

I. Préliminaires

1°) Par définition $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$ d'après les propriétés de bilinéarité et de symétrie d'un produit scalaire. Cette égalité peut s'écrire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad 2\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

2°) a) Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$\|\lambda x + y\|^2 = \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ est une fonction polynôme du deuxième degré en λ qui garde un signe constant positif, quand λ parcourt $\mathbb{R}$. Le discriminant réduit $\Delta' = \langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2$ est donc négatif ou nul d'où :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

b) Cas d'égalité

Supposons que $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, alors $\Delta' = 0$ et l'équation du deuxième degré en λ admet donc une racine double λ_0 et ainsi $\|\lambda_0 x + y\|^2 = 0$, ce qui n'est possible qu'à condition que $\lambda_0 x + y = 0_E$, autrement dit que $\{x, y\}$ est une famille liée.

c) L'application définie sur $[C^0([0, a], \mathbb{R})]^2$ par $(f, g) \rightarrow \int_0^a f(t) g(t) dt$ est un produit scalaire :

Symétrie d'après la commutativité du produit des fonctions.

Bilinéarité d'après la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans

$C^0([0, a], \mathbb{R})$ et la linéarité de l'intégrale.

La forme quadratique associée est définie positive.

Positivité $\int_0^a (f(t))^2 dt \geq 0$ car $a > 0$ et $(f(t))^2 \geq 0$ sur $[0, a]$.

Caractère défini: Supposons $\int_0^a (f(t))^2 dt = 0$. Comme f^2 est une fonction continue et positive sur $[0, a]$, si elle n'était pas identiquement nulle sur $[0, a]$, son intégrale serait strictement positive. Comme son intégrale est nulle c'est qu'elle est identiquement nulle sur $[0, a]$. cqfd.

Dès lors, l'inégalité de Cauchy-Schwarz vue précédemment s'écrit :

$$\left| \int_0^a f(t) g(t) dt \right| \leq \sqrt{\left(\int_0^a f^2(t) dt \right) \left(\int_0^a g^2(t) dt \right)}.$$

3°) Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Soit N une application de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\forall x \in E, N(x) = N(-x)$.

On pose $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(N^2(x+y) - N^2(x) - N^2(y))$ et on suppose que φ est un produit scalaire sur E .

Vérifions $N(0_E) = 0$. En effet, $\forall x \in E, \varphi(x, -x) = \frac{1}{2}(N^2(0_E) - 2N^2(x))$ soit sous une autre forme : $\forall x \in E, N^2(0_E) = -2\varphi(x, x) + 2N^2(x)$ de sorte qu' en faisant $x = 0_E$ dans cette égalité, on obtient, puisque $\varphi(0_E, 0_E) = 0$: $N^2(0_E) = 2N^2(0_E)$ et donc $N(0_E) = 0$.

La norme euclidienne associée à φ est définie par $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$.

Or on a d' après le calcul précédent $\forall x \in E, N^2(0_E) = -2\varphi(x, x) + 2N^2(x) = 0$ soit $\forall x \in E, \varphi(x, x) = N^2(x)$ et donc finalement $\forall x \in E, \sqrt{\varphi(x, x)} = N(x)$. cqfd.

II. Equivalence de normes

1°) Rappelons qu' une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Par suite :

$$\exists x_0 \in [0,1]; \inf_{x \in [0,1]} p(x) = p(x_0) = p_0 > 0. \quad \exists x_1 \in [0,1]; \sup_{x \in [0,1]} p(x) = p(x_1) = p_1 > 0.$$

$$\text{On en déduit : } \forall x \in [0,1], \quad 0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1$$

De même pour la fonction q , $\exists x'_1 \in [0,1]; \sup_{x \in [0,1]} q(x) = q(x'_1) = q_1 \geq 0$ et on a :

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leq q(x) \leq q_1.$$

2°) $H = \{u \in C^1([0,1], \mathbb{R}); u(0) = u(1) = 0\}$. On pose pour $(u, v) \in H^2$:

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 (u(t) v(t) + u'(t) v'(t)) dt; \quad b(u, v) = \int_0^1 (q(t) u(t) v(t) + p(t) u'(t) v'(t)) dt \text{ et}$$

$$L(v) = \int_0^1 f(t) v(t) dt.$$

a) H est évidemment un espace vectoriel, c' est un sous espace de $C^1([0,1], \mathbb{R})$.

