

• **Partie I**

1. a)  $e^{in\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos \theta)^{n-k} (i \sin \theta)^k$  donc, en prenant la partie réelle :

$$\cos n\theta = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} (\cos \theta)^{n-2j} (i \sin \theta)^{2j} = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} (\cos \theta)^{n-2j} (1 - \cos^2 \theta)^j.$$

Posons  $T(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} x^{n-2j} (1-x^2)^j$ .  $T$  est un polynôme à coefficients réels tel que  $\cos n\theta = T(\cos \theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ . De plus, dans la somme qui définit  $T$ , le terme d'indice  $j$  est un polynôme de degré  $n$  et de coefficient dominant  $\binom{n}{2j}$  ; comme  $\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} > 0$ , le degré de  $T$  est exactement  $n$ .

b) Si  $T$  et  $U$  sont deux polynômes vérifiant (\*),  $(T-U)(\cos \theta) = 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , donc  $T-U$  possède une infinité de racines, donc  $T-U=0$ .

2. a)  $\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2 \cos \theta \cos(n+1)\theta$ , donc  $T_{n+2}(\cos \theta) = 2 \cos \theta T_{n+1}(\cos \theta) - T_n(\cos \theta)$ , donc pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $T_{n+2}(x) = 2x T_{n+1}(x) - T_n(x)$ .

*Remarque* : cette égalité est en fait valable pour tout réel  $x$  car deux polynômes qui coïncident en une infinité de points sont égaux.

b)  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$  puis, avec le a),  $T_2(x) = 2x^2 - 1$  et  $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ .

c) Le a) et une récurrence évidente montrent que le coefficient dominant de  $T_n$  est 1 si  $n=0$  et  $2^{n-1}$  si  $n \geq 1$ .

3. a) On suppose ici  $n \geq 1$ .  $T_n(\cos \theta_k) = \cos(n\theta_k) = \cos(k\pi + \pi/2) = 0$ . Comme les  $\theta_k$  appartiennent à  $[0, \pi]$  et sont tous distincts, les  $\cos \theta_k$  sont aussi tous distincts ;  $T_n$  étant de degré  $n$ , les  $\cos \theta_k$  sont les seules racines de  $T_n$  et sont des racines simples ; compte tenu du 2.c), on en déduit la factorisation demandée de  $T_n$ .

b)  $\|T_n\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |T_n(\cos \theta)| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |\cos n\theta| = 1$ .

D'autre part,  $T_n(c_k) = T_n\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right) = \cos k\pi = (-1)^k$ , d'où les deux autres propriétés demandées.

• **Partie II**

4. La fonction  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  est intégrable sur  $] -1, 1[$  car elle est positive et  $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{Arcsin } b - \text{Arcsin } a \leq \pi$

pour tout  $[a, b] \subset ] -1, 1[$ .  $\left| \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} \right| \leq \frac{\|h\|_\infty}{\sqrt{1-t^2}}$ , donc  $t \mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$  est aussi intégrable sur  $] -1, 1[$ .

5. a) Par positivité stricte de l'intégrale pour les fonctions continues,  $h$  est nulle sur  $] -1, 1[$  ; par continuité en  $-1$  et en  $1$ ,  $h$  est nulle sur  $[-1, 1]$ .

b) L'application  $\langle , \rangle$  est bien définie sur  $E \times E$  d'après 4., elle est bilinéaire par linéarité de l'intégrale et évidemment symétrique et positive ; plus précisément, elle est définie positive d'après a), c'est donc un produit scalaire sur  $E$ .

6. La définition de  $\langle , \rangle$  et le changement de variable  $t = \cos \theta$  donnent :

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_n(t) T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^\pi T_n(\cos \theta) T_m(\cos \theta) d\theta = \int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta.$$

$$\text{D'où } \langle T_n, T_m \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi & \text{si } m = n = 0 \\ \pi/2 & \text{si } m = n \geq 1 \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

$(T_k)_{0 \leq k \leq n}$  est donc une famille orthogonale de  $n+1$  vecteurs non nuls de l'e.v.  $E_n$ , qui est de dimension  $n+1$  ; c'est par conséquent une base orthogonale de  $E_n$ .

7. a)  $E_n$  est un sous-e.v. de dimension finie de l'espace préhilbertien  $(E, \langle , \rangle)$  donc, par théorème, la distance de  $f$  à  $E_n$  est atteinte en un unique élément de  $E_n$ , à savoir le projeté orthogonal de  $f$  sur  $E_n$ .

b) La famille  $\left( \frac{T_k}{\|T_k\|_2} \right)_{0 \leq k \leq n}$  est une base orthonormale de  $E_n$  donc, d'après le cours et les questions 6. et 7.a) :

$$t_n(f) = \sum_{k=0}^n \left\langle \frac{T_k}{\|T_k\|_2}, f \right\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|_2} = \frac{1}{\pi} \left( \langle T_0, f \rangle T_0 + 2 \sum_{k=1}^n \langle T_k, f \rangle T_k \right).$$

8.  $f = t_n(f) + (f - t_n(f))$  et  $t_n(f) \perp f - t_n(f)$  donc  $\|f\|_2^2 = \|t_n(f)\|_2^2 + \|f - t_n(f)\|_2^2 = \|t_n(f)\|_2^2 + d_2(f, E_n)^2$ .

Mais d'après 7.b) et l'expression de la norme en base orthonormale,  $\|t_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$ , d'où le résultat.

