

EPREUVE e3a PSI 2011, MATH A en 3 h

Calculatrice interdite

Questions de cours

1. Deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que $M = PNP^{-1}$. En ce plaçant dans \mathbb{R}^n , cela signifie que M et N sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

2. 2.1. Vrai

Deux matrices semblables ont le même rang : elles représentent un même endomorphisme de \mathbb{R}^n dans deux bases différentes et le rang est la dimension de l'image d'un endomorphisme.

2.2. Faux

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ces deux matrices sont inversibles donc de rang 2.

Or si elles sont semblables, il existe une matrice inversible P telle que $M = PNP^{-1} = PP^{-1} = I_2$, ce qui est faux.

2.3. Vrai

Deux matrices semblables ont le même déterminant car elles représentent un même endomorphisme de \mathbb{R}^n dans deux bases différentes.

2.4. Faux

Reprenons l'exemple précédent : soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ces deux matrices ne sont pas semblables (voir ci dessus) mais ont le même déterminant.

2.5. Vrai

Si A vérifie $A^2 + 5A - 6I_n = 0_n$, alors $P(X) = X^2 + 5X - 6 = (X - 1)(X + 6)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de A : A est donc diagonalisable, les valeurs propres sont parmi 1 et -6. \mathbb{R}^n est la somme directe des espaces propres de A .

$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(A - I_n) \oplus \text{Ker}(A + 6I_n)$, espaces éventuellement réduit à $\{0_E\}$.

2.6. Faux

Cette proposition est fausse car on vient de voir que si A vérifie $A^2 + 5A - 6I_n = 0_n$, les valeurs propres sont parmi 1 et -6 donc $\text{Ker}(A + I_n) = \{0\}$ et $\text{Ker}(A - 6I_n) = \{0\}$: leur somme ne peut donc pas être égale à \mathbb{R}^n .

2.7. Vrai

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique : si M et N sont semblables, $M - \lambda I_n$ et $N - \lambda I_n$ le sont aussi et ces deux dernières matrices ont même déterminant donc M et N ont le même polynôme caractéristique.

2.8. Faux

Reprenons encore l'exemple précédent : soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ces deux matrices ne sont pas semblables mais ont le même polynôme caractéristique : $P(X) = (X - 1)^2$.

PARTIE 1

1. On calcule la matrice : $B = {}^t AA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

1.1. La matrice B est symétrique réelle donc diagonalisable.

1.2. On sait aussi que ces valeurs propres sont réelles.

Montrons qu'elles sont positives.

Soit λ une valeurs propres de B et X un vecteur propre associé : $X \neq 0$.

De plus, ${}^t X B X = \lambda {}^t X X = \lambda \|X\|^2 = {}^t X {}^t A A X = {}^t (A X)(A X) = \|A X\|^2$ donc comme $\|X\| \neq 0$, $\lambda \geq 0$.

Les valeurs propres de B sont réelles et positives.

1.3. Calculons le polynôme caractéristique de B :

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la seconde colonne,

$$\chi_B(\lambda) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((4-\lambda)^2 - 4^2) = (2-\lambda)(4-\lambda-4)(4-\lambda+4) = -\lambda(2-\lambda)(8-\lambda)$$

On en déduit que les valeurs propres de B sont 0, 2 et 8. Elles sont bien réelles et positives.

2. Soit \mathcal{C} l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 vérifiant $2x^2 + 4xz + y^2 + 2z^2 = 1$.

2.1. \mathcal{C} est une quadrique. Son équation s'écrit aussi $4x^2 + 8xz + 2y^2 + 4z^2 = 2$.

La matrice canoniquement associée à cette quadrique est alors $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

On reconnaît la matrice B . On a vu que B est diagonalisable et semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Notons (X, Y, Z) les coordonnées dans le nouveau repère obtenu par le changement de base de la diagonalisation.

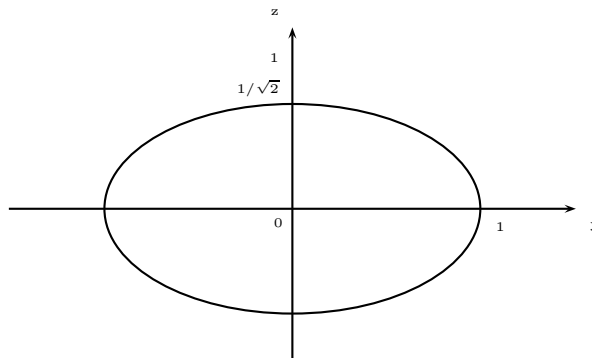
La quadrique \mathcal{C} a alors pour équation $2Y^2 + 8Z^2 = 2$. Ceci est l'équation d'un cylindre.

