

Partie I

Q1 Comme $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, g est bornée sur $\mathbb{R}$, de plus f est positive, donc on a la majoration :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |f(t).g(x-t)| \leq \|g\|_\infty . f(t) \quad .$$

Par définition, f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x-t) dt$ est absolument convergente.

La majoration ci-dessus est une domination de l'intégrande valable $\forall x \in \mathbb{R}$, de plus à t fixé, la fonction $x \mapsto f(t).g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par composition puisque g est continue.

Les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres sont donc satisfaites, d'où la continuité de $f * g$ sur $\mathbb{R}$.

Effectuons dans l'intégrale le changement de variables $t \mapsto u = x - t$ (qui à $x \in \mathbb{R}$ fixé est bien un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$). L'intégrale obtenue reste convergente et on a l'égalité :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u).g(u) du = (g * f)(x) \quad .$$

Q2 Soit (x_n) une suite convergeant vers $+\infty$. A t fixé, $f(t).g(x_n - t)$ tend (simplement) vers 0 puisque $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. De plus, on a comme précédemment la domination

$$\forall n \quad |f(t).g(x_n - t)| \leq \|g\|_\infty . f(t) \quad ,$$

où la fonction majorante est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc le théorème de convergence dominée s'applique et donne que $(f * g)(x_n) \rightarrow 0$. Comme c'est vrai pour toute suite (x_n) , par le théorème de caractérisation des limites par les suites, on a bien que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f * g)(x) = 0$.

Le même raisonnement s'applique pour toute suite (x_n) tendant vers $-\infty$ (avec toujours la même domination), et donne que $(f * g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

Q3 On a déjà vu que $f * g$ était continue sur $\mathbb{R}$. (Le raisonnement de **Q1**) s'applique puisqu'une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est bornée sur $\mathbb{R}$.) De plus, la majoration déjà vue, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R} \quad |f(t).g(x-t)| \leq \|g\|_\infty . f(t)$ donne par le théorème de la moyenne que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x-t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t). \|g\|_\infty dt = \|g\|_\infty \quad ,$$

donc $(f * g)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Appliquons le théorème de Fubini à la fonction $F(x, t) = f(t).g(x-t) \geq 0$:

l'hypothèse 1] du théorème est acquise par les deux majorations $F(x, t) \leq \|g\|_\infty f(t)$ et $F(x, t) \leq \|f\|_\infty g(x-t)$, puisque les deux fonction f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$;

comme $g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, par translation on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x-t) dx = f(t) \quad ,$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc l'hypothèse 3] est satisfaite. Donc le théorème de Fubini s'applique et donne, en poursuivant le calcul ci-dessus :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t) dt \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t) dx \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \quad . \end{aligned}$$

Donc $f * g$ est bien dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Partie II

Q4 A la question **Q3** on a montré par le théorème de la moyenne la majoration $\forall x \in \mathbb{R} \quad |(f * u)(x)| \leq \|u\|_\infty$. Puisque le *sup* est inférieur au majorant, cela donne bien l'inégalité

$$\|T_f(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty .$$

Q5 Vu la commutativité démontrée question **Q1** et l'associativité admise, on peut écrire :

$$T_f T_g(u) = f * (g * u) = (f * g) * u = (g * f) * u = g * (f * u) = T_g T_f(u) .$$

Q6 Comme T_f est linéaire, et par commutativité, on a :

$$\begin{aligned} T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u) &= T_{f_1}(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)) + (T_{f_1} - T_{g_1})(T_{g_2}(u)) \\ &= T_{f_1}(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)) + T_{g_2}(T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)) . \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire sur les normes $\| \cdot \|_\infty$ et la question **Q4**, on en déduit :

$$\|T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u)\|_\infty \leq \|T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\|_\infty + \|T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty .$$

Q7 L'inégalité est triviale pour $n = 1$.