$L(v) \in \mathbb{R}$ et le caractère linéaire de L est assuré par la distributivité de la multiplication par rapport à l' addition dans $C^0([0,1], \mathbb{R})$ et la linéarité de l' intégrale.

b) $(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle$ est un produit scalaire sur H . Je ne redétaille pas tout, les arguments donnés dans I2c), s' appliquent entièrement de la même façon.

c) Pour $(u, v) \rightarrow b(u, v)$, les premiers arguments pour le caractère bilinéaire symétrique et le caractère positif de la forme quadratique associée sont les mêmes, il faut par contre revoir le caractère défini.

Supposons donc $\int_0^1 (q(t) u^2(t) + p(t) u'^2(t)) dt = 0$ alors on a en particulier que $p(t) u'^2(t)$

est identiquement nul sur $[0,1]$ et comme $p(t) > 0$ sur $[0,1]$, on en déduit que $u'(t) = 0$ sur $[0,1]$, de sorte que $u(t) = u(0) = 0$ sur $[0,1]$, autrement dit $u = 0$ fonction nulle. cqfd.

3°) a) Il s'agit de prouver que $\forall v \in H$, $\left| \int_0^1 f(t) v(t) dt \right| \leq \gamma \sqrt{\int_0^1 (v^2(t) + v'^2(t)) dt}$. Or on a :

$$\forall v \in H, \quad \left| \int_0^1 f(t) v(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt} \sqrt{\int_0^1 v^2(t) dt}.$$

Posons alors $\gamma = \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}$ on a à fortiori :

$$\forall v \in H, \quad \left| \int_0^1 f(t) v(t) dt \right| \leq \gamma \sqrt{\int_0^1 (v^2(t) + v'^2(t)) dt} \text{ soit } \forall v \in H, \quad |L(v)| \leq \gamma \|v\|.$$

b) Il s'agit de prouver cette fois que : $\forall (u, v) \in H^2$,

$$\left| \int_0^1 (q(t) u(t) v(t) + p(t) u'(t) v'(t)) dt \right| \leq \delta \sqrt{\int_0^1 (u^2(t) + u'^2(t)) dt} \sqrt{\int_0^1 (v^2(t) + v'^2(t)) dt}$$

Or on sait que :

$$|b(u, v)| \leq \sqrt{b(u, u)} \sqrt{b(v, v)} = \sqrt{\int_0^1 (q(t) u^2(t) + p(t) u'^2(t)) dt} \sqrt{\int_0^1 (q(t) v^2(t) + p(t) v'^2(t)) dt}$$

Soit : $|b(u, v)| \leq \sqrt{\sup(p_1, q_1)} \|u\| \sqrt{\sup(p_1, q_1)} \|v\|$ et finalement :

$$|b(u, v)| \leq \delta \|u\| \|v\| \text{ avec } \delta = \sup(p_1, q_1) > 0.$$

4°) a) Montrons que : $\forall v \in H$ on a $\forall x \in [0,1] \quad v^2(x) \leq x \int_0^1 v'^2(t) dt$.

Cela revient à prouver que $|v(x)| \leq \sqrt{x} \sqrt{\int_0^1 v'^2(t) dt}$.

