

Exercice I

1.

(a) Posons $h : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(tu)$ et $I = [0, 1[$. h est continue sur I par TG (théorèmes généraux).

En 1 : $h(t) = O(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}) = O(\frac{1}{\sqrt{1-t}})$ et comme $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur I (intégrale de référence), on conclut par TC (théorème de comparaison) que h est intégrable sur I .

Conclusion : g est définie sur $\mathbb{R}$

(b) Pour tout $a \in]0, 1[$, $\int_a^1 \frac{t}{1-t^2} dt = \left[-\sqrt{1-t^2} \right]_a^1 = \sqrt{1-a^2}$. Résolvons $\sqrt{1-a^2} = \frac{1}{\sqrt{u}} : 1-a^2 = \frac{1}{u}$ d'où $a = \sqrt{1 - \frac{1}{u}}$ convient car il appartient à $]0, 1[$ ($u > 1$).

Conclusion : $\alpha_u = \sqrt{1 - \frac{1}{u}}$

(c) $\forall t \in [0, 1[$, $\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right)' = \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}$ d'où

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(tu) dt &= \left[\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \left(\frac{-\cos(tu)}{u} \right) \right]_0^{\alpha_u} - \int_0^{\alpha_u} \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}} \left(\frac{-\cos(tu)}{u} \right) dt \\ &= \frac{\alpha_u}{\sqrt{1-\alpha_u^2}} \left(\frac{-\cos(\alpha_u u)}{u} \right) + \int_0^{\alpha_u} \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}} \left(\frac{\cos(tu)}{u} \right) dt \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $u > 1$,

$$|g(u)| \leq \left| \int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(tu) dt \right| + \left| \int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(tu) dt \right| \quad \text{donc,}$$

$$|g(u)| \leq \left| \int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(tu) dt \right| + \int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad \text{donc,}$$

$$|g(u)| \leq \left| \frac{\alpha_u}{\sqrt{1-\alpha_u^2}} \left(\frac{-\cos(\alpha_u u)}{u} \right) \right| + \left| \int_0^{\alpha_u} \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}} \left(\frac{\cos(tu)}{u} \right) dt \right| + \frac{1}{\sqrt{u}}$$

Or $\alpha_u = \sqrt{1 - \frac{1}{u}}$ donc

$$|g(u)| \leq \left| \frac{\alpha_u}{\sqrt{\frac{1}{u}}} \left(\frac{1}{u} \right) \right| + \left| \int_0^{\alpha_u} \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}} \left(\frac{1}{u} \right) dt \right| + \frac{1}{\sqrt{u}} \quad \text{d'où}$$

$$|g(u)| \leq \frac{\alpha_u}{\sqrt{\frac{1}{u}}} \left(\frac{1}{u} \right) + \frac{\alpha_u}{\sqrt{\frac{1}{u}}} \left(\frac{1}{u} \right) dt + \frac{1}{\sqrt{u}}$$

Et comme $\alpha_u < 1$, on a finalement $|g(u)| \leq \frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{3}{\sqrt{u}}$

Conclusion : $\forall u > 1, |g(u)| \leq \frac{3}{\sqrt{u}}$

2.

(a) Le cercle de centre O et de rayon π a pour équation $x^2 + y^2 = \pi^2$. comme y est positif, on en déduit que

$$y = \sqrt{\pi^2 - x^2}$$

Conclusion : $\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2}$

(b) Voir le cours ! Ici ce théorème ne s'applique pas car la fonction n'est pas de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ à cause de $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) = +\infty$

3.

(a) La fonction étant paire on a pour tout $n \geq 1$, $b_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt$

(b) Effectuons une intégration par partie sur a_n :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \underbrace{f(t)}_u \underbrace{\cos(nt)}_{v'} dt = \frac{2}{\pi} \left[f(t) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi -\frac{t}{\sqrt{\pi^2 - t^2}} \frac{\sin(nt)}{n} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{t}{\sqrt{\pi^2 - t^2}} \frac{\sin(nt)}{n} dt$$

Effectuons ensuite un changement de variables $t = \pi x$:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\pi x}{\sqrt{\pi^2 - (\pi x)^2}} \frac{\sin(n\pi x)}{n} \pi dx = \frac{2}{n} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - (x)^2}} \sin(n\pi x) dx$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{2}{n} g(\pi n)$

4.

(a) Posons u_n définie par $u_n(x) = a_n \cos nx$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $n \geq 1$, $|u_n(x)| \leq \frac{2}{n} \frac{3}{\sqrt{\pi n}} = v_n$ d'après le 1. (c), et comme $v_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ par TC, $(\sum v_n)$ converge et donc la série $(\sum u_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : La série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$

Ce résultat ne contredit pas le 2. (b) car le théorème de Dirichlet n'est qu'une condition suffisante pour que la série converge normalement sur $\mathbb{R}$. De plus cette convergence normale ne donne pas vers quoi elle converge.

