

Partie I

1°) La fonction G de $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $G(x, y) = \text{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{P}$, comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On calcule successivement : $\forall (x, y) \in \mathcal{P}$,

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = -\frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\Delta G(x, y) = 0.$$

La fonction G est harmonique sur $\mathcal{P}$.

2°) Si φ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, alors, par composition, $F : (x, y) \mapsto \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{P}$; donc F est harmonique sur $\mathcal{P}$ si et seulement si : $\forall (x, y) \in \mathcal{P}, \Delta F(x, y) = 0$.

On calcule successivement : $\forall (x, y) \in \mathcal{P}$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y} \varphi'\left(\frac{x}{y}\right); \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2} \varphi'\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{y^2} \varphi''\left(\frac{x}{y}\right); \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2x}{y^3} \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^4} \varphi''\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$\Delta F(x, y) = \frac{2x}{y^3} \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{1}{y^2} + \frac{x^2}{y^4}\right) \varphi''\left(\frac{x}{y}\right).$$

Donc F est harmonique sur $\mathcal{P}$ si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+, 2\frac{x}{y} \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) + \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) \varphi''\left(\frac{x}{y}\right) = 0$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, 2t \varphi'(t) + (1 + t^2) \varphi''(t) = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = \lambda e^{-\ln(1+t^2)} = \frac{\lambda}{1+t^2}$$

$$\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \lambda \text{Arctan } t + \mu.$$

Les applications φ cherchées sont de la forme : $t \mapsto \lambda \text{Arctan } t + \mu, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

3°) L'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $t \mapsto \text{Arctan } t + \text{Arctan } \frac{1}{t}$ est impaire, ainsi que l'application sgn , donc il suffit d'établir l'égalité demandée dans le cas $t > 0$.

Dans ce cas, en notant $\alpha = \text{Arctan } t$, on a : $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et $\tan \alpha = t$, donc $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{t}$, et comme $\frac{\pi}{2} - \alpha$ est aussi dans $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a aussi : $\frac{\pi}{2} - \alpha = \text{Arctan } \frac{1}{t}$. Donc, si $t > 0$, $\text{Arctan } t + \text{Arctan } \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$.

On a bien :

$$\text{pour tout réel } t \text{ non nul, } \text{Arctan } t + \text{Arctan } \frac{1}{t} = \text{sgn}(t) \frac{\pi}{2}.$$

4°) $\text{Arg}(z)$ désigne l'argument principal du nombre complexe non nul z . On a donc, si $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathcal{P} : \text{Arg}(z) \in]0, \pi[$, et

$$\begin{cases} x = |z| \cos(\operatorname{Arg}(z)) \\ y = |z| \sin(\operatorname{Arg}(z)) \end{cases}$$

– Si $x > 0$, alors $\operatorname{Arg}(z) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\frac{y}{x} = \tan(\operatorname{Arg}(z))$, donc

$$\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2} - G(x, y).$$

– Si $x < 0$, alors $\operatorname{Arg}(z) \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ et $\frac{y}{x} = \tan(\operatorname{Arg}(z)) = \tan(\operatorname{Arg}(z) - \pi)$, avec $\operatorname{Arg}(z) - \pi \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ donc $\operatorname{Arg}(z) - \pi = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$, d'où

$$\operatorname{Arg}(z) = \pi + \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2} - G(x, y).$$

– Si $x = 0$, alors $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$, et $G(x, y) = 0$, donc la formule est encore valable.

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{P}, \quad G(x, y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arg}(x + iy).$$

5°) – Si $x > 0$, alors $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2}$ car $\frac{x}{y}$ tend vers $+\infty$.

– Si $x < 0$, alors $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{\pi}{2}$ car $\frac{x}{y}$ tend vers $-\infty$.

– Si $x = 0$, alors $G(x, y) = 0$, et $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} G(x, y) = 0$

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

Nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y g(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt$: soit $(x, y) \in \mathcal{P}$ fixé; la fonction $t \mapsto \frac{y g(t)}{(x-t)^2 + y^2}$ est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (car $(x-t)^2 + y^2 \geq y^2 > 0$), et ses restrictions à ces intervalles se prolongent par continuité en 0.

De plus,

$$\frac{y g(t)}{(x-t)^2 + y^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi y}{2t^2}, \text{ et l'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ est convergente.}$$

Le critère d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives permet de conclure que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{y g(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt$ est convergente.