Il est invariant par toute translation suivant l'axe (OX) .

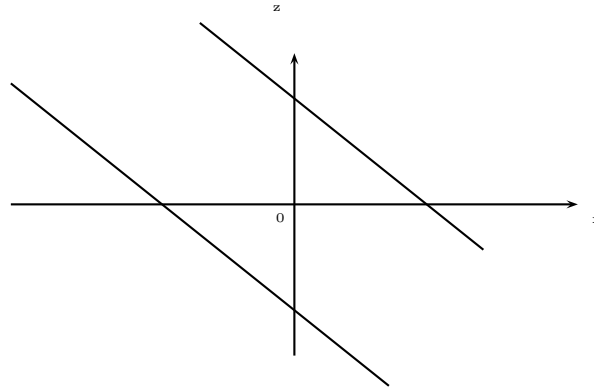
2.2. Trouvons les intersections avec les trois plans coordonnés.

Pour C_1 , on obtient l'équation $y^2 + 2z^2 = 1$. Ceci est une ellipse, d'axe focal (Oy) , avec

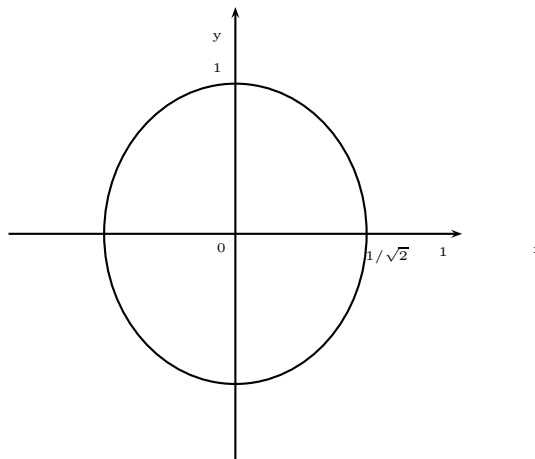
$$a = 1, b = \frac{1}{\sqrt{2}}, c = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } e = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



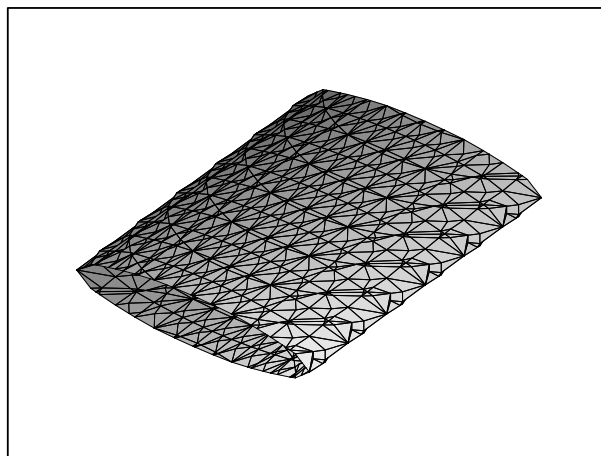
Pour C_2 , on obtient l'équation $2x^2 + 4xz + 2z^2 = 2(x+z)^2 = 1$. Cela conduit à $z = -x + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $z = -x - \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui est l'équation de deux droites parallèles du plan (xOz).



Pour C_3 , on obtient l'équation $2x^2 + y^2 = 1$. Ceci est une ellipse, d'axe focal (Oy), avec $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$. C'est la même courbe que C_1 obtenue par un rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



2.3. Voici enfin le cylindre obtenu à l'aide de Maple.



- 3. 3.1.** Le polynôme $X^3 - 10X^2 + 16X$ se factorise en $X(X - 2)(X - 8)$ et est de degré 3.
La division euclidienne de X^p par $X^3 - 10X^2 + 16X$ s'écrit donc

$$X^p = Q(X)X(X - 2)(X - 8) + aX^2 + bX + c.$$

En évaluant en 0, on obtient immédiatement que $c = 0$.

En évaluant en 2, on obtient que $2^p = 4a + 2b$.

En évaluant en 8, on obtient que $8^p = 64a + 8b$.

