

I] Sous groupes finis de $GL(E)$

1) Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et G un sous groupe fini de $GL(E)$.

Écartons le cas trivial où $|G| = 1$ et supposons que $|G| = m \geq 2$.

Soit $g \in G$, alors $g^m = Id_E$ et $X^m - 1$ est un polynôme annulateur de g , scindé à racines simples. D'où g est diagonalisable.

On suppose maintenant que G est commutatif. Par récurrence sur $n = \dim(E)$ on va montrer que tous les éléments de G sont diagonalisables dans une même base de E .

Le cas où tous les éléments de G sont des homothéties est évident, supposons alors que G admet au moins un élément g qui n'est pas une homothétie.

Le cas $n = 1$ est évident.

Soit $n \geq 2$ tel que si $1 \leq \dim(E) \leq n - 1$ le résultat de cette question est vérifié.

Supposons maintenant que $\dim(E) = n$, et soient $E_1, \dots, E_k$ les sous espaces propres de g , soient $g_1, \dots, g_m$ les m éléments de G , et $h_1, \dots, h_m$ leurs restrictions à E_1 , g commute avec chaque g_j , alors E_1 est stable par chaque g_j , et puisque E_1 est de dimension finie et chaque g_j est injectif, alors $H = \{h_j ; 1 \leq j \leq m\}$ est un sous groupe de $GL(E_1)$; H est abélien puisque G l'est; $1 \leq \dim(E_1) \leq n - 1$. Alors par hypothèse de récurrence, tous les éléments de H sont diagonalisables dans une même base B_1 de E_1 .

Alors E_1 admet une base B_1 d'éléments tous des vecteurs propres communs à tous les éléments de G . Il en est de même pour tous les autres sous espaces propres $E_1, \dots, E_k$. c'est à dire que chaque E_i admet une base B_i d'éléments tous des vecteurs propres communs à tous les éléments de G .

et puisque $E_1, \dots, E_k$ sont supplémentaires dans E , alors E admet $B = (B_1, \dots, B_k)$ comme base dans laquelle tous les éléments de g sont diagonalisables.

II Isométries du triangle

2) On se place dans le plan E euclidien orienté, muni d'un repère orthonormal centré en O . $\tilde{D}_3$ désigne le groupe des isométries d'un triangle équilatéral ABC de centre O .

2.a) Tout élément de $\tilde{D}_3$ garde O fixe, et $\{A, B, C\}$ est stable par tout élément de $\tilde{D}_3$, alors : Les rotations de $\tilde{D}_3$ sont $R(O, \frac{2\pi}{3})$; $R(O, -\frac{2\pi}{3})$; Id .

Les réflexions de $\tilde{D}_3$ sont s_{OA} ; s_{OB} ; s_{OC} les réflexions d'axes respectifs (OA) ; (OB) ; (OC) . Au total, $\tilde{D}_3$ est de cardinal 6.

2.b) On vectorialise le plan en O , on obtient alors la base $(\vec{OA}, \vec{OB})$, et les éléments de $\tilde{D}_3$ deviennent alors des automorphismes linéaires de E (puisque ils gardent O fixe); on déduit alors que $\tilde{D}_3$ est isomorphe à un sous groupe de $GL(E)$, donc à un sous groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ et puisque $GL_2(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $GL_2(\mathbb{C})$, alors $\tilde{D}_3$ est isomorphe à un sous groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.

Rappelons la propriété du centre de gravité : $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 0$.

Dans l'ordre Id_E ; $R(O, \frac{2\pi}{3})$; $R(O, -\frac{2\pi}{3})$; s_{OA} ; s_{OB} ; s_{OC}

Les matrices correspondantes dans la base $(\vec{OA}, \vec{OB})$ sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces six matrices forment alors un sous groupe Δ_3 de $GL_2(\mathbb{C})$, isomorphe à $\tilde{D}_3$.

2.c) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda - j)(\lambda - j^2)$$

Le sous espace propres associé à j est $E_j(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}$ et celui associé à j^2 est

$$E_{j^2}(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -j^2 \end{pmatrix} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+j \end{pmatrix}.$$

Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -j & -j^2 \end{pmatrix}$; $D = \text{diag}(j, j^2)$ alors $A = PDP^{-1}$.