On a de même $\frac{y g(t)}{(x-t)^2 + y^2} \underset{t \rightarrow -\infty}{\sim} -\frac{\pi y}{2t^2}$, et on peut conclure également que l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{y g(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt$ converge.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y g(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt \text{ converge.}}$$

Calcul :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{y g(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt &= \frac{\pi}{2} y \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t-x)^2 + y^2} dt = \frac{\pi}{2} y \left[\frac{1}{y} \operatorname{Arctan}\left(\frac{t-x}{y}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) \right] \\ \int_{-\infty}^0 \frac{y g(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt &= -\frac{\pi}{2} y \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(t-x)^2 + y^2} dt = -\frac{\pi}{2} y \left[\frac{1}{y} \operatorname{Arctan}\left(\frac{t-x}{y}\right) \right]_{-\infty}^0 \\ &= -\frac{\pi}{2} \left[-\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{2} \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

On a donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y g(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt = \pi \operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{y} \right).$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{P}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y g(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt = \pi G(x, y).}$$

Partie II

1°) Notons C_α la conique d'équation $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha-1} = 1$, $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$:
Nature de C_α :

α	$-\infty$	0	1	$+\infty$
α	—	+	+	
$\alpha - 1$	—	—	+	
Nature	$\emptyset$	Hyperbole	Ellipse	

Si $\alpha > 1$, l'ellipse a pour centre O , pour demi-longueur du grand axe (porté par Ox) $a = \sqrt{\alpha}$, pour demi-longueur du petit axe $b = \sqrt{\alpha-1}$.

La distance focale c vérifie $c^2 = a^2 - b^2 = 1$, donc $c = 1$, et les foyers sont les points $F'(-1, 0)$ et $F(1, 0)$.

Si $0 < \alpha < 1$, l'hyperbole a pour centre O , pour axe transverse Ox ; son équation est de la forme $\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$, avec $a' = \sqrt{\alpha}$, et $b' = \sqrt{1-\alpha}$.

La distance focale c' vérifie $c'^2 = a'^2 + b'^2 = 1$, donc $c' = 1$, et les foyers sont encore F et F' .

Les coniques de la famille $\mathcal{F}$ ($\alpha \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$) ont mêmes foyers.

2°) $(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ étant donné, avec $x_0 \neq 0$, la fonction $\psi : \alpha \mapsto \frac{x_0^2}{\alpha} + \frac{y_0^2}{\alpha-1} - 1$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, et est somme de fonctions décroissantes sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$, et $]1, +\infty[$. On a donc le tableau suivant :

α	$-\infty$	0	1	$+\infty$
ψ	$-1 \searrow$	$-\infty \parallel +\infty \searrow$	$-\infty \parallel +\infty \searrow$	-1

La conique C_α de la famille $\mathcal{F}$ passe par $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$, avec $x_0 \neq 0$, si et seulement si α vérifie $\psi(\alpha) = 0$ (avec $\alpha \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$); l'examen du tableau de variations montre qu'il y a exactement deux telles valeurs (ψ est continue), l'une dans $]0, 1[$ et l'autre dans $]1, +\infty[$.

Pour tout point $(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$, avec $x_0 \neq 0$, il passe exactement une ellipse et une hyperbole de la famille $\mathcal{F}$.

L'équation $\psi(\alpha) = 0$ équivaut à $\alpha(\alpha-1) = (\alpha-1)x_0^2 + \alpha y_0^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha(1+x_0^2+y_0^2) + x_0^2 = 0$; on a donc

$$\boxed{\begin{cases} \alpha_1 \alpha_2 = x_0^2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 + x_0^2 + y_0^2 \end{cases}}$$

Si $x_0 = 0$, alors une conique de la famille $\mathcal{F}$ passe par le point $(0, y_0)$ ($y_0 > 0$) si et seulement si il existe un réel α de $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ vérifiant

$$\frac{y_0^2}{\alpha-1} = 1 \Leftrightarrow \alpha-1 = y_0^2 \Leftrightarrow \alpha = 1 + y_0^2 > 1.$$

Pour tout point $(0, y_0) \in \mathcal{P}$, il passe exactement une conique de la famille $\mathcal{F}$; il s'agit d'une ellipse.