Or $|v(x)| = \left| \int_0^x v'(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^x dt} \sqrt{\int_0^x v'^2(t) dt}$ d'après I2c) d'où

$$|v(x)| \leq \sqrt{x} \sqrt{\int_0^x v'^2(t) dt} \text{ et à fortiori } |v(x)| \leq \sqrt{x} \sqrt{\int_0^1 v'^2(t) dt} \text{ cqfd.}$$

b) On a :

$$\|v\|^2 = \int_0^1 (v^2(t) + v'^2(t)) dt \leq \int_0^1 \left(t \int_0^1 v'^2(u) du \right) dt + \int_0^1 v'^2(t) dt \leq \left[\int_0^1 t dt + 1 \right] \int_0^1 v'^2(t) dt.$$

$$\text{soit } \|v\|^2 \leq \frac{3}{2} \int_0^1 v'^2(t) dt \text{ et par suite : } p_0 \|v\|^2 \leq \frac{3}{2} \int_0^1 p_0 v'^2(t) dt \leq \frac{3}{2} \int_0^1 p(t) v'^2(t) dt$$

$$\text{et à fortiori : } p_0 \|v\|^2 \leq \frac{3}{2} \int_0^1 (q(t) v^2(t) + p(t) v'^2(t)) dt = \frac{3}{2} b(v, v).$$

$$\text{Conclusion : } \forall v \in H, \quad p_0 \|v\|^2 \leq \frac{3}{2} b(v, v).$$

5°) Soient u_1 et u_2 des fonctions de H vérifiant $\forall v \in H, b(u_1, v) = L(v) = b(u_2, v)$.

On a alors $\forall v \in H, b(u_1, v) - b(u_2, v) = b(u_1 - u_2, v) = 0$ et en particulier pour $v = u_1 - u_2$ on aura $b(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$ ce qui assure que $u_1 - u_2 = 0$ puisque b est un produit scalaire.

Rq: Seule l'égalité $\forall v \in H, b(u_1, v) = b(u_2, v)$ est importante pour conclure. Il n'y a pas besoin que ces quantités soient égales à $L(v)$. Je crois qu'il y a ici un début de mélange avec

l'existence d'un $u \in H; \forall v \in H, b(u, v) = L(v)$ qui est le résultat que dans un espace préhilbertien réel, toute forme linéaire est associée au produit scalaire avec un vecteur.

6°) a) Soit $G = \{u \in C^0([0,1], \mathbb{R}); u(0) = u(1) = 0, u \text{ } C^1 \text{ par morceaux sur } [0,1]\}$

Définition :

On dit qu'une fonction f est de classe C^1 par morceaux sur $[0,1]$ s'il existe une subdivision de $[0,1]$, $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ telle que la restriction f_i de f à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ peut se prolonger en une fonction $\tilde{f}_i$ de classe C^1 sur $[x_i, x_{i+1}]$

Notons qu'une fonction appartenant à G , possède de plus la propriété d'être continue sur $[0,1]$.

On peut alors définir :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u(t) v(t) + u'(t) v'(t)) dt \text{ et de même :}$$

$$b(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (q(t) u(t) v(t) + p(t) u'(t) v'(t)) dt$$

b) $b(v, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (q(t) v^2(t) + p(t) v'^2(t)) dt = 0$ nécessite en particulier que $v'(t) = 0$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ (cf chaque intégrale de la somme doit être nulle) donc v doit être constante sur $]x_i, x_{i+1}[$. Mais alors, la continuité de v sur $[0,1]$ fait que $v = v(0) = 0$ sur $[x_0, x_1]$, puis vaut encore 0 sur $[x_1, x_2]$ et de proche en proche $v = 0$ sur $[0,1]$

III. Equation de Sturm-Liouville

Soit la recherche des solutions de classe C^2 sur $[0,1]$ de :

$$\forall x \in [0,1], -\frac{d}{dx}(p(x) u'(x)) + q(x) u(x) = f(x) \quad (1) \quad \text{avec de plus } u(0) = u(1) = 0 \quad (2)$$

1°) On se place dans le cas $p(x) = e^{-\alpha x}$ $\alpha \neq 0$ réel, $q(x) = 0$ et $f(x) = -2n_0\pi \cos(2n_0\pi x)$.

$n_0 \in \mathbb{N}^*$.