Remarquons alors que quand X décrit une matrice de Δ_3 , $P^{-1}XP$ décrit D_3 .

Alors l'automorphisme intérieur $[X \mapsto P^{-1}XP]$ induit un isomorphisme de groupes de Δ_3 sur D_3 .

Finalement : Le groupe $\tilde{D}_3$ est isomorphe au groupe D_3 .

III] Lemme de Schur

Notons : $\mathbf{A} = M_n(\mathbb{C})$ et $E = \mathbb{C}^n$. Soit G un sous groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$.

Pour tout $B \in G$, on note $i(B)$ l'application de $\mathbf{A}$ vers $\mathbf{A}$ définie par : $[M \mapsto BMB^{-1}]$.

3) C'est clair que pour tout $B \in G$, $i(B) \in GL(\mathbf{A})$.

Soient $B, C \in G$. $\forall M \in \mathbf{A}$; $i(BC)(M) = B(CMC^{-1})B^{-1} = i(B) \circ i(C)(M)$.

D'où i est un morphisme de groupes de G dans $GL(\mathbf{A})$.

i est injectif si et seulement si $\ker(i) = \{Id_E\} = \{B \in G \text{ tq } \forall M \in \mathbf{A}; BM = MB\}$.

Or, on sait que si $Z \in \mathbf{A}$ telle que : $\forall M \in \mathbf{A}$; $ZM = MZ$, alors Z est une homothétie.

D'où i est injectif si et seulement si G ne contient pas d'homothéties autres que l'identité.

On note : $\tilde{G} = i(G)$ et $\mathbf{A}^{\tilde{G}} = \{M \in \mathbf{A} \text{ tq } \forall B \in G; i(B)(M) = M\}$

4) Soit $M \in \mathbf{A}^{\tilde{G}}$, M commute avec tout élément de G , alors $\ker(M)$ et $\text{Im}(M)$ sont stables par tout élément de G , c'est à dire $\ker(M)$ et $\text{Im}(M)$ sont stables par G .

5) On suppose que E est irréductible pour G . Soit $M \in \mathbf{A}^{\tilde{G}}$.

D'après la question précédente, $\ker(M)$ et $\text{Im}(M)$ sont stables par G , alors d'après le théorème du rang, $\ker(M) = \{0\}$ et $\text{Im}(M) = E$ ou $\ker(M) = E$ et $\text{Im}(M) = \{0\}$.

D'où M est soit nulle soit inversible.

$\mathbf{A}^{\tilde{G}} = \bigcap_{B \in G} \ker(i(B) - Id_{\mathbf{A}})$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{A}$.

$I_n \in \mathbf{A}^{\tilde{G}}$, alors $\dim(\mathbf{A}^{\tilde{G}}) \geq 1$. Soit M un élément non nul de $\mathbf{A}^{\tilde{G}}$ et λ une valeur propre de M . $M - \lambda I_n$ est un élément non inversible de $\mathbf{A}^{\tilde{G}}$ donc nul, c'est à dire $M = \lambda I_n$.

Finalement $\mathbf{A}^{\tilde{G}}$ est de dimension 1, et plus précisément $\mathbf{A}^{\tilde{G}}$ est l'ensemble des homothéties.

6) Soient $M, N \in \mathbf{A}$. On considère l'endomorphisme de $\mathbf{A}$, défini par : $[\Phi : X \mapsto MXN]$.

Considérons la base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathbf{A}$ et posons : $M = \sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{ij} E_{ij}$.

$$\Phi(E_{k,l}) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \sum_{1 \leq s,t \leq n} M_{i,j} N_{s,t} E_{i,j} E_{k,l} E_{s,t} = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n M_{i,k} N_{l,t} E_{i,k} E_{k,l} E_{l,t} = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n M_{i,k} N_{l,t} E_{i,t}.$$

Le coefficient dans cette somme de $E_{k,l}$ est $M_{k,k} N_{l,l}$.

$$\text{Alors } \text{Tr}(\Phi) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n M_{k,k} N_{l,l} = \left(\sum_{k=1}^n M_{k,k} \right) \left(\sum_{l=1}^n N_{l,l} \right) = \text{Tr}(M) \text{Tr}(N).$$

$$7) \text{ Soit } P = \frac{1}{|G|} \sum_{B \in G} B.$$

7.a) Soit $Y \in G$, L'application $[X \mapsto YX]$ est une bijection de G sur G .