3°) Soit $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$, avec $x_0 \neq 0$, et $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}$ les coniques de $\mathcal{F}$ passant par M_0 .
La tangente en M_0 à C_{α_1} a pour équation cartésienne

$$\frac{x x_0}{\alpha_1} + \frac{y y_0}{\alpha_1 - 1} = 1.$$

De même, la tangente en M_0 à C_{α_2} a pour équation cartésienne

$$\frac{x x_0}{\alpha_2} + \frac{y y_0}{\alpha_2 - 1} = 1.$$

Vérifions l'orthogonalité de ces deux droites en faisant le produit scalaire des vecteurs normaux :

$$\frac{x_0}{\alpha_1} \frac{x_0}{\alpha_2} + \frac{y_0}{\alpha_1 - 1} \frac{y_0}{\alpha_2 - 1} = \frac{x_0^2}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{y_0^2}{\alpha_1 \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) + 1} = \frac{x_0^2}{x_0^2} + \frac{y_0^2}{x_0^2 - (1 + x_0^2 + y_0^2) + 1} = 1 - 1 = 0.$$

Les tangentes en un point commun à deux coniques de $\mathcal{F}$ sont orthogonales.

4°) La fonction $x : (u, v) \mapsto \operatorname{ch} u \cos v$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, et on a immédiatement :
 $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u, v) = \operatorname{ch} u \cos v, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}(u, v) = -\operatorname{ch} u \cos v,$
donc $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \Delta x(u, v) = 0$, et la fonction x est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

De même, la fonction $y : (u, v) \mapsto \operatorname{sh} u \sin v$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, et $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = y, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = -y$, donc $\Delta y = 0$;
la fonction y est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Les fonctions x et y sont harmoniques sur $\mathbb{R}^2$.

La matrice jacobienne de $H : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ au point (u, v) s'écrit

$$J_H(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} u \cos v & -\operatorname{ch} u \sin v \\ \operatorname{ch} u \sin v & \operatorname{sh} u \cos v \end{pmatrix}.$$

Le jacobien de H en (u, v) est

$$\begin{aligned} |J_H|(u, v) &= \begin{vmatrix} \operatorname{sh} u \cos v & -\operatorname{ch} u \sin v \\ \operatorname{ch} u \sin v & \operatorname{sh} u \cos v \end{vmatrix} = \operatorname{sh}^2 u \cos^2 v + \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v = \operatorname{sh}^2 u \cos^2 v + (1 + \operatorname{sh}^2 u) \sin^2 v \\ &= \operatorname{sh}^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \sin^2 v = \operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v. \end{aligned}$$

On a donc $|J_H|(u, v) = 0 \iff \operatorname{sh} u = 0$ et $\sin v = 0 \iff u = 0$ et $v = 0 \pmod{\pi}$.

Le jacobien de H s'annule aux points $(0, k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

5°) Image par H de la droite $u = u_0$: il s'agit de la courbe paramétrée $\begin{cases} x = \operatorname{ch} u_0 \cos v \\ y = \operatorname{sh} u_0 \sin v \end{cases}, \quad v \in \mathbb{R}.$
– si $u_0 \neq 0$, on reconnaît une ellipse de centre O , de demi-longueurs d'axes $\operatorname{ch} u_0$ et $|\operatorname{sh} u_0|$.

Son équation cartésienne est $\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_0} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_0} = 1 \iff \frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_0} + \frac{y^2}{\operatorname{ch}^2 u_0 - 1} = 1$; l'ellipse en question est donc $C_{\operatorname{ch}^2 u_0}$.

– si $u_0 = 0$, le paramétrage s'écrit $\begin{cases} x = \cos v \\ y = 0 \end{cases}, \quad v \in \mathbb{R}$, et on reconnaît le segment d'extrémités $(-1, 0)$ et $(1, 0)$, c'est-à-dire $[F'F]$.

H transforme la droite d'équation $u = u_0$ en l'ellipse $C_{\operatorname{ch}^2 u_0}$ si $u_0 \neq 0$, en le segment $[F'F]$ sinon.

Image par H de la droite $v = v_0$: il s'agit de la courbe paramétrée $\begin{cases} x = \cos v_0 \operatorname{ch} u \\ y = \sin v_0 \operatorname{sh} u \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R}.$

– si $v_0 \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$, on reconnaît une branche d'hyperbole d'équation cartésienne $\frac{x^2}{\cos^2 v_0} - \frac{y^2}{\sin^2 v_0} = 1 \iff$

$\frac{x^2}{\cos^2 v_0} + \frac{y^2}{\cos^2 v_0 - 1} = 1$; l'hyperbole en question est donc $C_{\cos^2 v_0}$; la branche parcourue est celle située dans le demi-plan $x \cos v_0 > 0$.