(b) Soit $S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^n u_p$

D'une part f est continue sur $\mathbb{R}$: en effet f est 2π -périodique, continue sur $] -\pi, \pi[$ par TG et $f(\pi^+) = f(\pi^-) = 0$ d'où f est continue sur $\mathbb{R}$. On a donc d'après le théorème de Parseval, la convergence en moyenne quadratique de $(S_n(f))$ vers f , soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f) - f\|_2 = 0$.

D'autre part on a d'après le 4. (a), la série $(\sum u_n)$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction F , donc la suite $(S_n(f))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers F . La fonction F est 2π -périodique (transfert par convergence simple) et F est continue sur $\mathbb{R}$ (transfert par convergence uniforme de la continuité). On peut donc considérer dans l'espace $C_{2\pi}$: $\|S_n(f) - F\|_2 \leq \|S_n(f) - F\|_\infty \rightarrow 0$ lorsque n tend vers l'infini. On en déduit donc que la suite $(S_n(f))$ converge en moyenne quadratique vers F . Par unicité de la limite (quadratique), on a $F = f$.

Conclusion : $(S_n(f))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f

Exercice II

1.

(a) Tout d'abord le théorème de Schwarz permet avec des fonctions de classe C^2 de confondre $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ avec $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.

S'il existe a de classe C^1 telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x)f(x, y)$ alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = a(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ d'où } f(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = f(x, y) a(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

On en déduit que f vérifie $(\mathcal{E})$.

Réciproquement, si f vérifie $(\mathcal{E})$ et qu'elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, considérons g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{f(x, y)}$. On a g de classe C^1 par TG et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{f(x, y)^2} = 0$, car f vérifie $(\mathcal{E})$. Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert convexe, il existe une fonction a de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = a(x)$, soit $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x)f(x, y)$.

Conclusion : On a bien l'équivalence

(b) Soit f solution de $(\mathcal{E})$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On a donc l'existence du a et du 1.(a)

Analyse : Si on pose $f(x, y) = F(x)$ (y fixé), alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x)f(x, y)$ s'écrit $F'(x) = a(x)F(x)$, soit à l'aide des équations différentielles du 1er ordre linéaires : $F(x) = \lambda e^{A(x)}$ où A est une primitive de a .

Synthèse : Notons A une primitive de a sur $\mathbb{R}$ (qui existe car a est continue sur $\mathbb{R}$) et considérons g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = f(x, y)e^{-A(x)}$. Comme a est C^1 sur $\mathbb{R}$, A est C^2 sur $\mathbb{R}$ et donc g est C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Dérivons par rapport à x : $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)e^{-A(x)} - f(x, y)a(x)e^{-A(x)} = 0$. Comme $\mathbb{R}^2$ est convexe, il existe une fonction ψ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = \psi(y)$ et donc $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ avec $\varphi(x) = e^{A(x)}$.

Comme on a $\psi(y) = f(x, y)e^{-A(x)}$, ψ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par TG et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ avec φ et ψ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ avec φ et ψ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$, alors f est clairement C^2 , ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$f(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(x)\psi(y)\varphi'(x)\psi'(y) - \varphi'(x)\psi(y)\varphi(x)\psi'(y) = 0.$$

Conclusion : On a bien l'équivalence

On n'a pas l'unicité car si (φ, ψ) convient alors $(2\varphi, \frac{1}{2}\psi)$ convient aussi !

(c) Si f vérifie $\mathcal{E}$ et ne s'annule pas alors il existe φ, ψ C^2 et ne s'annulant pas tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \text{ donc } f(x, 0) = \varphi(x)\psi(0) \text{ et } f(0, y) = \varphi(0)\psi(y).$$

Posons alors $\varphi_0(x) = g(x)$, $\psi_0(y) = \lambda h(y)$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi_0(x)\psi_0(y)$, donc

$$f(x, 0) = \varphi_0(x)\psi_0(0) = g(x)\lambda h(0) \text{ et } f(0, y) = \varphi_0(0)\psi_0(y) = g(0)\lambda h(y). \text{ Comme } g(0) = h(0), \lambda = \frac{1}{g(0)} \text{ convient et}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = g(x) \frac{h(y)}{g(0)}$$