$$\text{Alors : } \sum_{B \in G} B = \sum_{B \in G} YB \text{ et } P^2 = \frac{1}{|G|^2} \sum_{Y \in G} \left(\sum_{B \in G} YB \right) = \frac{|G|}{|G|^2} \sum_{B \in G} B = P.$$

$X^2 - X = X(X - 1)$ est un polynôme scindé à racines simples qui annule P , alors P est diagonalisable.

$$7.b) \text{ Soit } x \in E^G ; \forall B \in G ; B(x) = x \text{ et } P(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{B \in G} x = x. \text{ alors } x \in \text{Im}(P).$$

Soit $x \in \text{Im}(P)$, P est un projecteur, alors $P(x) = x$. D'après la question précédente :

$$\forall C \in G ; CP = P. \text{ Donc : } \forall C \in G ; C(x) = CP(x) = P(x) = x. \text{ Donc } x \in E^G.$$

Finalement : $\text{Im}(P) = E^G$.

$$P \text{ est un projecteur, alors : } \dim(\text{Im}(P)) = \text{Tr}(P) \text{ c'est à dire : } \dim(E^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{B \in G} \text{Tr}(B).$$

8) Premier cas : **Si i est injectif**

$\tilde{G}$ est un sous groupe fini de $GL(A)$ de cardinal $|\tilde{G}| = |G|$.

On pose $Q = \frac{1}{|\tilde{G}|} \sum_{B \in G} i(B)$. On applique les résultats de 7) à A au lieu de E et $\tilde{G}$ au lieu de G .

$$\text{Alors : } \dim(A^{\tilde{G}}) = \frac{1}{|\tilde{G}|} \sum_{B \in G} \text{Tr}(i(B)). \text{ or d'après 6) ; } \text{Tr}(i(B)) = \text{Tr}(B) \text{Tr}(B^{-1}).$$

$$\text{D'où } \dim(A^{\tilde{G}}) = \frac{1}{|G|} \sum_{B \in G} \text{Tr}(B) \text{Tr}(B^{-1}).$$

Deuxième cas : **Cas quelconque**

On définit sur G la relation binaire $\mathbf{R}$ par : $\forall B, C \in G ; BRC \Leftrightarrow i(B) = i(C)$.

$\mathbf{R}$ est une relation d'équivalence sur G .

Notons H le sous groupe de G formé de toutes les homothéties de G .

$$\forall B, C \in G ; BRC \Leftrightarrow i(B) = i(C) \Leftrightarrow B^{-1}C \in H.$$

Toutes les classes d'équivalence ont le même cardinal qui est $|H|$ et $|\tilde{G}| = \frac{|G|}{|H|}$.

Si $B, C \in G$ tels que : $i(B) = i(C)$ alors il existe un scalaire non nul α tel que : $C = \alpha B$.

$$\text{Alors } \text{Tr}(C) \text{Tr}(C^{-1}) = \text{Tr}(\alpha B) \text{Tr}(\alpha^{-1} B^{-1}) = \text{Tr}(B) \text{Tr}(B^{-1}).$$

Soit G' un système de représentants des classes d'équivalence de $\mathbf{R}$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{B \in G} \text{Tr}(B) \text{Tr}(B^{-1}) = \frac{1}{|\tilde{G}| |H|} \sum_{B \in G} \text{Tr}(B) \text{Tr}(B^{-1}) = \frac{1}{|\tilde{G}| |H|} \sum_{B \in G'} |H| \text{Tr}(B) \text{Tr}(B^{-1}).$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{B \in G} \text{Tr}(B) \text{Tr}(B^{-1}) = \frac{1}{|\tilde{G}|} \sum_{\tilde{B} \in \tilde{G}} \text{Tr}(\tilde{B}) = \dim(A^{\tilde{G}}).$$

NB : Notons que le premier cas est inutile, puisque c'est un cas particulier du deuxième cas.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que E est irréductible pour G .