On a alors l'équation $-\frac{d}{dx}(e^{-\alpha x} u'(x)) = -2n_0\pi \cos(2n_0\pi x)$ qui fournit dans un premier temps :

$e^{-\alpha x} u'(x) = \sin(2n_0\pi x) + \lambda$ soit $u'(x) = [\sin(2n_0\pi x) + \lambda]e^{\alpha x}$ d'où une expression de u est

de la forme : $\frac{\lambda}{\alpha} e^{\alpha x} + (a \sin(2n_0 \pi x) + b \cos(2n_0 \pi x)) e^{\alpha x} + \mu$ et on doit avoir :

$$\begin{cases} 2n_0 \pi a + \alpha b = 0 \\ \alpha a - 2n_0 \pi b = 1 \end{cases} \text{ on obtient : } a = \frac{\alpha}{4n_0^2 \pi^2 + \alpha^2} \quad b = -\frac{2n_0 \pi}{4n_0^2 \pi^2 + \alpha^2}.$$

Il reste à déterminer les deux constantes au moyen des conditions $u(0) = u(1) = 0$ qui donnent :

$$u(0) = \frac{\lambda}{\alpha} - \frac{2n_0 \pi}{4n_0^2 \pi^2 + \alpha^2} + \mu = 0 \quad u(1) = \frac{\lambda}{\alpha} e^{\alpha} - \frac{2n_0 \pi}{4n_0^2 \pi^2 + \alpha^2} e^{\alpha} + \mu = 0 \text{ soit :}$$

$$\lambda = \frac{2n_0 \pi \alpha}{4n_0^2 \pi^2 + \alpha^2} \quad \mu = 0. \text{ Conclusion, la solution cherchée est :}$$

$$u(x) = \frac{e^{\alpha x}}{4n_0^2 \pi^2 + \alpha^2} [2n_0 \pi (1 - \cos(2n_0 \pi x)) + \alpha \sin(2n_0 \pi x)] \text{ ou encore sous une autre forme}$$

$$u(x) = \frac{2e^{\alpha x} \sin(n_0 \pi x)}{4n_0^2 \pi^2 + \alpha^2} [2n_0 \pi \sin(n_0 \pi x) + \alpha \cos(n_0 \pi x)].$$

2°) Soit u une solution du problème (1), (2), montrons que $\forall v \in H, b(u, v) = L(v)$.

$b(u, v) = \int_0^1 (q(t) u(t) v(t) + p(t) u'(t) v'(t)) dt$. Faisons une intégration par parties pour

$$A = \int_0^1 p(t) u'(t) v'(t) dt. \text{ On pose : } \begin{cases} w(t) = p(t) u'(t) & w'(t) = \frac{d}{dt}(p(t) u'(t)) \\ s'(t) = v'(t) & s(t) = v(t) \end{cases}$$

$$A = [p(t) u'(t) v(t)]_0^1 + \int_0^1 -\frac{d}{dt}(p(t) u'(t)) v(t) dt = 0 + \int_0^1 (f(t) - q(t) u(t)) v(t) dt \text{ de sorte que}$$

$$\forall v \in H, b(u, v) = \int_0^1 f(t) v(t) dt = L(v).$$

D'après II5, on sait qu'il y a au plus une fonction $u \in H$ vérifiant $\forall v \in H, b(u, v) = L(v)$. On prouve ici qu'il y en a bien une, c'est la solution dans H du problème (1), (2).

3°) On pose pour tout élément $v \in H, J(v) = \frac{1}{2} b(v, v) - L(v)$ et soit u l'unique solution dans

H de $\forall v \in H, b(u, v) = L(v)$.

a) Pour $w \in H$ calculons

$$J(u + w) = \frac{1}{2} b(u + w, u + w) - L(u + w) = \frac{1}{2} [b(u, u + w) + b(w, u + w)] - L(u + w) \text{ soit}$$

$$J(u + w) = \frac{1}{2} b(u, u) - L(u) + b(u, w) + \frac{1}{2} b(w, w) - L(w) = J(u) + J(w) + L(w).$$