On doit alors résoudre le système
$$\begin{cases} 4a + 2b = 2^p \\ 64a + 8b = 8^p \end{cases}.$$

A l'aide des formule de Cramer, on obtient que
$$\begin{cases} a = \frac{8 \cdot 2^p - 2 \cdot 8^p}{-96} \\ b = \frac{4 \cdot 8^p - 64 \cdot 2^p}{-96} \end{cases}$$

soit après simplification, le reste s'écrit donc
$$\boxed{R(X) = aX^2 + bX}$$
 avec

$$\begin{cases} a = \frac{8^p}{48} - \frac{2^p}{12} \\ b = \frac{2 \cdot 2^p}{3} - \frac{8^p}{24} \end{cases}$$

- 3.2.** Le polynôme caractéristique de B est $\chi_B(\lambda) = -\lambda(2 - \lambda)(8 - \lambda) = -(\lambda^3 - 10\lambda^2 + 16\lambda)$.

Par le théorème de Cayley-Hamilton, c'est un polynôme annulateur de B . On en déduit donc que
$$\boxed{B^3 - 10B^2 + 16B = 0_n.}$$

La matrice B n'est pas inversible car 0 est valeur propre donc $\det B = 0$.

- 3.3.** La division euclidienne de la question 3.1 s'écrit $X^p = Q(X)X(X - 2)(X - 8) + aX^2 + bX$.

Substituons B dans cette relation : $B^p = aB^2 + bB$ car $B^3 - 10B^2 + 16B = 0_n$.

$$\boxed{\text{Il existe donc deux réels } a_p = \frac{8^p}{48} - \frac{2^p}{12} \text{ et } b_p = \frac{2 \cdot 2^p}{3} - \frac{8^p}{24} \text{ tels que } B^p = a_p B^2 + b_p B.}$$

- 3.4.** Notons $T_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} B^k$.

On peut écrire $T_p = I_n + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} B^k = I_n + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} a_k B^2 + b_k B$ à l'aide de la question précédente.

D'où $T_p = I_n + \left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} a_k\right) B^2 + \left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} b_k\right) B$.

Le résultat est donc
$$\boxed{\text{une combinaison linéaire de } I_n, B \text{ et } B^2.}$$

Il reste à passer à la limite quand p tend vers $+\infty$.

Décomposons chaque somme :
$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} a_k = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} \frac{8^k}{48} - \frac{2^k}{12} = \frac{1}{48} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} 8^k - \frac{1}{12} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} 2^k$$

On reconnaît l'exponentiel : on obtient donc

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} a_k = \frac{1}{48}(e^8 - 1) - \frac{1}{12}(e^2 - 1)$$

De même,
$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} b_k = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} \frac{2 \cdot 2^k}{3} - \frac{8^k}{24} = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} 2^k - \frac{1}{24} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} 8^k = \frac{2}{3}(e^2 - 1) - \frac{1}{24}(e^8 - 1).$$

Au final, on obtient, $\lim_{p \rightarrow +\infty} T_p = I_n + [\frac{1}{48}(e^8 - 1) - \frac{1}{12}(e^2 - 1)]B^2 + [\frac{2}{3}(e^2 - 1) - \frac{1}{24}(e^8 - 1)]B$.

Or, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 32 \\ 0 & 4 & 0 \\ 32 & 0 & 32 \end{pmatrix}$

donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} T_p = \begin{pmatrix} 1+u & 0 & u \\ 0 & 1+v & 0 \\ u & 0 & 1+u \end{pmatrix}$

avec $u = 32[\frac{1}{48}(e^8 - 1) - \frac{1}{12}(e^2 - 1)] + 4[\frac{2}{3}(e^2 - 1) - \frac{1}{24}(e^8 - 1)] = \frac{1}{2}(e^8 - 1)$

et $v = 4[\frac{1}{48}(e^8 - 1) - \frac{1}{12}(e^2 - 1)] + 2[\frac{2}{3}(e^2 - 1) - \frac{1}{24}(e^8 - 1)] = e^2 - 1$.

On obtient donc la matrice suivante :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} T_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^8 + 1) & 0 & \frac{1}{2}(e^8 - 1) \\ 0 & e^2 & 0 \\ \frac{1}{2}(e^8 - 1) & 0 & \frac{1}{2}(e^8 + 1) \end{pmatrix}$$

PARTIE 2

1. La matrice A s'écrit alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ecrivons les vecteurs obtenus : $u_1 = e_1$ a pour coordonnées $(1, 0, 0, 0)$ puis $u_2 = f(e_1)$ soit $(0, 3, 0, 0)$, $u_3 = f^2(e_1) = f(u_2)$ soit $(3, 0, 6, 0)$ et $u_4 = f^3(e_1) = f(u_3)$ soit $(0, 21, 0, 6)$.