9.a) Soit $X \in A$ une matrice qui commute avec toutes les matrices de G . Alors $X \in A^{\tilde{G}}$. $A^{\tilde{G}}$ est de dimension 1 (D'après 5) et I_n est un élément non nul de $A^{\tilde{G}}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $X = \lambda I_n$ et $\lambda = \frac{1}{n} \text{Tr}(X)$. D'où $X = \frac{1}{n} \text{Tr}(X) I_n$.

9.b) Soit $Y = \sum_{B \in G} \text{Tr}(B^{-1})B$. Soit $Z \in G$. On a : $G = \{BZ \text{ tq } B \in G\} = \{Z^{-1}C \text{ tq } C \in G\}$.

$$YZ = \sum_{B \in G} \text{Tr}(B^{-1})BZ = \sum_{C \in G} \text{Tr}(ZC^{-1})C = Z \sum_{C \in G} \text{Tr}(C^{-1}Z)Z^{-1}C = Z \sum_{B \in G} \text{Tr}(B^{-1})B = ZY.$$

Alors Y commute avec tout élément de G , et donc d'après 9.a)

$$Y = \frac{1}{n} \text{Tr}(Y) I_n = \frac{1}{n} \sum_{B \in G} \text{Tr}(B^{-1}) \text{Tr}(B) I_n = \frac{|G|}{n} \dim(A^{\tilde{G}}) I_n = \frac{|G|}{n} I_n.$$

10) On garde la notation Y jusqu'à la fin de cette partie. Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{|G|}}$.

On note : $Z_G = \{a_0 \zeta^0 + a_1 \zeta^1 + \dots + a_{|G|-1} \zeta^{|G|-1} ; a_0, \dots, a_{|G|-1} \in \mathbb{Z}\}$.

$Z_G[G]$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans Z_G , de matrices de G .

10.a) Posons $m = |G|$, Soit $B \in G$, alors $B^m = I_n$ et toute valeur propre de B est racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité, or $\text{Tr}(B)$ est la somme de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités. D'où : $\text{Tr}(B) \in Z_G$. Aussi puisque G est un groupe, $\forall B \in G ; B^{-1} \in G$ et $\text{Tr}(B^{-1}) \in Z_G$.

Finalement : $Y = \sum_{B \in G} \text{Tr}(B^{-1})B \in Z_G[G]$.

10.b) On note $(C_k)_{1 \leq k \leq |G|^2}$ les $|G|^2$ matrices $\zeta^i B$, où $1 \leq i \leq |G|$ et $B \in G$.

$YC_k = \zeta^i \sum_{B \in G} \text{Tr}(B^{-1})BZ$ avec $Z \in G$ et $C_k = \zeta^i Z$. selon la remarque de la question 9.b) on a :

$$YC_k = \zeta^i \sum_{C \in G} \text{Tr}(ZC^{-1})C. \quad \forall C \in G ; ZC^{-1} \in G \text{ et selon la question précédente : } \text{Tr}(ZC^{-1}) \in Z_G.$$

Dons aussi : $\forall C \in G ; \zeta^i \text{Tr}(ZC^{-1}) \in Z_G$. Alors : $YC_k \in Z_G[G]$.

Remarquons que tout élément de $Z_G[G]$ est combinaison linéaire des matrices $(C_k)_{1 \leq k \leq |G|^2}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

D'où : il existe dans $\mathbb{Z}$, des coefficients $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq |G|^2}$ tels que :

$$\forall k \in [[1, |G|^2]] \quad ; \quad YC_k = \sum_{1 \leq l \leq |G|^2} a_{l,k} C_l.$$

10.c) On pose : $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq |G|^2}$ et $R = \frac{|G|}{n} I_{|G|^2} - A = (r_{ij})_{1 \leq i, j \leq |G|^2}$.

On a : $Y = \frac{|G|}{n} I_n$; alors selon la question précédente :

$$\forall k \in [[1, |G|^2]] \quad ; \quad \frac{|G|}{n} C_k = \sum_{1 \leq l \leq |G|^2} a_{l,k} C_l.$$

$$\forall k \in [[1, |G|^2]] \quad ; \quad \sum_{1 \leq l \leq |G|^2} r_{l,k} C_l = 0. \text{ On peut écrire : } {}^t R \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{|G|^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}.$$

Si R était inversible, ${}^t R$ serait aussi inversible, en multipliant par l'inverse de ${}^t R$ à gauche, on aurait toutes les matrices C_k sont nulles, ce qui est absurde.