Par associativité, on a pour tout $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et tout $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $T_f T_g(u) = (f * g) * u = T_{f * g}(u)$, d'où $(T_f)^2 = T_{f * f}$, et plus généralement par récurrence $(T_f)^n = T_{f^{*n}}$. Si maintenant dans l'inégalité de la question **Q6** précédente on remplace f_1 par f , g_1 par g , et f_2 par f^{n-1} , g_2 par g^{n-1} , on obtient :

$$\|T_{f^{*n}}(u) - T_{g^{*n}}(u)\|_\infty \leq \|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty + \|T_{f^{*(n-1)}}(u) - T_{g^{*(n-1)}}(u)\|_\infty ,$$

d'où l'inégalité demandée clairement par récurrence.

Partie III

Q8 g_h est positive, continue sur $\mathbb{R}$ par composition des fonctions continues exponentielle et carré, et bornée par $\frac{1}{h\sqrt{2\pi}}$. Son intégrale sur $\mathbb{R}$ s'obtient en faisant le changement de variable $x \mapsto t = x/h$ dans l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t) dt = 1 ,$$

puisqu'on admet que $g_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Donc g_h est bien une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Les intégrales demandées sont bien (absolument) convergentes, puisque $g_h(x)$ est négligeable devant toute puissance $\frac{1}{x^n}$ quand $x \rightarrow \pm\infty$. La première intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot g_h(x) dx$ est nulle comme intégrale d'une fonction impaire.

Pour la deuxième intégrale, on procède à une intégration par parties, sachant qu'une primitive de $x \cdot g_h(x)$ est $-h \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}} = -h^2 \cdot g_h(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_h(x) dx = \left[-x h^2 g_h(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} h^2 g_h(x) dx = h^2 .$$

Q9 On a déjà remarqué que l'égalité $\left(T_g \frac{h}{\sqrt{n}}\right)^n = T\left({}_g \frac{h}{\sqrt{n}}\right)^{*n}$ était vraie par associativité de l'opérateur $*$. De plus, d'après

ce qui est admis, $g_h * g_h = g_{h\sqrt{2}}$, et par récurrence, si on admet la formule $(g_h)^{*(n-1)} = g_{h\sqrt{n-1}}$, alors

$$(g_h)^{*n} = g_h * (g_h)^{*(n-1)} = g_h * g_{h\sqrt{n-1}} = g_{\sqrt{h^2 + (n-1)h^2}} = g_{h\sqrt{n}} .$$

En remplaçant h par $\frac{h}{\sqrt{n}}$, on en déduit bien que

$$\left(T_g \frac{h}{\sqrt{n}}\right)^n = T\left({}_g \frac{h}{\sqrt{n}}\right)^{*n} = g_h .$$

Partie IV

Q10 Pour $k = 1$: $\left(\frac{d}{dx}g_h\right)(x) = -\frac{x}{h^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$, d'où l'existence de $P_{1,h}(x) = -\frac{x}{h^3\sqrt{2\pi}}$ de degré 1 .

Si on suppose l'égalité $\left(\frac{d^k}{dx^k}g_h\right)(x) = P_{k,h}(x)e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$, avec $P_{k,h}$ de degré k , alors par une dérivation supplémentaire on obtient :

$$\left(\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}g_h\right)(x) = \left(-\frac{x}{h^2}P_{k,h}(x) + P'_{k,h}(x)\right)e^{-\frac{x^2}{2h^2}},$$

d'où l'existence d'un polynôme $P_{k+1,h}(x) = -\frac{x}{h^2}P_{k,h}(x) + P'_{k,h}(x)$ de degré $1 + \deg(P_{k,h}) = k + 1$, cqfd.

Q11 La fonction $u \mapsto P_{h,k}(u).e^{-\frac{u^2}{4h^2}}$ est continue et admet, par croissances comparées, une limite nulle quand $u \rightarrow \pm\infty$.