D'où pour $w = v - u, J(u) = J(v) - [J(v - u) + L(v - u)] = J(v) - \frac{1}{2} b(v - u, v - u)$ ce qui

prouve bien que $\forall v \in H, J(u) \leq J(v)$.

b) Réciproquement, soit $u_0 \in H; \forall v \in H, J(u_0) \leq J(v)$.

$$J(u_0 + \lambda w) = \frac{1}{2}b(u_0 + \lambda w, u_0 + \lambda w) - L(u_0 + \lambda w) \text{ soit}$$

$$J(u_0 + \lambda w) = \frac{1}{2}[\lambda^2 b(w, w) + 2\lambda b(u_0, w) + b(u_0, u_0)] - L(u_0) - \lambda L(w)$$

$$J(u_0 + \lambda w) = \frac{1}{2}\lambda^2 b(w, w) + \lambda(b(u_0, w) - L(w)) + \frac{1}{2}b(u_0, u_0) - L(u_0) \text{ d' où :}$$

$$J(u_0 + \lambda w) - J(u_0) = \frac{1}{2}\lambda^2 b(w, w) + \lambda(b(u_0, w) - L(w)) \text{ ce qui prouve que le polynôme du}$$

deuxième degré $\frac{1}{2}\lambda^2 b(w, w) + \lambda(b(u_0, w) - L(w))$ garde un signe constant positif quand $\lambda \in \mathbb{R}$.

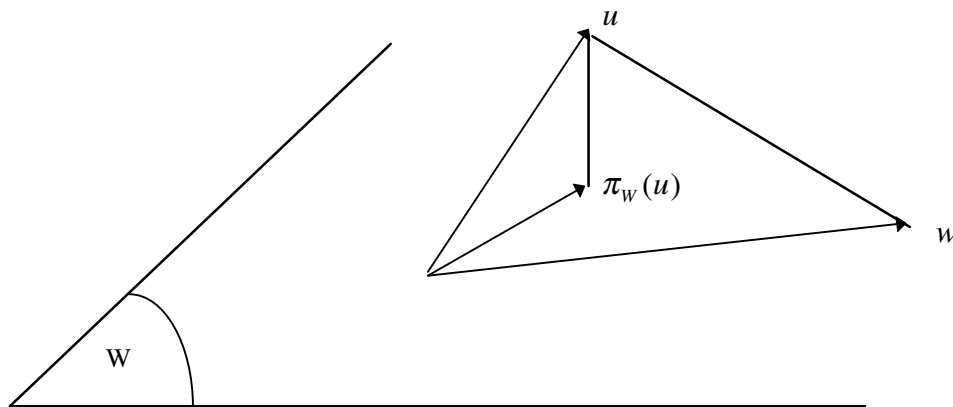
On en déduit que $\Delta = (b(u_0, w) - L(w))^2 \leq 0$ donc en fait cette quantité est nulle et donc :

$$\forall w \in H, \quad b(u_0, w) = L(w).$$

On retiendra que u , unique solution de $\forall v \in H, \quad b(u, v) = L(v)$ dans H est l'unique fonction de H réalisant le minimum de J sur H .

4°) Soit W un sous espace de G de dimension finie d et de base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq d}$. Soit π_W la projection orthogonale sur W pour le produit scalaire b .

a)



La formule demandée est la propriété classique de la projection orthogonale sur un sous espace.

$u = \pi_W(u) + v$ avec $v = u - \pi_W(u)$ qui est orthogonal à W de sorte que, pour $w \in W$ on a :

$$b(w - u, w - u) = b(w - \pi_W(u) - v, w - \pi_W(u) - v) = b(w - \pi_W(u), w - \pi_W(u)) + b(v, v) \text{ et}$$

donc $b(w - u, w - u) = b(w - \pi_W(u), w - \pi_W(u)) + b(\pi_W(u) - u, \pi_W(u) - u)$ ce qui fait que

$$\forall w \in W, \quad b(\pi_W(u) - u, \pi_W(u) - u) \leq b(w - u, w - u).$$

b) • Soit $u_W = \pi_W(u)$, montrons que $\forall v \in W, \quad b(u_W, v) = L(v)$.