D'où R n'est pas inversible et $\det(R) = 0$.

10.d) D'après la question précédente $\frac{|G|}{n}$ est valeur propre de A , donc racine de son polynôme caractéristique, qui est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ puisque A est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Le coefficient dominant de ce polynôme caractéristique est $(-1)^{|G|^2}$ et son degré est $|G|^2$.

Notons χ_A le polynôme caractéristique de A , alors $Q = (-1)^{|G|^2} \chi_A$ est un polynôme unitaire de degré $|G|^2$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ qui admet $\frac{|G|}{n}$ comme racine.

Posons : $Q = X^{|G|^2} - \sum_{0 \leq k \leq |G|^2-1} \alpha_k X^k$. alors $\left(\frac{|G|}{n}\right)^{|G|^2} = \sum_{0 \leq k \leq |G|^2-1} \alpha_k \left(\frac{|G|}{n}\right)^k$

Soit $\frac{p}{q}$ un représentant irréductible de $\frac{|G|}{n}$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Alors : $|p|^{|G|^2} = \sum_{0 \leq k \leq |G|^2-1} \alpha_k |G|^k q^{|G|^2-k} = \sum_{1 \leq k \leq |G|^2} \alpha_k |G|^{|G|^2-k} q^k$; alors q divise $p^{|G|^2}$.

Mais puisque p et q sont premiers entre eux , q et $p^{|G|^2}$ sont aussi premiers entre eux.
D'où $q = 1$ et $\frac{|G|}{n} \in \mathbb{N}^*$. Finalement : n divise $|G|$.

IV] Une caractérisation de D_n , n impair

Soit G un sous groupe fini de $GL_2(\mathbb{C})$. Notons $\langle, \rangle$ le produit scalaire hermitien usuel sur $\mathbb{C}^2$, et posons pour tout $v, w \in \mathbb{C}^2$; $\langle v, w \rangle_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{B \in G} \langle B(v), B(w) \rangle$.

11.a) Soient $v, w \in \mathbb{C}^2$; $\langle v, w \rangle_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{B \in G} \langle B(w), B(v) \rangle = \overline{\langle w, v \rangle_0}$.

Pour $v \in \mathbb{C}^2$, La linéarité de $[w \mapsto \langle v, w \rangle_0]$ provient du faite que chaque élément B de G est linéaire et du faite que $[w \mapsto \langle B(v), w \rangle]$ est linéaire.

Finalement : $\langle v, v \rangle_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{B \in G} \langle B(v), B(v) \rangle \geq 0$ et

$[\langle v, v \rangle_0 = 0 \Rightarrow \forall B \in G ; \langle B(v), B(v) \rangle = 0]$ et puisque $G \subset GL_2(\mathbb{C})$ alors $v = 0$.

D'où l'égalité : $\langle v, w \rangle_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{B \in G} \langle B(v), B(w) \rangle$ définit un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^2$.

Soient $B \in G$ et $v, w \in \mathbb{C}^2$. $\langle B(v), B(w) \rangle_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{C \in G} \langle CB(v), CB(w) \rangle$.

or d'après la remarque de 9.b) $G = \{CB \mid C \in G\}$ et par suite :

$\langle B(v), B(w) \rangle_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{C \in G} \langle C(v), C(w) \rangle = \langle v, w \rangle_0$.

11.b) On suppose que $\mathbb{C}^2$ n'est pas irréductible pour G , alors il existe un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$ stable par G , non nul et différent de $\mathbb{C}^2$, alors de dimension 1, puisque $\mathbb{C}^2$ est un plan.

Soient alors v un vecteur propre commun à tous les éléments de G et w un vecteur non nul de $\mathbb{C}^2$, orthogonal à v pour le produit scalaire hermitien $\langle, \rangle_0$.

Soit $B \in G$, $B(v)$ est non nul colinéaire à v et d'après la question précédente :

$\langle B(v), B(w) \rangle_0 = \langle v, w \rangle_0 = 0$ alors $B(w)$ est orthogonal à v et par suite colinéaire à w .
 (v, w) est alors une base orthogonale de $\mathbb{C}^2$ pour le produit scalaire hermitien $\langle, \rangle_0$.

cette base (v, w) diagonalise tous les éléments de G , alors $\forall B, C \in G$; $\begin{cases} BC(v) = CB(v) \\ BC(w) = CB(w) \end{cases}$.