- si $v_0 = 0 \pmod{\pi}$, le paramétrage s'écrit $\begin{cases} x = \varepsilon \operatorname{ch} u \\ y = 0 \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$ ($\varepsilon \in \{-1, 1\}$ fixé). On obtient les demi-droites $[Fx]$ (cas $\varepsilon = 1$, c'est-à-dire $v_0 = 0 \pmod{2\pi}$) et $[F'x']$ (cas $v_0 = \pi \pmod{2\pi}$).
- si $v_0 = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, le paramétrage s'écrit $\begin{cases} x = 0 \\ y = \varepsilon \operatorname{sh} u \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$, ($\varepsilon \in \{-1, 1\}$ fixé) et on obtient l'axe des ordonnées.

H transforme la droite d'équation $v = v_0$ en :

- la branche de l'hyperbole $C_{\cos^2 v_0}$ située dans le demi-plan $x \cos v_0 > 0$ si $v_0 \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$;
- la demi-droite $[Fx]$ si $v_0 = 0 \pmod{2\pi}$;
- la demi-droite $[F'x']$ si $v_0 = \pi \pmod{2\pi}$;
- l'axe $y'Oy$ si $v_0 = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Recherche des images réciproques par H des coniques C_α , et des axes $x'Ox$, $y'Oy$:

Soit C_α la conique d'équation $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha-1} = 1$ ($\alpha \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$).

$$H^{-1}(C_\alpha) = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\operatorname{ch}^2 u \cos^2 v}{\alpha} + \frac{\operatorname{sh}^2 u \sin^2 v}{\alpha-1} = 1 \right\}.$$

– Si $\alpha > 1$, alors soit u_0 l'unique réel strictement positif tel que $\operatorname{ch} u_0 = \sqrt{\alpha}$. On cherche les couples (u, v) tels que $\frac{\operatorname{ch}^2 u \cos^2 v}{\operatorname{ch}^2 u_0} + \frac{\operatorname{sh}^2 u \sin^2 v}{\operatorname{sh}^2 u_0} = 1 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{ch}^2 u \cos^2 v}{\operatorname{ch}^2 u_0} + \frac{\operatorname{sh}^2 u \sin^2 v}{\operatorname{sh}^2 u_0} = \cos^2 v + \sin^2 v$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\operatorname{ch}^2 u}{\operatorname{ch}^2 u_0} - 1 \right) \cos^2 v + \left(\frac{\operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{sh}^2 u_0} - 1 \right) \sin^2 v = 0.$$

Si $|u| < u_0$, alors $\begin{cases} \operatorname{ch}^2 u < \operatorname{ch}^2 u_0 \\ \operatorname{sh}^2 u < \operatorname{sh}^2 u_0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \frac{\operatorname{ch}^2 u}{\operatorname{ch}^2 u_0} - 1 > 0 \\ \frac{\operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{sh}^2 u_0} - 1 > 0 \end{cases}$ et l'égalité précédente implique $\cos v = \sin v = 0$,

ce qui est impossible.

De même, $|u| > u_0$ est impossible, car alors $\frac{\operatorname{ch}^2 u}{\operatorname{ch}^2 u_0} - 1$ et $\frac{\operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{sh}^2 u_0} - 1$ sont tous deux < 0 .

On a donc nécessairement $u = \pm u_0$, et dans ces conditions tout réel v convient.

En notant ϕ la réciproque de la restriction de ch à $\mathbb{R}_+$, on peut conclure :

$$\text{si } \alpha > 1, H^{-1}(C_\alpha) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u = \pm \phi(\sqrt{\alpha}), v \in \mathbb{R}\}$$

– Si $\alpha \in]0, 1[$, alors soit $v_0 = \operatorname{Arccos} \sqrt{\alpha}$. $v_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et on cherche les couples (u, v) tels que

$$\frac{\operatorname{ch}^2 u \cos^2 v}{\cos^2 v_0} - \frac{\operatorname{sh}^2 u \sin^2 v}{\sin^2 v_0} = 1 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{ch}^2 u \cos^2 v}{\cos^2 v_0} - \frac{\operatorname{sh}^2 u \sin^2 v}{\sin^2 v_0} = \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\cos^2 v}{\cos^2 v_0} - 1 \right) \operatorname{ch}^2 u - \left(\frac{\sin^2 v}{\sin^2 v_0} - 1 \right) \operatorname{sh}^2 u = 0.$$