Pour l'unicité si f_1 et f_2 sont 2 telles fonctions, on a $f_1(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y)$, et $f_2(x, y) = \varphi_2(x)\psi_2(y)$, d'où

$$f_1(x, 0) = \varphi_1(x)\psi_1(0) = f_2(x, 0) = \varphi_2(x)\psi_2(0) = g(x) \text{ et}$$

$$f_1(0, y) = \varphi_1(0)\psi_1(y) = f_2(0, y) = \varphi_2(0)\psi_2(y) = h(y) \text{ d'où il existe 2 réels } \alpha \text{ et } \beta \text{ tels que } \varphi_2 = \alpha\varphi_1 \text{ et } \psi_2 = \beta\psi_1$$

On en déduit que $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = \varphi_1(0)\psi_1(0) = \alpha\beta\varphi_1(0)\psi_1(0) = g(0) (= h(0))$ comme tout est non nul, on a donc $\alpha\beta = 1$ et donc $f_1 = f_2$ et l'on a l'unicité.

Conclusion : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = g(x) \frac{h(y)}{g(0)}$ convient et est unique

2.

(a) Petite erreur d'énoncé : lire $y \mapsto f(x_0, y)$ et non $y \mapsto f(x, y_0)$.

Soit (x_0, y_0) un maximum local de f . Soit $r > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r]$, $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ et donc $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, $f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$ d'où x_0 est un maximum local de $x \mapsto f(x, y_0)$. On fait de même pour $y \mapsto f(x_0, y)$ qui admet un maximum local en y_0 .

Réciproquement soient x_0 un maximum local de $x \mapsto f(x, y_0)$ et y_0 un maximum local de $y \mapsto f(x_0, y)$.

Il existe φ et ψ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Comme f ne s'annule pas, φ et ψ non plus. Par valeurs intermédiaires elles ne changent donc pas de signe. Quitte à changer φ en $-\varphi$ et ψ en $-\psi$, on peut supposer que $\varphi > 0$ et comme f est positive, on en déduit que ψ aussi.

D'autre part, $\varphi(x) = \frac{f(x, y_0)}{\psi(y_0)}$, donc φ admet un maximum en x_0 . De même ψ admet un maximum en y_0 . On a donc l'existence d'un $r > 0$ tel que $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ $\varphi(x) \leq \varphi(x_0)$ et $\forall y \in [y_0 - r, y_0 + r]$ $\psi(y) \leq \psi(y_0)$ et

Comme tout est strictement positif, on en déduit que

$$\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r] \quad f(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \leq \varphi(x_0)\psi(y_0) = f(x_0, y_0).$$

Conclusion :

f admet un maximum local en (x_0, y_0) SSI x_0 est un max. local de $x \mapsto f(x, y_0)$ et y_0 un max. local de $y \mapsto f(x_0, y)$.

(b) Soit $A = \{x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } x_0 \text{ soit un maximum de } x \mapsto f(x, y_0)\}$ et $B = \{y_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } y_0 \text{ soit un maximum de } y \mapsto f(x_0, y)\}$. On a alors

Conclusion : $A \times B = \{(x_0, y_0) \text{ tel que } f \text{ admet un maximum local en } (x_0, y_0)\}$

3.

(a) Considérons h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = t^3 + |t|^3$. On a donc

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2t^3 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{d'où } h'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 6t^2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{et } h''(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 12t & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Les limites de h , h' et h'' à gauche et à droite en 0 sont toutes égales à 0. Par le théorème de prolongement des fonctions de classe C^k , h est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On en déduit par TG que f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ ($f(x, y) = h(xy)$).

(b) On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yh'(xy)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xh'(xy)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = h'(xy) + xyh''(xy)$

$$f(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h(xy) h'(xy) + xyh''(xy) - yh'(xy)xh'(xy) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 0 \\ 36x^5y^5 - 36x^5y^5 = 0 & \text{si } xy \geq 0 \end{cases}$$

Conclusion : f vérifie $(\mathcal{E})$

(c) Supposons qu'il existe φ et ψ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ $f(1, 1) = \varphi(1)\psi(1) = 2$ donc $\varphi(1) \neq 0$ et $\psi(1) \neq 0$, $f(-1, -1) = \varphi(-1)\psi(-1) = 2$ donc $\varphi(-1) \neq 0$ et $\psi(-1) \neq 0$ et enfin $f(-1, 1) = \varphi(-1)\psi(1) \neq 0$ or $f(-1, 1) = 0$ car $(-1, 1)$ est dans la zone $xy < 0$: Absurde !

Conclusion : Il n'existe pas φ et ψ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$

Exercice III

1.