C'est à dire : $\forall B, C \in G$; $BC = CB$. D'où G est commutatif.

12.a) On note $SL_2(\mathbb{C})$ le sous groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ des matrices de déterminant 1.

Soit $B \in SL_2(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = I_2$. B est alors diagonalisable et $sp(B) \subset \{-1, 1\}$.

$\det(B) = 1$ est le produit des valeurs propres de B , alors $sp(B) = \{1\}$ ou $sp(B) = \{-1\}$.

D'où $B = I_2$ ou $B = -I_2$. La réciproque est évidente.

12.b) On suppose que $G \subset SL_2(\mathbb{C})$ et que G est non commutatif.

Par contraposée de 11.b) $\mathbb{C}^2$ est irréductible pour G , alors d'après 10.d) 2 divise $|G|$.

D'où $|G|$ est pair.

2 est un nombre premier qui divise $|G|$ alors G contient un élément B d'ordre 2.

$B^2 = I_2$ et $B \neq I_2$ et $B \in SL_2(\mathbb{C})$ alors d'après la question précédente : $B = -I_2$.

Finalement : $-I_2 \in G$.

On suppose par la suite que G est un sous groupe fini de $GL_2(\mathbb{C})$ ne contenant aucune homothétie autre que l'identité. On note : $G_0 = G \cap SL_2(\mathbb{C})$.

13.a) G_0 est un sous groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ et $G_0 \subset SL_2(\mathbb{C})$ et $-I_2 \notin G_0$, alors par contraposée de 12.b) G_0 est commutatif.

Alors d'après 1), tous les éléments de G_0 sont diagonalisables dans une même base de $\mathbb{C}^2$.

Autrement dit, il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que : $\forall B \in G_0 ; PBP^{-1}$ est diagonale.

$\forall B \in G_0 ; \det(B) = \det(PBP^{-1}) = 1$ alors $\forall B \in G_0 ; PBP^{-1}$ est de la forme : $diag(\lambda, \lambda^{-1})$

Notons : $\Gamma_0 = \{PBP^{-1} \text{ tq } B \in G_0\}$.

Γ_0 est un sous groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ isomorphe à G_0 par : $[B \in G \mapsto PBP^{-1}]$.

13.b) Soient $m = |\Gamma_0|$, et $D = diag(\lambda, \lambda^{-1}) \in \Gamma_0$. $D^m = I_2$ alors $\lambda^m = 1$.

D'où $\Gamma_0 = \mathbf{Z}_m = \{diag(c^k, c^{-k}) \text{ tq } 0 \leq k \leq m-1\}$ où $c = e^{\frac{2i\pi}{m}}$.

13.c) On suppose que $G_0 = \{I_2\}$.

$\det : G \rightarrow \mathbb{C}$ est un morphisme de groupes de noyau réduit à $\{I_2\}$, donc injectif.

Notons $v = |G|$ et U le groupe des racines $v^{ème}$ de l'unité.

$\det : G \rightarrow (U, \times)$ est un isomorphisme de groupes, en plus $(U, \times)$ est commutatif,

D'où G est commutatif.

On suppose dans les questions 14 et 15 que G n'est pas commutatif et que G_0 est exactement le groupe $\mathbf{Z}_m$.

14) Soit B_0 une matrice dans G qui n'est pas diagonale.

14.a) Soit $C \in \mathbf{Z}_m$. $\det(C) = \det(B_0CB_0^{-1}) = 1$, alors $B_0CB_0^{-1} \in G_0 = \mathbf{Z}_m$.

On garde les notations de 13.c). Posons : $B_0 = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$. $-I_2 \notin G_0 = \mathbf{Z}_m$ alors $m \geq 3$.

alors il existe $i \in [[0, m-1]]$ tel que : $c^i \neq c^{-i}$. $C = \begin{pmatrix} c^i & 0 \\ 0 & c^{-i} \end{pmatrix}$ ne peut pas commuter

avec B_0 car B_0 n'est pas diagonale. Il existe alors $j \in [[0, m-1]]$ tel que : $c^i \neq c^j$ et

$B_0C = C'B_0$ où $C' = \begin{pmatrix} c^j & 0 \\ 0 & c^{-j} \end{pmatrix}$. c'est à dire : $\begin{pmatrix} xc^i & zc^{-i} \\ yc^i & tc^{-i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xc^j & zc^j \\ yc^{-j} & tc^{-j} \end{pmatrix}$.

