = (\omega_n + \omega_p)[\sin(\omega_n) \cdot \cos(\omega_p) - \sin(\omega_p) \cdot \cos(\omega_n)] - (\omega_n - \omega_p)[\sin(\omega_n) \cdot \cos(\omega_p) + \sin(\omega_p) \cdot \cos(\omega_n)]$.

En tenant compte de $\sin(\omega_n) = \omega_n \cdot \cos(\omega_n)$ et de $\sin(\omega_p) = \omega_p \cdot \cos(\omega_p)$

il vient $K = (\omega_n + \omega_p)(\omega_n - \omega_p) \cdot \cos(\omega_n) \cdot \cos(\omega_p) - (\omega_n - \omega_p)(\omega_n + \omega_p) \cdot \cos(\omega_n) \cdot \cos(\omega_p) = 0$.

Par suite, $\boxed{\int_0^1 u_n(r) \cdot u_p(r) \cdot r^2 \cdot dr = 0}$.