Si v vérifie $-v_0 < v < v_0 \pmod{2\pi}$ ou $\pi - v_0 < v < \pi + v_0 \pmod{2\pi}$, alors $\begin{cases} |\cos v| > |\cos v_0| \\ |\sin v| < |\sin v_0| \end{cases}$ donc

$$\begin{cases} \frac{\cos^2 v}{\cos^2 v_0} - 1 > 0 \\ \frac{\sin^2 v}{\sin^2 v_0} - 1 < 0 \end{cases} \text{ et l'égalité précédente implique } \operatorname{ch} u = \operatorname{sh} u = 0, \text{ ce qui est impossible.}$$

De même, $v_0 < v < \pi - v_0 \pmod{2\pi}$ ou $-\pi - v_0 < v < -v_0 \pmod{2\pi}$ sont impossibles, car alors

$$\begin{cases} \frac{\cos^2 v}{\cos^2 v_0} - 1 < 0 \\ \frac{\sin^2 v}{\sin^2 v_0} - 1 > 0 \end{cases}.$$

On a donc nécessairement $v = \pm \operatorname{Arccos} \sqrt{\alpha} \pmod{2\pi}$, ou $v = \pi \pm \operatorname{Arccos} \sqrt{\alpha} \pmod{2\pi}$ et dans ces conditions tout réel u convient. En conclusion :

$$\text{si } \alpha \in]0, 1[, H^{-1}(C_\alpha) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, v \in \{\operatorname{Arccos} \sqrt{\alpha}, -\operatorname{Arccos} \sqrt{\alpha}, \pi - \operatorname{Arccos} \sqrt{\alpha}, \pi + \operatorname{Arccos} \sqrt{\alpha}\} \pmod{2\pi}\}.$$

$$- H^{-1}(x'Ox) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, \operatorname{sh} u \sin v = 0\} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u = 0 \text{ ou } v = 0 \pmod{\pi}\}.$$

$$- H^{-1}(y'Oy) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, \operatorname{ch} u \cos v = 0\} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, v = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\}.$$

Montrons que : $\forall (x_0, y_0) \in \mathcal{P}, \exists (u_0, v_0) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[$ unique, $H(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$, ce qui montrera que la restriction de H à $]0, +\infty[\times]0, \pi[$ est une bijection de $]0, +\infty[\times]0, \pi[$ sur $\mathcal{P}$.

– si $x_0 \neq 0$, alors par (x_0, y_0) il passe exactement une ellipse C_{α_1} et une hyperbole C_{α_2} de la famille $\mathcal{F}$ ($\alpha_1 > 1$ et $0 < \alpha_2 < 1$).

D'après l'étude précédente, il existe un unique réel strictement positif u_0 tel que l'image réciproque $H^{-1}(C_{\alpha_1})$ soit la droite d'équation $u = u_0$.

De même, il existe un unique réel v_0 de $]0, \pi[$ tel que l'image réciproque $H^{-1}(C_{\alpha_2}^+)$ de la branche de C_{α_2} contenant (x_0, y_0) soit la droite d'équation $v = v_0$: c'est $v_0 = \text{Arccos } \sqrt{\alpha_2}$ si $x_0 > 0$, et $v_0 = \pi - \text{Arccos } \sqrt{\alpha_2}$ si $x_0 < 0$.

Donc, $H^{-1}(x_0, y_0) = H^{-1}(C_{\alpha_1} \cap C_{\alpha_2}^+) = H^{-1}(C_{\alpha_1}) \cap H^{-1}(C_{\alpha_2}^+) = \{(u_0, v_0)\}$

– si $x_0 = 0$, alors le système d'inconnues $(u, v) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[$:

$$\begin{cases} \text{ch } u \cos v = 0 \\ \text{sh } u \sin v = y_0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} v = \frac{\pi}{2} \\ \text{sh } u = y_0 \end{cases}$$

et possède une solution unique dans $]0, +\infty[\times]0, \pi[$, qui est $(\kappa(y_0), \frac{\pi}{2})$, où κ désigne la réciproque de la fonction sh.

La restriction de H à $]0, +\infty[\times]0, \pi[$ est une bijection de $]0, +\infty[\times]0, \pi[$ sur $\mathcal{P}$.