Calculons alors le déterminant de la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) dans la base canonique.

On obtient le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

Ce déterminant est triangulaire donc $D = 3.6.6 \neq 0$.

On en déduit que la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de E .

2. Comme $u_2 = f(e_1)$, $u_3 = f^2(e_1) = f(u_2)$, $u_4 = f^3(e_1) = f(u_3)$, il suffit de calculer $f(u_4)$.

On trouve que $f(u_4)$ a pour coordonnées $(21, 0, 60, 0)$ donc $f(u_4) = 10u_3 - 9u_1$.

On en déduit que f a pour matrice dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calculons le polynôme caractéristique de M : $\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -9 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$.

Developpons le par rapport à sa dernière colonne :

$$\chi_M(\lambda) = 9 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \text{ donc } \chi_M(\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9.$$

4. Les valeurs propres de A sont aussi celle de f et de M .

Il faut donc résoudre $\chi_M(\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9 = 0$.

C'est une équation bicarrée. L'équation $x^2 - 10x + 9 = 0$ a pour racine 1 et 3.

On en déduit que le polynôme caractéristique a pour racine 1, -1, 3 et -3, qui sont donc les valeurs propres de A .

On en déduit aussi que A est diagonalisable car A possède 4 valeurs propres simples.

Il reste à trouver les vecteurs propres en prenant 1 comme première composante non nulle.

Il faut donc résoudre 4 systèmes linéaires.

Pour la valeur propre 1, on résout le système $AX = X$: notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} y = x \\ 3x + 2z = y \\ 2y + 3t = z \\ z = t \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} y = x \\ z = -y \\ t = z \\ z = t \end{cases} : \text{on trouve comme vecteur propre } (1,1,-1,-1). \text{ Notons le } g_1.$$

Pour la valeur propre -1, on trouve de même comme vecteur propre (1,-1,-1,1). Notons le g_2 .

Pour la valeur propre 3, on trouve comme vecteur propre (1,3,3,1). Notons le g_3 .

Pour la valeur propre -3, on trouve comme vecteur propre (1,-3,3,-1). Notons le g_4 .

5. Considérons alors la base (g_3, g_2, g_1, g_4) de vecteurs propres.

La matrice de passage de la base canonique à cette base est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

La formule de changement de base sur l'endomorphisme f s'écrit alors $D = P^{-1}AP$

$$\text{avec } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Vérifions alors que $K = P^{-1}$. Calculons alors KP . On trouve bien I_4 .

$$\text{On a donc le résultat demandé avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Notons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ r(t) \end{pmatrix}$:

On doit donc résoudre le système $X'(t) = AX(t)$.

Utilisons la diagonalisation de A : $D = P^{-1}AP$.

On effectue le changement de fonction inconnue défini par $X(t) = PY(t)$. On a

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}APY(t) = DY(t)$$

$$\text{Notons alors } Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \\ q(t) \end{pmatrix} : \begin{cases} u'(t) = 3u(t) \\ v'(t) = -v(t) \\ w'(t) = w(t) \\ q'(t) = -3q(t) \end{cases}.$$

On résout chaque équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

$$\text{Il existe alors 4 réels, a,b,c et d tels que } \begin{cases} u(t) = ae^{3t} \\ v(t) = be^{-t} \\ w(t) = ce^t \\ q(t) = de^{-3t} \end{cases}.$$

On en déduit ensuite $X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} ae^{3t} + be^{-t} + ce^t + de^{-3t} \\ 3ae^{3t} - be^{-t} + ce^t - 3de^{-3t} \\ 3ae^{3t} - be^{-t} - ce^t + 3de^{-3t} \\ ae^{3t} + be^{-t} - ce^t - de^{-3t} \end{pmatrix}$, avec a, b, c, d réels.

PARTIE 3

1. On montre aisément que g est une application linéaire, grâce à la linéarité de la dérivation.

Trouvons l'image de la base canonique de E par g :

$$g(1) = nX \in E, g(X) = (n-1)X^2 + 1 \in E, \dots, g(X^k) = (n-k)X^{k+1} + kX^k \in E, \dots$$

$$g(X^n) = nX^{n-1} \in E.$$

L'image par g de la base de E est une famille de E : g est donc un endomorphisme de E .