D'où $x = t = 0$ et B_0 est de la forme : $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b' & 0 \end{pmatrix}$.

14.b) $B_0^2 = \begin{pmatrix} bb' & 0 \\ 0 & bb' \end{pmatrix}$ est une homothétie de G , or I_2 est la seule homothétie que

contient G , D'où $B_0^2 = I_2$ et $b' = b^{-1}$.

14.c) Soit φ_0 l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice B_0 dans la base canonique (e_1, e_2) .

$(e_1, -b'e_2)$ est aussi une base de $\mathbb{C}^2$ et la matrice de φ_0 dans cette nouvelle base est

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. La formule du changement de base s'écrit $QB_0Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ avec

$Q = diag(1, -b)$ est la matrice de passage de la nouvelle base à l'ancienne base.

15.a) Soit B une matrice diagonale dans G . Remarquons alors que $B = Q^{-1}BQ$.

Posons : $B = diag(\alpha, \beta)$, alors $BB_0 = Q^{-1}BQQ^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Q = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} Q$.

$(BB_0)^2 = \alpha\beta I_2$ est une homothétie, or la seule homothétie que contient G est I_2 . Donc $\alpha\beta = 1$.

Alors : $\det(B) = 1$ et par suite $B \in G_0 = \mathbf{Z}_m$.

15.b) On définit sur G la relation binaire : $BSB' \Leftrightarrow B'B^{-1} \in G_0 = \mathbf{Z}_m$.

S est une relation d'équivalence sur G , et toutes les classes d'équivalence sont de même cardinal égal à $m = |\mathbf{Z}_m|$. En effet : si $B \in G$; la classe d'équivalence de B est $\mathbf{Z}_m B$.

Soient $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_1^{-1} & \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ b_2^{-1} & \end{pmatrix}$ deux éléments non diagonaux de G .

$$B_1 B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_1^{-1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ b_2^{-1} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 b_2^{-1} & 0 \\ 0 & b_1^{-1} b_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}_m. \text{ (D'après 15.a) }$$

G est différent de $\mathbf{Z}_m$ car $\mathbf{Z}_m$ est commutatif et G ne l'est pas.

On déduit alors que La relation d'équivalence S admet exactement deux classes d'équivalence et le cardinal de G est $2m$.

L'application $[B \mapsto QBQ^{-1}]$ réalise un isomorphisme de groupes entre G et un groupe D'_m .

D'_m contient les matrices $\begin{pmatrix} c^k & 0 \\ 0 & c^{-k} \end{pmatrix}$ pour $0 \leq k \leq m-1$ et $c = e^{\frac{2i\pi}{m}}$.

$$D'_m \text{ contient aussi les matrices } \begin{pmatrix} c^k & 0 \\ 0 & c^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c^k \\ -c^{-k} & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $D_m \subset D'_m$, de plus D_m et D'_m sont finis de même cardinal, alors $D_m = D'_m$.

16) Soit G un sous groupe fini commutatif de $GL_2(\mathbb{C})$ qui ne contient pas d'homothétie autre que l'identité.

16.a) D'après 1) tous les éléments de G sont diagonalisables dans une même base de $\mathbb{C}^2$.

Il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que : $\forall B \in G ; P^{-1}BP$ est diagonale.

$$\text{Posons alors : } \forall B \in G ; B = P \begin{pmatrix} \chi_1(B) & 0 \\ 0 & \chi_2(B) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

G un sous groupe $GL_2(\mathbb{C})$, alors χ_1 et χ_2 sont à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. $\forall B, C \in G ; BC \in G$

$$\text{et donc : } BC = P \begin{pmatrix} \chi_1(BC) & 0 \\ 0 & \chi_2(BC) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \chi_1(B)\chi_1(C) & 0 \\ 0 & \chi_2(B)\chi_2(C) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

D'où $\forall B, C \in G ; \chi_1(BC) = \chi_1(B)\chi_1(C)$ et $\chi_2(BC) = \chi_2(B)\chi_2(C)$.