9. a)  $\sum \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$  est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont, selon 8., majorées par  $\|f\|_2^2$  ; elle est donc convergente.

b)  $\|T_n\|_2^2 = \frac{\pi}{2}$  pour  $n \geq 1$ , donc la série  $\sum \langle f, T_n \rangle^2$  est aussi convergente, et en particulier son terme général tend vers 0 ; autrement dit,  $\int_{-1}^1 \frac{f(t) T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

10. a)  $\|h\|_2^2 = \int_{-1}^1 \frac{h(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \|h\|_\infty^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \|h\|_\infty^2 [\text{Arcsin } t]_{-1}^1 = \pi \|h\|_\infty^2$ , d'où le résultat.

b) Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . D'après le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme  $p$  tel que  $\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon/\sqrt{\pi}$ , d'où il résulte, d'après a), que  $\|f - p\|_2 \leq \varepsilon$ .

Fixons un tel  $p$  et notons  $N$  son degré. Pour  $n \geq N$ ,  $p$  appartient à  $E_n$ , donc  $\|f - t_n(f)\|_2 \leq \|f - p\|_2 \leq \varepsilon$ .

Cela démontre, par retour à la définition, que la suite  $(\|f - t_n(f)\|_2)$  converge vers 0, ou encore que la suite  $(t_n(f))$  converge vers  $f$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$ .

11. a) Il suffit de faire tendre  $n$  vers l'infini dans l'égalité du 8., puisque  $d_2(f, E_n) = \|f - t_n(f)\|_2$ .

b) Pour une telle fonction  $h$ , le a) donne  $\|h\|_2 = 0$ , c'est-à-dire  $h = 0$ .

### • Partie III

12. a) - Le polynôme nul appartient à  $K$ , donc  $K$  n'est pas vide.

-  $K$  est l'image réciproque du fermé  $]-\infty, \|f\|_\infty]$  de  $\mathbb{R}$  par l'application continue  $Q \mapsto \|f - Q\|_\infty$  de  $E_n$  dans  $\mathbb{R}$ , donc  $K$  est fermée.

- Pour tout  $Q \in K$ ,  $\|Q\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$  par inégalité triangulaire, donc  $K$  est bornée.

b)  $E_n$  est de dimension finie, donc par théorème toute partie de  $E_n$  fermée et bornée est compacte.

13. a) -  $K \subset E_n$ , donc  $d_\infty(f, E_n) \leq d_\infty(f, K)$ .

- Pour  $Q \in E_n \setminus K$ ,  $\|f - Q\|_\infty > \|f\|_\infty \geq d_\infty(f, K)$ . On a donc  $\|f - Q\|_\infty \geq d_\infty(f, K)$  pour tout  $Q \in E_n$ , et par suite  $d_\infty(f, K) \leq d_\infty(f, E_n)$ .

b) L'application  $Q \mapsto \|f - Q\|_\infty$  de  $K$  dans  $\mathbb{R}$  est continue ; comme  $K$  est compact et non vide, elle admet un minimum global. Soit  $P$  un élément de  $K$  en lequel ce minimum est atteint, on a :

$$\|f - P\|_\infty = \min_{Q \in K} \|f - Q\|_\infty = \inf_{Q \in K} \|f - Q\|_\infty = d_\infty(f, K) = d_\infty(f, E_n).$$

14. b) On a établi cette propriété en I.3.b) ; les points recherchés sont les  $x_k = \cos \frac{(n+1-k)\pi}{n+1}$ , avec  $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ .

15. a)  $Q(x_i) - P(x_i) = Q(x_i) - f(x_i) + f(x_i) - P(x_i) = Q(x_i) - f(x_i) + \|f - P\|_\infty \geq \|f - P\|_\infty - \|f - Q\|_\infty > 0$ .

b) Les inégalités du a) et le théorème des valeurs intermédiaires montrent que le polynôme  $Q - P$  possède au moins  $n+1$  racines ; comme son degré est au plus  $n$ , c'est le polynôme nul, donc  $Q = P$ . Cela contredit l'hypothèse initiale sur  $Q$ .

On a donc  $\|f - Q\|_\infty \geq \|f - P\|_\infty$  pour tout  $Q \in E_n$  ; autrement dit  $P$  est un PMA d'ordre  $n$  de  $f$ .

16. - D'abord,  $q_n$  appartient à  $E_n$ , puisque  $T_{n+1}$  est de degré  $n+1$  et de coefficient dominant  $2^n$ .

- Ensuite,  $f(x) - q_n(x) = 2^{-n} T_{n+1}(x)$  donc, selon 14.b),  $f - q_n$  équi oscille sur  $n+2$  points.

- D'après 15.,  $q_n$  est un PMA d'ordre  $n$  de la fonction  $f : x \mapsto x^{n+1}$ .

17. Soit  $P$  un tel polynôme ; gardons les notations du 16. et posons  $r_n(x) = x^{n+1} - P(x)$ .

$r_n \in E_n$  donc d'après 16.,  $\|f - q_n\|_\infty \leq \|f - r_n\|_\infty$ , ce qui se réécrit  $2^{-n} \|T_{n+1}\|_\infty \leq \|P\|_\infty$ .

18. a) Notons  $\alpha$  le coefficient dominant de  $f$  et posons  $P = f - 2^{-n} \alpha T_{n+1}$ . Par construction,  $P$  appartient à  $E_n$  ; de plus,  $f - P = 2^{-n} \alpha T_{n+1}$ , qui équi oscille sur  $n+2$  points, donc  $P$  est un PMA d'ordre  $n$  de  $f$ .

b) L'application à  $f$  de la formule du a) fournit le PMA d'ordre 2  $x \mapsto 5x^3 + 2x - 3 - \frac{5}{4}(4x^3 - 3x) = \frac{23}{4}x - 3$ .