6°) En supposant que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, $f \circ H$ est alors de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et on a successivement (le théorème de Schwarz s'applique) : $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f \circ H}{\partial u}(u, v) = \text{sh } u \cos v \frac{\partial f}{\partial x}(H(u, v)) + \text{ch } u \sin v \frac{\partial f}{\partial y}(H(u, v));$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f \circ H}{\partial u^2}(u, v) &= \text{ch } u \cos v \frac{\partial f}{\partial x}(H(u, v)) + \text{sh}^2 u \cos^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(H(u, v)) + \text{sh } u \cos v \text{ch } u \sin v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(H(u, v)) \\ &\quad + \text{sh } u \sin v \frac{\partial f}{\partial y}(H(u, v)) + \text{ch } u \sin v \text{sh } u \cos v \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(H(u, v)) + \text{ch}^2 u \sin^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(H(u, v)) \\ &= \text{ch } u \cos v \frac{\partial f}{\partial x}(H(u, v)) + \text{sh } u \sin v \frac{\partial f}{\partial y}(H(u, v)) + \text{sh}^2 u \cos^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(H(u, v)) \\ &\quad + \text{ch}^2 u \sin^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(H(u, v)) + 2 \text{sh } u \text{ch } u \sin v \cos v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(H(u, v)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f \circ H}{\partial v}(u, v) = -\text{ch } u \sin v \frac{\partial f}{\partial x}(H(u, v)) + \text{sh } u \cos v \frac{\partial f}{\partial y}(H(u, v));$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f \circ H}{\partial v^2}(u, v) &= -\text{ch } u \cos v \frac{\partial f}{\partial x}(H(u, v)) + \text{ch}^2 u \sin^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(H(u, v)) - \text{ch } u \sin v \text{sh } u \cos v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(H(u, v)) \\ &\quad - \text{sh } u \sin v \frac{\partial f}{\partial y}(H(u, v)) + \text{sh } u \cos v (-\text{ch } u \sin v) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(H(u, v)) + \text{sh}^2 u \cos^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(H(u, v)) \\ &= -\text{ch } u \cos v \frac{\partial f}{\partial x}(H(u, v)) - \text{sh } u \sin v \frac{\partial f}{\partial y}(H(u, v)) + \text{ch}^2 u \sin^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(H(u, v)) \\ &\quad + \text{sh}^2 u \cos^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(H(u, v)) - 2 \text{sh } u \text{ch } u \sin v \cos v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(H(u, v)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(f \circ H)(u, v) &= (\text{sh}^2 u \cos^2 v + \text{ch}^2 u \sin^2 v) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(H(u, v)) + (\text{ch}^2 u \sin^2 v + \text{sh}^2 u \cos^2 v) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(H(u, v)) \\ &= |J_H|(u, v) \Delta f(H(u, v)). \end{aligned}$$

Si f est harmonique sur $\mathcal{P}$, alors par composition, $f \circ H$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[\times]0, \pi[$, et le calcul précédent montre qu'alors $\Delta(f \circ H) = 0$ sur $]0, +\infty[\times]0, \pi[$. Donc :

Si f est harmonique sur $\mathcal{P}$, la fonction $f \circ H$ est harmonique sur $]0, +\infty[\times]0, \pi[$.

Partie III

1°) Dans l'intégrale $\iint_{D_r} f(u, v) \, du \, dv$, faisons le changement de variables défini par $\begin{cases} u = a + \rho \cos \theta \\ v = b + \rho \sin \theta \end{cases}$ (coordonnées polaires de pôle (a, b) .)

Le jacobien est ρ , et le disque fermé de centre (a, b) et de rayon r est obtenu pour $\begin{cases} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$.

On a donc

$$\begin{aligned} \iint_{D_r} f(u, v) \, du \, dv &= \iint_{[0, r] \times [0, 2\pi]} f(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta) \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_0^r \left(\rho \int_0^{2\pi} f(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta) \, d\theta \right) \, d\rho \\ &= \int_0^r \rho \, 2\pi \, m(a, b, \rho) \, d\rho = 2\pi \int_0^r \rho \, m(a, b, \rho) \, d\rho. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall r \in]0, b[, \iint_{D_r} f(u, v) \, du \, dv = 2\pi \int_0^r \rho \, m(a, b, \rho) \, d\rho.}$$