Elle est donc dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et par conséquent bornée sur $\mathbb{R}$. Si on appelle M un majorant sur $\mathbb{R}$ de $\left|P_{h,k}(u).e^{-\frac{u^2}{4h^2}}\right|$ (qui ne dépend que de h et de k), on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \left|P_{h,k}(x-t).e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}}\right| \leq M.e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}}.$$

On suppose maintenant $x \in [-a, a]$. Pour $t \in [-2a, 2a]$, on peut majorer la dernière exponentielle ci-dessus par 1 ; et pour $|t| \geq 2a$, comme alors $|x-t| \geq ||t| - a|$, par $e^{-\frac{(|t|-a)^2}{2h^2}}$, cette dernière fonction étant intégrable en $\pm\infty$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ par exemple. On a donc l'existence d'une fonction c.p.m. positive $\phi_k(t)$ majorante définie par :

$$\phi_k(t) : t \mapsto \begin{cases} M & \text{si } t \in [-2a, 2a] \\ M.e^{-\frac{(|t|-a)^2}{2h^2}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Q12 On a que $T_{g_h}(u) = g_h * u = u * g_h = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t).g_h(x-t)dt$ est une intégrale à paramètre qu'on peut dériver sous le

signe $\int$. En effet, l'intégrande se dérive à t fixé en $u(t).P_{1,h}(x-t)e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}}$ qui est bien continue de t et de x et qui est dominée sur tout compact $[-a, a]$ par la fonction c.p.m. intégrable $\|u\|_{\infty}.\varphi_1(t)$. Ceci prouve que $T_{g_h}(u)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec

$$T_{g_h}(u)'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t).P_{1,h}(x-t)e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}}dt.$$

Mais ce même raisonnement peut se poursuivre indéfiniment, vue la domination démontrée en question **Q11**, et prouve que la fonction $T_{g_h}(u)$ est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$, avec

$$\frac{d^k}{dx^k}(T_{g_h}(u)(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t).P_{k,h}(x-t)e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}}dt.$$

Q13 On va utiliser la question **Q2**. soit ψ la fonction $u \mapsto P_{k,h}(u).e^{-\frac{u^2}{2h^2}}$. La question ci-dessus prouve l'égalité $\frac{d^k}{dx^k}(T_{g_h}(u)(x)) = (u * \psi)(x) = (\psi * u)(x)$. La fonction $x \mapsto |\psi(x)|$ n'est pas a priori dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, mais elle est continue, et, par croissance comparée, négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $\pm\infty$, et est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme $|u|$ reste dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, on peut appliquer l'inégalité de la moyenne à l'intégrale donnant $(\psi * u)(x)$, ce qui donne

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}(T_{g_h}(u)(x))\right| \leq (|\psi| * |u|)(x).$$

De plus, quitte à diviser $|\psi|$ par son intégrale J sur $\mathbb{R}$, on peut maintenant appliquer la question **Q2** : $(|\psi| * |u|)(x) = J.(\frac{1}{J}|\psi| * |u|)(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$. On en déduit par comparaison que $T_{g_h}(u)$ est dans $\mathcal{C}_{\infty}^0(\mathbb{R})$.

Q14 Par le changement de variables $t \mapsto u = \frac{t}{h}$, on a

$$\int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt = \int_{-\infty}^{-\alpha/h} g_1(u) du .$$

Or, quand $h \rightarrow 0^+$, on a $-\alpha/h \rightarrow -\infty$ et l'intégrale $\int_{-\infty}^0 g_1(u) du$ converge. Donc, par composition de limites,

$$\int_{-\infty}^{-\alpha/h} g_1(u) du \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0 .$$

$$\text{De même, } \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t) dt = \int_{\alpha/h}^{+\infty} g_1(u) du \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0 .$$

Q15 Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t) dt = 1$, on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé :

$$(T_{g_h}(u))(x) - u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)(u(x-t) - u(x)) dt ,$$

d'où par inégalité de la moyenne,

$$\left| (T_{g_h}(u))(x) - u(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t) |u(x-t) - u(x)| dt .$$