χ_1 et χ_2 sont alors des morphismes de groupes de G vers $\mathbb{C}^*$.

16.b) $\forall B \in G ; B^{|G|} = I_2$ alors $\chi_1(B)^{|G|} = \chi_2(B)^{|G|} = 1$ alors d'après 16.a) on déduit que :

$[B \mapsto \chi_1(B)\chi_2(B)^{-1}]$ est un morphisme de groupes de G vers le groupes des racines $|G|^{\text{èmes}}$ de l'unité. Ces deux groupes sont de même cardinal égal à $|G|$.

Pour conclure, Il reste à vérifier que l'application $[\chi : B \in G \mapsto \chi_1(B)\chi_2(B)^{-1}]$ est injective.

On montre alors que $\ker(\chi) = \{I_2\}$.

$B \in \ker(\chi) \Rightarrow \chi(B) = 1 \Rightarrow \chi_1(B) = \chi_2(B) \Rightarrow B$ est une homothétie.

Puisque La seule homothétie que contient G est I_2 ; on déduit : $\ker(\chi) = \{I_2\}$.

16.c) D'après les résultats de 16.b), G est isomorphe à un groupe cyclique, alors G est

aussi cyclique. Soit $B = P \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1}$ un générateur de G . c et d sont des racines $|G|^{\text{èmes}}$

de l'unité, alors il existe des entiers p et q tels que : $c = e^{\frac{2ip\pi}{|G|}}$ et $d = e^{\frac{2iq\pi}{|G|}}$.

$\chi(B) = \chi_1(B)\chi_2(B)^{-1} = e^{\frac{2i(p-q)\pi}{|G|}}$ est un générateur du groupe des racines $|G|^{\text{èmes}}$ de l'unité.

$e^{\frac{2i\pi}{|G|}}$ est aussi un générateur du groupe des racines $|G|^{\text{èmes}}$ de l'unité qui est de cardinal $|G|$.

D'où $(p - q)$ est premier avec $|G|$.

G est cyclique de cardinal $|G|$ engendré par $B = P \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1}$, alors G est l'ensemble

des matrices $B = P \begin{pmatrix} c^k & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $0 \leq k \leq |G| - 1$.

17) D'après 16) les sous groupes finis commutatifs de $GL_2(\mathbb{C})$ ne contenant pas d'homothétie autre que I_2 sont cycliques et plus précisément sont ceux de la forme :

$$G_{P,h,p,q} = \left\{ P \begin{pmatrix} c^k & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix} P^{-1} \text{ tq } 0 \leq k \leq h-1 \right\}$$

avec $h \in \mathbb{N}^*$; $P \in GL_2(\mathbb{C})$; $p, q \in \mathbb{N}$ tous donnés tels que : $(p - q)$ est premier avec h ,
et $c = e^{\frac{2ip\pi}{h}}$; $d = e^{\frac{2iq\pi}{h}}$.

NB : $|G_{P,h,p,q}| = h$.

Remarquons que parmi les sous groupes D_n , les seuls qui sont commutatifs sont D_1 et D_2 .

On déduit alors d'après 15.b) que les sous groupes finis non commutatifs de $GL_2(\mathbb{C})$ ne contenant pas d'homothétie autre que I_2 sont ceux de la forme :

$Q^{-1}D_mQ = \{Q^{-1}BQ \text{ tq } B \in D_m\}$ avec m un entier ≥ 3 .

18) Par l'absurde, supposons que $GL_2(\mathbb{C})$ admet un sous groupe G isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

alors G est commutatif d'ordre 8 et $\forall B \in G$; $B^2 = I_2$ et $\det(B) = \pm 1$.

D'après 12.a) Les seuls éléments possibles B de G tels que : $\det(B) = 1$ sont I_2 et $-I_2$.

Alors G contient au moins six éléments de déterminant égal à -1 .

Soient $B_1, B_2, \dots, B_6$ ces six éléments.

$B_1B_6, B_2B_6, \dots, B_5B_6$ sont 5 éléments distincts de G tous de déterminant égal à 1.