Comme on a l'image d'une base, on en déduit la matrice de g dans la base canonique de E :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 2 & 0 & n \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On reconnaît la matrice A

2. 2.1. On se place sur $] -1, 1[$. On a une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène qui s'écrit alors

$$y'(x) + \frac{\lambda - nx}{x^2 - 1} y(x) = 0$$

Trouvons alors une primitive de $h(x) = \frac{\lambda - nx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda - nx}{x-1} - \frac{\lambda - nx}{x+1} \right)$ d'après l'indication donnée.

En écrivant $\frac{\lambda - nx}{x-1} = -n + \frac{\lambda - n}{x-1}$, $x \mapsto \frac{\lambda - nx}{x-1}$ a pour primitive

$$x \mapsto -nx + (\lambda - n) \ln |x - 1| = -nx + (\lambda - n) \ln(1 - x)$$

De même, $\frac{\lambda - nx}{x+1} = -n + \frac{\lambda + n}{x+1}$: $x \mapsto \frac{\lambda - nx}{x+1}$ a pour primitive

$$x \mapsto -nx + (\lambda + n) \ln |x + 1| = -nx + (\lambda + n) \ln(1 + x)$$

On en déduit que h a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{2} ((\lambda - n) \ln(1 - x) - (\lambda + n) \ln(1 + x))$.

On sait alors que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle \mathcal{E}_λ est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par

$$\varphi : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{2}((\lambda - n) \ln(1 - x) - (\lambda + n) \ln(1 + x))\right) = (1 - x)^{\frac{n-\lambda}{2}} (1 + x)^{\frac{\lambda+n}{2}}$$

donc les solutions de \mathcal{E}_λ sont les $x \mapsto A(1 - x)^{\frac{n-\lambda}{2}} (1 + x)^{\frac{\lambda+n}{2}}$, avec A réel.

- 2.2. Comme toute solution de \mathcal{E}_λ est proportionnelle à φ , il existe des solutions polynômiales non nulles SSI φ est un polynôme. Or, $\varphi(x) = (1 - x)^{\frac{n-\lambda}{2}} (1 + x)^{\frac{\lambda+n}{2}}$, de la forme $(1 - x)^a (1 + x)^b$. Or $(1 - x)^a (1 + x)^b$ est un polynôme SSI a et b sont deux naturels.

On en déduit que φ est un polynôme SSI $\frac{n-\lambda}{2}$ et $\frac{\lambda+n}{2}$ sont deux entiers naturels, soit encore

$$\lambda = 2p - n \text{ avec } p \text{ un entier compris entre } 0 \text{ et } n.$$

3. Pour l'endomorphisme g , λ est valeur propre associée au vecteur propre P de E SSI $g(P) = \lambda P$ soit encore

$$nXP(X) - (X^2 - 1)P'(X) = \lambda P(X)$$

Identifions alors polynôme et fonction polynômiale et plaçons nous sur $]1, 1[$: P est solution de \mathcal{E}_λ .

Comme P est un polynôme non nul, on en déduit que $\lambda = 2p - n$ avec p un entier compris entre 0 et n et que $P(X)$ est proportionnel à $(1 - X)^{n-p} (1 + X)^p$.

Réciproquement, on vérifie qu'un tel P est un polynôme non nul de E et que $g(P) = (2p - n)P$.

On en déduit que les valeurs propres de g sont les $\lambda = 2p - n$ avec p un entier compris entre 0 et n et que les espaces propres associés sont des droites engendrés par $(1 - X)^{n-p}(1 + X)^p$.

4. A l'aide des questions précédentes, on en déduit que A est diagonalisable car g l'est : g a $(n+1)$ valeurs propres distinctes et comme E est de dimension $n + 1$, elles sont toutes simples.
5. Comme A est diagonalisable, son déterminant est égale au produit de ses valeurs propres avec leur

multiplicité : $\det A = \prod_{p=0}^n (2p - n)$

PARTIE 4

1. L'équation différentielle \mathcal{F} est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Son équation caractéristique est $r^2 = 1$, de racines 1 et -1 .

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\text{Vect}(x \mapsto e^x, \mapsto e^{-x}) = \text{Vect}(\text{ch}, \text{sh})$.

y_1 et y_2 sont alors combinaison linéaire de ch et sh .

Ajoutons alors les conditions initiales : on trouve que $y_1 = \text{ch}$ et $y_2 = \text{sh}$.