Pour $\alpha > 0$ à déterminer, on coupe la dernière intégrale en 3 : une intégrale I_1 sur $]-\infty, \alpha]$, une intégrale I_2 sur $[-\alpha, \alpha]$, et une intégrale I_3 sur $[\alpha, +\infty[$. On majore I_1 et I_3 par l'inégalité $|u(x-t) - u(x)| \leq 2\|u\|_{\infty}$, d'où une première inégalité

$$(1) \quad I_1 + I_3 \leq 2\|u\|_{\infty} \left(\int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt + \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t) dt \right) .$$

On majore I_2 en majorant $|u(x-t) - u(x)|$ par δ_{α} , où $\delta_{\alpha} = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leq \alpha} |u(x) - u(y)|$ (ce *Sup* existe d'après la propriété de continuité uniforme admise dans l'énoncé). On écrit :

$$(2) \quad I_2 \leq \delta_{\alpha} \left(\int_{-\alpha}^{+\alpha} g_h(t) dt \right) \leq \delta_{\alpha} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t) dt \right) = \delta_{\alpha} .$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. D'après l'énoncé, il existe un $\alpha > 0$ tel que $\delta_{\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour cet α -là, il existe d'après la question **Q14** un $h_0 > 0$ tel que $0 < h < h_0 \implies \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt + \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t) dt < \frac{\varepsilon}{2\|u\|_{\infty}}$. Alors, par les inégalités (1) et (2), on aura :

$$0 < h < h_0 \implies \forall x \in \mathbb{R} \left| (T_{g_h}(u))(x) - u(x) \right| < \varepsilon \implies \|T_{g_h}(u) - u\|_{\infty} \leq \varepsilon ,$$

et ceci traduit bien que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \|T_{g_h}(u) - u\|_{\infty} = 0$.

Q16 Soit $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ quelconque et $\varepsilon > 0$ donné. En écrivant $T_{f_n}(u) = T_{f_n}T_{g_h}(u) + T_{f_n}(u - T_{g_h}(u))$, et de même $T_f(u) = T_fT_{g_h}(u) + T_f(u - T_{g_h}(u))$, on a par inégalité triangulaire puis par **Q4** :

$$\begin{aligned} \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_{\infty} &\leq \|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)\|_{\infty} + \|T_{f_n}(T_{g_h}(u) - u)\|_{\infty} + \|T_f(T_{g_h}(u) - u)\|_{\infty} \\ &\leq \|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)\|_{\infty} + 2\|T_{g_h}(u) - u\|_{\infty} . \end{aligned}$$

Par **Q15** on peut choisir $h > 0$ tel que $\|T_{g_h}(u) - u\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{3}$. Or, pour cet h -là, on sait que $T_{g_h}(u)$ est une fonction de $\mathcal{C}_0^{\infty}$, donc par hypothèse il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies \|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Finalement, on a bien que $n \geq N \implies \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_{\infty} < \varepsilon$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_{\infty} = 0$, ceci pour toute fonction $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Donc f_n converge faiblement vers f .

Q17 Par Taylor-Young au voisinage de $t = 0$, on a que $u(x - t) = u(x) - tu'(x) + \frac{t^2}{2}u''(x) + o(t^2)$, donc

$$\frac{u(x - t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{u''(x)}{2} .$$

Comme on admet que $f_n^\# \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a déjà que $-\frac{1}{2}u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}u''(x)\right) \cdot f_n^\#(t) dt$.

De même, puisque $f_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$,

$$nu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} nu(x)f_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x)}{t^2} f_n^\#(t) dt .$$

Puis par définition de l'opérateur T :

$$nT_{f_n}(u)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} nu(x - t)f_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x - t)}{t^2} f_n^\#(t) dt .$$

Enfin, par un changement de variable $u = \sqrt{n} \cdot t$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tu'(x)}{t^2} f_n^\#(t) dt = u'(x) \int_{-\infty}^{+\infty} nt f_n(t) dt = \sqrt{n} \cdot u'(x) \int_{-\infty}^{+\infty} u f(u) du = 0 ,$$

par hypothèse sur f . En additionnant ces trois égalités, on arrive bien à

$$n\left(T_{f_n}(u)(x) - u(x)\right) - \frac{1}{2}u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u(x - t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} - \frac{1}{2}u''(x)\right) f_n^\#(t) dt .$$