En effet, soit $v \in W$, $b(u_W, v) = b(u + u_W - u, v) = b(u, v) + 0 = L(v)$. cqfd.

• Réciproquement, soit $u_0 \in W$; $\forall v \in W, \quad b(u_0, v) = L(v) = b(u, v)$. Montrons que

$$u_0 = u_W.$$

Pour cela soit $(\psi_i)_{1 \leq i \leq d}$ une base orthonormée de W . Dans une telle base,

$$u_W = \sum_{i=1}^d b(u, \psi_i) \psi_i = \sum_{i=1}^d L(\psi_i) \psi_i \text{ et } u_0 = \sum_{i=1}^d b(u_0, \psi_i) \psi_i = \sum_{i=1}^d L(\psi_i) \psi_i \text{ et donc :}$$

$$u_0 = u_W . \text{ cqfd.}$$

c) Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ les composantes de u_W dans la base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq d}$.

$$u_W = \sum_{j=1}^d \alpha_j \varphi_j . \text{ Or } \forall i \in \{1, \dots, d\}, \quad b(u_W, \varphi_i) = L(\varphi_i) \text{ et donc les } \alpha_j \text{ sont solutions du}$$

$$\text{système } \sum_{j=1}^d b(\varphi_i, \varphi_j) \alpha_j = L(\varphi_i) \quad i = 1, \dots, d .$$

On peut donner deux arguments pour assurer que ce système est de Cramer:

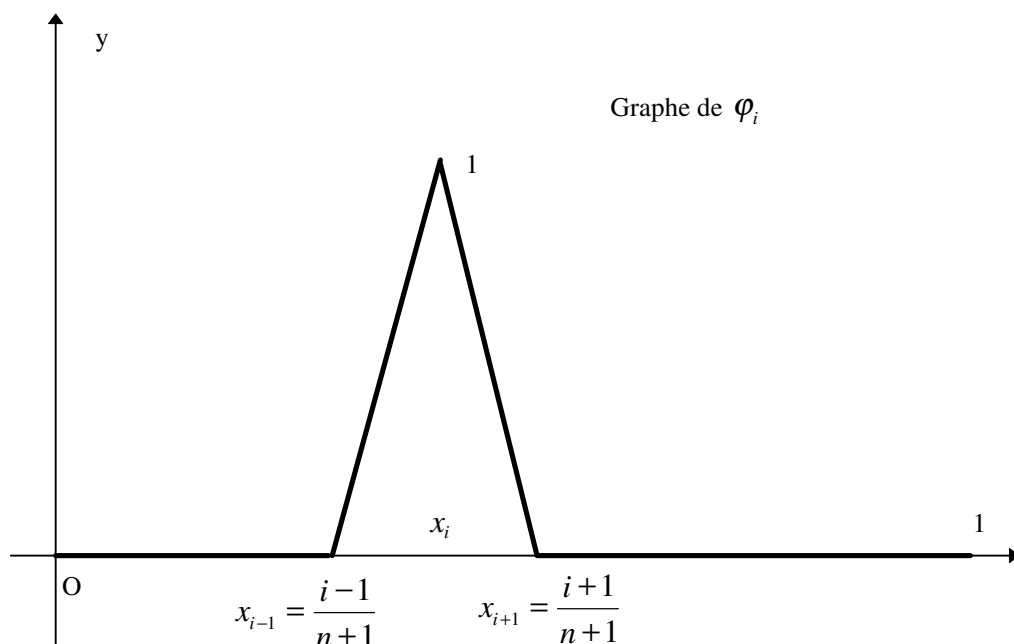
- * C' est un système de d équations à d inconnues dont on sait qu' il admet une solution unique.
 - * Le déterminant de ce système est le déterminant de la forme quadratique, restriction de b à W relativement à la base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq d}$. Ce déterminant est non nul et donc le système est de Cramer.
-

IV. Approximation de la solution u

Notons que les fonctions φ_i sont assez mal définies quant à leur domaine de définition. Nous les considérerons comme étant définies sur $[0,1]$; (mais le "pour tout entier naturel i , $x_i = ih$ " peut troubler un peu!)