2. Comme $G = \text{Vect}(\mathcal{G})$, (\mathcal{G}) engendre G .

Il reste à montrer que (\mathcal{G}) est une famille libre.

Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille de réels tels que $\sum_{i=0}^n \lambda_i g_i = 0$:

Pour tout réel x , $\sum_{i=0}^n \lambda_i \text{ch}(x)^{n-i} \text{sh}(x)^i = 0$, noté (*).

En particulier, en $x = 0$, il ne reste que le λ_0 qui est donc nul. On peut alors mettre $\text{sh}(x)$ est facteur dans la relation (*) puis simplifier par $\text{sh}(x)$: si $x \neq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i \text{ch}(x)^{n-i} \text{sh}(x)^{i-1} = 0$.

On fait tendre x vers 0, on trouve $\lambda_1 = 0 \dots$ et on continue le raisonnement.

Les coefficients $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont donc tous nuls et la famille est donc une base de G .

3. **3.1.** Δ est la dérivation des fonction et est bien sur linéaire.

Trouvons l'image de la base (\mathcal{G}) par Δ : pour tout réel x ,

$$\Delta(g_0)(x) = n(\text{ch}x)^{n-1}(\text{sh}x) : \Delta(g_0) \in G.$$

Si $1 \leq k \leq n - 1$,

$$\Delta(g_k)(x) = (n_k)(\text{ch}x)^{n-k-1}(\text{sh}x)^{k+1} + k(\text{ch}x)^{n-k+1}(\text{sh}x)^{k-1} = (n-k)g_{k+1}(x) + kg_{k-1}(x) \text{ donc } \Delta(g_k) \in G.$$

Enfin, $\Delta(g_n)(x) = n(\text{sh}x)^{n-1}(\text{ch}x) : \Delta(g_n) \in G$.

L'image par Δ de la base de G est un famille de G :

$\delta = \Delta|_G$ est donc un endomorphisme de G .

3. **3.2.** λ est une valeur propres de Δ et h est un vecteur propre associé SSI $\Delta(h) = \lambda h$ SSI $h' = \lambda h$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

On sait que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par $x \mapsto e^{\lambda x}$.

On en déduit que : tout réel λ est valeur propre de Δ et que le sev propre associé est $\text{Vect}(x \mapsto e^{\lambda x})$.

3.3. Montrons que tout élément de (\mathcal{G}) est combinaison linéaire d'éléments de (\mathcal{F}) :

$$\text{Pour tout } x \text{ réel, } g_k(x) = (\text{ch } x)^{n-k} (\text{sh } x)^k = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^k$$

$$g_k(x) = \frac{1}{2^n} (e^x + e^{-x})^{n-k} (e^x - e^{-x})^k = \frac{e^{-nx}}{2^n} (e^{2x} + 1)^{n-k} (e^{2x} - 1)^k.$$

Si on développe $(e^{2x} + 1)^{n-k} (e^{2x} - 1)^k$ à l'aide du binôme de Newton, on obtient une combinaison linéaire de e^{2mx} pour m allant de 0 à n .

On en déduit que g_k s'écrit comme combinaison linéaire des $x \mapsto e^{-nx} e^{2mx}$, soit des φ_m pour m allant de 0 à n : (\mathcal{F}) engendre G .

De plus, (\mathcal{F}) est de cardinal au maximum $(n+1)$ et G est de dimension $(n+1)$: (\mathcal{F}) est donc une base de G .

3.4. On remarque que $\delta(\varphi_m) = (2m - n)\varphi_m$.

Les (φ_m) (applications non nulles) sont donc des vecteurs propres de δ pour les valeurs propres $2m - n$ pour m variant de 0 à n .

δ a donc $(n+1)$ valeurs propres distinctes et comme $\dim G = n+1$, elles sont toutes simples et il n'y en a pas d'autres.

Les valeurs propres de δ sont les $2m - n$ pour m variant de 0 à n

et l'espace propre associé à $2m - n$ est donc la droite $\text{Vect}(\varphi_m)$.

3.5. On a vu que $\delta(g_0) = ng_1$ et si $1 \leq k \leq n - 1$, $\delta(g_k)(x) = (n - k)g_{k+1} + kg_{k-1}$

Enfin, $\delta(g_n) = ng_{n-1}$

On obtient la matrice de δ dans la base (\mathcal{G}) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 2 & 0 & n \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On reconnaît la matrice A

3.6. On retrouve alors que

A est diagonalisable et que les valeurs propres de A sont les $2m - n$ pour m variant de 0 à n .