Q18 Notons $\psi(x, t)$ la fonction apparaissant dans l'intégrande de la question précédente :

$$\psi(x, t) = \frac{u(x - t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} - \frac{u''(x)}{2} .$$

Reprenons le début de la question précédente **Q17** en utilisant cette fois Taylor-Lagrange. Comme $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\|u'''\|_\infty$ existe, d'où :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |\psi(x, t)| = \left| \frac{u(x - t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} - \frac{u''(x)}{2} \right| \leq \frac{|t|}{6} \|u'''\|_\infty .$$

Donc, pour $\alpha > 0$ donné à déterminer, si on se limite à intégrer $\psi(x, t)f_n^\#(t)$ pour $t \in [-\alpha, \alpha]$, on aura par l'inégalité de la moyenne

$$\left| \int_{-\alpha}^{+\alpha} \psi(x, t)f_n^\#(t) dt \right| \leq \|u'''\|_\infty \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\alpha}{6} f_n^\#(t) dt \leq \|u'''\|_\infty \frac{\alpha}{6} .$$

Puis, pour $|t| \geq \alpha$, on a la majoration $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\psi(x, t)| \leq \frac{2\|u\|_\infty}{\alpha^2} + \frac{\|u'\|_\infty}{\alpha} + \frac{1}{2}\|u''\|_\infty = M_\alpha$, constante qui ne dépend que de α . Or, comme à la question **Q14**, on a que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|t| \geq \alpha} f_n^\#(t) dt = 0$. En effet, par exemple, avec le changement de variables $u = \sqrt{n} \cdot t$,

$$\int_{-\infty}^{-\alpha} f_n^\#(t) dt = \int_{-\infty}^{-n\alpha} t^2 f(t) dt ,$$

or l'intégrale converge en $-\infty$ et $-n\alpha \rightarrow -\infty$. De même,

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f_n^\#(t) dt = \int_{n\alpha}^{+\infty} t^2 f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

On en déduit que $\int_{|t| \geq \alpha} \psi(x, t) f_n^\#(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Pour $\varepsilon > 0$ donné quelconque, on commence par choisir $\alpha > 0$ pour que $\|u'''\|_\infty \frac{\alpha}{6} < \frac{\varepsilon}{2}$, puis, pour cet α -là, il existe un N à partir duquel l'intégrale sur $]-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty[$ de $\psi(x, t) \cdot f_n^\#(t)$ soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, on aura bien les implications

$$n \geq N \implies \forall x \in \mathbb{R} \quad \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \cdot f_n^\#(t) dt \right| < \varepsilon \implies \left\| n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' \right\|_\infty \leq \varepsilon, \text{ c.q.f.d.}$$

Q19 On remarque que g_1 vérifie les mêmes hypothèses que f , et que suivant la notation de l'énoncé, $g_{1n} = g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

D'après les questions **Q8** et **Q7** on a alors :

$$\|(T_{f_n})^n(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = \|(T_{f_n})^n(u) - (T_{g_{1n}})^n(u)\|_\infty \leq n \|T_{f_n}(u) - T_{g_{1n}}(u)\|_\infty.$$

Mais la question **Q18** peut s'appliquer à f et à g_1 , d'où par inégalité triangulaire et somme de limites,

$$n \|T_{f_n}(u) - T_{g_{1n}}(u)\|_\infty \leq \left\| n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' \right\|_\infty + \left\| n(T_{g_{1n}}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' \right\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On a bien en définitive la limite nulle demandée.

On conclut par la question **Q16** qui étend le résultat à toutes les fonctions $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, et comme de plus $T^n(f_n) = T_{f_n^{*n}}$, on a bien la convergence faible de f_n^{*n} vers g_1 ■

*
* *