1°) a) Prenons donc comme définition de φ_i , $\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - x_i|}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$. Le graphe

est immédiat.



Les fonctions φ_i sont bien continues sur $[0,1]$, de classe C^1 par morceaux sur $[0,1]$ et vérifient $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$ donc ce sont des éléments de G .

b) Soit $W_n = Vect(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

On a de manière évidente $\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}$ de sorte que si on pose $\varphi = \sum_{i=1}^n t_i \varphi_i$, on a :

$$\varphi(x_j) = t_j. \quad \text{On retient } \forall i \in \{1, \dots, n\}, \varphi(x_i) = t_i.$$

La famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ est par définition une famille génératrice de W_n .

Montrons que c' est une famille libre.

Pour cela, soit la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n t_i \varphi_i = 0$, fonction identiquement nulle sur $[0,1]$,

alors $\forall x \in [0,1], \sum_{i=1}^n t_i \varphi_i(x) = 0$ et donc en particulier pour $x = x_i$ ce qui fournit $t_i = 0$.

cqfd.

c) Si $|j-i| \geq 2$ $\varphi_i \varphi_j = 0$ en tout point de $[0,1]$. Il en est de même pour $\varphi_i' \varphi_j' = 0$ et par conséquent $b(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 0 dt = 0$

2°) a) Il reste à calculer les quantités $b(\varphi_i, \varphi_i)$ et $b(\varphi_{i+1}, \varphi_i)$ puisque $b(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ pour $|j-i| \geq 2$

$$\bullet \quad b(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{\frac{i-1}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} \frac{e^{-\alpha x}}{\left(\frac{1}{n+1}\right)} dx = \frac{(n+1)^2}{\alpha} \left(e^{-\frac{\alpha(i-1)}{n+1}} - e^{-\frac{\alpha(i+1)}{n+1}} \right) \text{ soit :}$$

$$b(\varphi_i, \varphi_i) = \frac{2(n+1)^2}{\alpha} e^{-\frac{\alpha i}{n+1}} sh\left(\frac{\alpha}{n+1}\right).$$

$$\bullet \quad b(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} -\frac{e^{-\alpha x}}{\left(\frac{1}{n+1}\right)} dx = \frac{(n+1)^2}{\alpha} \left(e^{-\frac{\alpha(i+1)}{n+1}} - e^{-\frac{\alpha i}{n+1}} \right) \text{ soit :}$$

$$b(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = -\frac{2(n+1)^2}{\alpha} e^{-\frac{\alpha(i+\frac{1}{2})}{n+1}} sh\frac{\alpha}{2(n+1)}.$$

b) Pour $n = 2$ on a :

$$\begin{vmatrix} b(\varphi_1, \varphi_1) & b(\varphi_1, \varphi_2) \\ b(\varphi_1, \varphi_2) & b(\varphi_2, \varphi_2) \end{vmatrix} = \frac{18^2}{\alpha^2} \begin{vmatrix} e^{-\frac{\alpha}{3}} sh \frac{\alpha}{3} & -e^{-\frac{\alpha}{2}} sh \frac{\alpha}{6} \\ -e^{-\frac{\alpha}{2}} sh \frac{\alpha}{6} & e^{-\frac{2\alpha}{3}} sh \frac{\alpha}{3} \end{vmatrix} = \frac{18^2}{\alpha^2} e^{-\alpha} \left(sh^2 \frac{\alpha}{3} - sh^2 \frac{\alpha}{6} \right) \text{ soit}$$

$$\text{encore : } \frac{18^2}{\alpha^2} e^{-\alpha} sh^2 \frac{\alpha}{6} \left(4ch^2 \frac{\alpha}{6} - 1 \right) > 0.$$