En employant la formule de Green-Riemann avec $P = -\frac{\partial f}{\partial y}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\mathcal{D} = D_r$, on obtient :

$$\iint_{D_r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, v) \right) \, du \, dv = \int_{\Gamma_r^+} -\frac{\partial f}{\partial y}(u, v) \, du + \frac{\partial f}{\partial x}(u, v) \, dv$$

où Γ_r^+ est le cercle de centre (a, b) de rayon r parcouru dans le sens direct;

en le paramétrant par $\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, l'orientation étant celle des θ croissants, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r^+} -\frac{\partial f}{\partial y}(u, v) \, du + \frac{\partial f}{\partial x}(u, v) \, dv &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) (-r \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial x}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) (r \cos \theta) \right) \, d\theta \\ &= r \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \sin \theta \right) \, d\theta \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\iint_{D_r} \Delta f(u, v) \, du \, dv = r \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \sin \theta \right) \, d\theta.}$$

2°) La fonction $(r, \theta) \mapsto (a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, et transforme le pavé $[0, b[\times [0, 2\pi]$ en le disque ouvert de centre (a, b) et de rayon b , qui est inclus dans $\mathcal{P}$. Par composition, l'application $(r, \theta) \mapsto f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc en particulier continue, sur $[0, b[\times [0, 2\pi]$.

Le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre permet de conclure que l'application

$r \mapsto \int_0^{2\pi} f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \, d\theta$ est continue sur $[0, b[$. Il en résulte :

$$\boxed{r \mapsto m(a, b, r) \text{ est continue sur } [0, b[.}$$

3°) En employant le résultat du **III 1°)**, $M(a, b, r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho \, m(a, b, \rho) \, d\rho$.

L'application $\rho \mapsto \rho \, m(a, b, \rho)$ est continue sur $[0, b[$, donc, par le théorème fondamental du calcul intégral,

l'application $r \mapsto \int_0^r \rho \, m(a, b, \rho) \, d\rho$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc en particulier continue, sur $[0, b[$. Il en résulte :

$$\boxed{r \mapsto M(a, b, r) \text{ est continue sur }]0, b[.]}$$

Étude de la continuité en 0 :

$\forall r \in]0, b[$,

$$\begin{aligned} M(a, b, r) - f(a, b) &= \frac{2}{r^2} \left(\int_0^r \rho m(a, b, \rho) d\rho - \frac{r^2}{2} f(a, b) \right) = \frac{2}{r^2} \left(\int_0^r \rho m(a, b, \rho) d\rho - \int_0^r \rho f(a, b) d\rho \right) \\ &= \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho (m(a, b, \rho) - f(a, b)) d\rho \end{aligned}$$

L'application $\rho \mapsto \rho m(a, b, \rho)$ est continue en 0, et $m(a, b, 0) = f(a, b)$, donc :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall \rho \in \mathbb{R}, 0 \leq \rho \leq \alpha \Rightarrow |m(a, b, \rho) - f(a, b)| \leq \varepsilon$.

Il en résulte :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, r \leq \alpha \Rightarrow |M(a, b, r) - f(a, b)| \leq \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho \varepsilon d\rho = \varepsilon$$

et par définition,

$$\boxed{r \mapsto M(a, b, r) \text{ est continue en 0.}}$$

4°) D'après l'étude faite au **III** 2°), l'application $(r, \theta) \mapsto f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, b[\times]0, 2\pi]$, donc le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre permet de conclure que l'application $r \mapsto M(a, b, r)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, b[$. En particulier,

$$\boxed{r \mapsto m(a, b, r) \text{ est dérivable sur }]0, b[.]}$$

Sa dérivée s'obtient par la règle de Leibniz, et on a :

$$\forall r \in]0, b[, \frac{\partial m}{\partial r}(a, b, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \sin \theta \right) d\theta$$

Grâce au **III** 2°), on a encore :

$$\boxed{\forall r \in]0, b[, \frac{\partial m}{\partial r}(a, b, r) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{D_r} \Delta f(u, v) du dv.}$$

5°) On a en fait prouvé au **III** 2°) que l'application $r \mapsto \int_0^r \rho m(a, b, \rho) d\rho$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, b[$.