3°) Soit $w_n = \sum_{i=1}^n u(x_i) \varphi_i$.

$$\text{a) } \left(\int_y^x u''(z) dz \right) = u'(x) - u'(y) \text{ puis } \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u'(t) - u'(y)) dy = u'(t)(x_i - x_{i-1}) - u(x_i) + u(x_{i-1}).$$

$$\text{Et enfin } \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^x [h u'(t) - (u(x_i) - u(x_{i-1}))] dt = u(x) - u(x_{i-1}) + \frac{1}{h} (x_{i-1} - x)(u(x_i) - u(x_{i-1}))$$

$$\text{soit encore } I = u(x) + \frac{u(x_{i-1}) - u(x_i)}{h} x - u(x_{i-1}) - \frac{x_{i-1}u(x_{i-1}) - (x_i - h)u(x_i)}{h} \text{ que}$$

l' on peut encore écrire sous la forme :

$$I = u(x) + \frac{u(x_{i-1}) - u(x_i)}{h} x - u(x_{i-1}) - u(x_i) - \frac{x_{i-1}u(x_{i-1}) - x_i u(x_i)}{h}$$

Or pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $w_n(x) = u(x_{i-1}) \varphi_{i-1}(x) + u(x_i) \varphi_i(x)$, c' est à dire :

$$w_n(x) = u(x_{i-1}) \left[1 - \frac{x - x_{i-1}}{h} \right] + u(x_i) \left[1 - \frac{x_i - x}{h} \right] \text{ soit :}$$

$$w_n(x) = u(x_{i-1}) + u(x_i) - \frac{x}{h} (u(x_{i-1}) - u(x_i)) + \frac{x_{i-1}u(x_{i-1}) - x_i u(x_i)}{h} \text{ de sorte que}$$

$$u(x) - w_n(x) = u(x) + \frac{u(x_{i-1}) - u(x_i)}{h} x - u(x_{i-1}) - u(x_i) - \frac{x_{i-1}u(x_{i-1}) - x_i u(x_i)}{h} = I . \text{ cqfd.}$$

b) On a : $|u(x) - w_n(x)| \leq \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(z)| dz \right) dy \right) dt$. On utilise I2c

$$|u(x) - w_n(x)| \leq \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} dz} \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz} dy \right) dt \text{ soit}$$

$$|u(x) - w_n(x)| \leq \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \sqrt{h} \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz} dy \right) dt = \frac{1}{\sqrt{h}} \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz} h^2 \text{ soit enfin :}$$

$$|u(x) - w_n(x)| \leq h^{\frac{3}{2}} \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz} .$$

c) $u'(x) - w'_n(x) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_y^x u''(z) dz \right) dy$ et on a donc :

$$|u'(x) - w'_n(x)| \leq \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(z)| dz \right) dy \leq \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} dz} \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz} \right) dy \text{ soit}$$

$$\left| u'(x) - w'_n(x) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{h}} \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz} h \text{ soit enfin : } \left| u'(x) - w'_n(x) \right| \leq h^{\frac{1}{2}} \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz} .$$

4°) On a : $\|u - w_n\|^2 = \int_0^1 \left((u - w_n)^2(t) + (u' - w'_n)^2(t) \right) dt = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left((u - w_n)^2(t) + (u' - w'_n)^2(t) \right) dt$

$$\|u - w_n\|^2 \leq (h^3 + h) \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^x \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz \right) dt = (h^4 + h^2) \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z) dz \text{ soit finalement}$$

$$\|u - w_n\|^2 \leq (h^4 + h^2) \int_0^1 u''^2(z) dz \text{ et donc } \|u - w_n\| \leq h \sqrt{1 + h^2} \left(\int_0^1 u''^2(z) dz \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Or $\sqrt{1 + h^2} \leq \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ car pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$. Dès lors, on a :

$$\|u - w_n\| \leq h \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\int_0^1 u''^2(z) dz \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Conclusion : w_n converge vers u dans le préhilbertien $H, \langle, \rangle$.

FIN