Donc, l'application $r \mapsto M(a, b, r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho m(a, b, \rho) d\rho$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, b[$; en particulier

$$\boxed{r \mapsto M(a, b, r) \text{ est dérivable sur }]0, b[.]}$$

On calcule (dérivation d'un produit et d'une intégrale fonction de sa borne supérieure) :

$$\begin{aligned} \forall r \in]0, b[, \frac{\partial M}{\partial r}(a, b, r) &= -\frac{4}{r^3} \int_0^r \rho m(a, b, \rho) d\rho + \frac{2}{r^2} r m(a, b, r) = -\frac{4}{r^3} \frac{r^2}{2} M(a, b, r) + \frac{2}{r} m(a, b, r) \\ &= \frac{2}{r} (m(a, b, r) - M(a, b, r)) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall r \in]0, b[, \frac{\partial M}{\partial r}(a, b, r) = \frac{2}{r} (m(a, b, r) - M(a, b, r)).}$$

Partie IV

1°) Si f est harmonique sur $\mathcal{P}$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{P}$, et d'après le **III** 4°), pour tout r de $]0, b[$,

$$\frac{\partial m}{\partial r}(a, b, r) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{D_r} \Delta f(u, v) du dv = 0.$$

La fonction $r \mapsto m(a, b, r)$ est donc constante sur $]0, b[$, et, par continuité, sur $[0, b[$.

La fonction $r \mapsto m(a, b, r)$ est constante sur son ensemble de définition.

Comme $m(a, b, 0) = f(a, b)$, on a : $\forall r \in [0, b[, m(a, b, r) = f(a, b)$. (a, b) étant arbitrairement fixé dans $\mathcal{P}$, on peut conclure :

si f est harmonique sur $\mathcal{P}$, alors f vérifie la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$.

2°) Si f vérifie la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{P}$, et d'après le **III 1°**), $\forall r \in]0, b[, \iint_{D_r} f(u, v) \, du \, dv = 2\pi \int_0^r \rho m(a, b, \rho) \, d\rho = 2\pi f(a, b) \int_0^r \rho \, d\rho = \pi r^2 f(a, b)$, d'où $M(a, b, r) = f(a, b)$.

Si f possède la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$, elle possède la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$.

3°) Si f vérifie la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{P}$, et

$$\forall r \in]0, b[, \frac{\partial M}{\partial r}(a, b, r) = 0.$$

En utilisant le **III 5°**), il en résulte que pour tout r de $]0, b[, m(a, b, r) = M(a, b, r) = f(a, b)$, donc f vérifie la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$.

La réciproque de la propriété précédente est vraie.

4°) Montrons que si f vérifie la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$, il en va de même pour $\frac{\partial f}{\partial x}$.

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{P}$.

D'après ce qui précède, f vérifie aussi la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$.

Soit $b > 0$ et $r \in]0, b[$ fixés. Par composition, l'application $(a, \theta) \mapsto f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, donc, grâce au théorème de dérivation des intégrales propres à paramètre, l'application

$$a \mapsto m(a, b, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \, d\theta \text{ est aussi de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Sa dérivée s'obtient par la règle de Leibniz, et en notant $D_1 m$ la dérivée partielle de $(a, b, r) \mapsto m(a, b, r)$ par rapport à sa première variable, on obtient :

$$D_1 m(a, b, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial x}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \, d\theta.$$

Or, pour tout (a, b) de $\mathcal{P}$, et tout r de $]0, b[, m(a, b, r) = f(a, b)$, donc $D_1 m(a, b, r) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.

On a ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial x}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \, d\theta$$

ce qui signifie que $\frac{\partial f}{\partial x}$ possède la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$, donc aussi la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$.

On procède de même pour démontrer que $\frac{\partial f}{\partial y}$ possède la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$.

Si f vérifie la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$, il en va de même pour ses dérivées partielles d'ordre 1.

En itérant cette propriété, on montre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ vérifient aussi la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$.

Enfin, par linéarité de l'intégrale double,

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, v) \right) dudv = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b), \text{ donc } \Delta f \text{ la vérifie aussi.}$$

Si f vérifie la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$, il en va de même pour Δf .

5°) Si f vérifie la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$, alors pour tout (a, b) de $\mathcal{P}$, et tout r de $]0, b[$, $\frac{\partial m}{\partial r}(a, b, r) = 0$. D'après le **III** 4°), cela implique

$$\iint_{D_r} \Delta f(u, v) dudv = 0.$$

D'après la question précédente, Δf vérifie la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$, donc pour tout (a, b) de $\mathcal{P}$, et tout r de $]0, b[$, $\frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} \Delta f(u, v) dudv = \Delta f(a, b)$.

On a donc : pour tout (a, b) de $\mathcal{P}$, $\Delta f(a, b) = 0$, et

f est harmonique sur $\mathcal{P}$.