(a) Si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$ et si f est le projecteur orthogonal vectoriel sur F alors

$\|f(x)\|^2 = \|y\|^2 \leq \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$, donc $\|f(x)\| \leq \|(x)\|$ et égalité SSI $z = 0$ c'est-à-dire SSI $x \in F$. On en déduit que $p(A)p(B) = \|\pi(\overrightarrow{AB})\| \leq \|\overrightarrow{AB}\| = AB$ et égalité SSI $\overrightarrow{AB} \in \text{vect}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = \overrightarrow{k}^\perp$.

Conclusion : $p(A)p(B) \leq AB$ et égalité SSI $\overrightarrow{AB} \in \text{vect}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = \overrightarrow{k}^\perp$.

(b) On a $D = A + \text{vect}(\overrightarrow{u})$ et donc $p(D) = p(A) + \text{vect}(\pi(\overrightarrow{u}))$.

Si $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{k}$ alors $\pi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ et $p(D) = \{p(A)\}$

Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{k})$ est libre alors $\pi(\overrightarrow{u}) \neq \overrightarrow{0}$ et $p(D)$ est la droite passant par $p(A)$ et dirigée par le vecteur $\pi(\overrightarrow{u})$.

2.

(a) p est une bijection affine de d vers D , comme $h \in d = p(D)$, il existe un unique point $H \in D$ tel que $h = p(H)$

Conclusion : On a l'existence et l'unicité du point H

(b) $\overrightarrow{OH'} \in \overrightarrow{\Delta} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})^\perp$ et $O \in \Pi$ donc $O = p(H')$. D'autre part $h = p(H)$ et $\overrightarrow{H'H} \in \overrightarrow{\Delta}^\perp = \text{vect}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. D'après

le 1 (a), on a donc $p(H')p(H) = H'H$ soit $\overrightarrow{Oh} = \overrightarrow{H'H}$

Si $M \in \Delta$ et $N \in D$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MH'} + \overrightarrow{H'H} + \overrightarrow{HN} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MH'} + \overrightarrow{HN}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{H'H}$

$\overrightarrow{u} \in F = \overrightarrow{\Delta} + \overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{H'H} \in \overrightarrow{\Delta}^\perp$ et comme $(0hHH')$ est un parallélogramme ($0h$) est parallèle à HH' et $(0H')$ est parallèle à hH , on a $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{H'H} = \overrightarrow{0h} \in D^\perp$.

On en déduit que $\overrightarrow{v} \in F^\perp$. D'après Pythagore, on a $MN^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 \geq \|\overrightarrow{v}\|^2 = Oh^2$ (avec égalité SSI $\overrightarrow{u} = 0$ soit comme Δ et ND non parallèles, donc SSI $\overrightarrow{MH'} + \overrightarrow{HN} = 0$ SSI $M = H$ et $H = N$)

Conclusion : $\forall (M, N) \in \Delta \times D, HH' = Oh \leq MN$

3.

(a) $\mathcal{C} \cap \Pi$ est le cercle de centre O et de rayon 1, donc d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Conclusion : L'équation de $\mathcal{C}$ est $x^2 + y^2 = 1$

Paramétrons le cylindre $\mathcal{C}$: $M(u, v) \begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases}, u \in]-\pi, \pi] \text{ et } v \in \mathbb{R}$

On a $\frac{\partial M}{\partial u}(u, v) \begin{cases} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{cases}$ et $\frac{\partial M}{\partial v}(u, v) \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$ et le point $M(u, v)$ est clairement régulier.

D'où le plan tangent à $\mathcal{C}$ au point $M(u, v)$ a pour équation : $\begin{vmatrix} x - \cos u & -\sin u & 0 \\ y - \sin u & \cos u & 0 \\ z - v & 0 & 1 \end{vmatrix} = x \cos u + y \sin u - 1 = 0$

Conclusion : Les plans tangent à $\mathcal{C}$ ont pour équations $x \cos \omega + y \sin \omega = 1$

(b)

1er Cas : La droite D est parallèle à Δ . La droite D a donc pour équation dans le repère du problème $D \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = z \end{cases}$

Soit $A(a, b, 0) \in D$, le projeté de A sur Δ est O donc comme $d(D, \Delta) = 1$, on a $OA = 1$ et donc $a^2 + b^2 = 1$.

On en déduit qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos \theta$ et $b = \sin \theta$. La droite D est alors clairement incluse dans le plan $P/x \cos \theta + y \sin \theta = 1$ qui est un plan tangent à $(\mathcal{C})$

2ème Cas : La droite D n'est pas parallèle à Δ . Soit H et H' définis au 2. On a $d(D, \Delta) = 1 = HH'$ et si $H'(0, 0, u_0)$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $H(\cos \theta, \sin \theta, u_0)$. La droite D est alors clairement incluse dans le plan $P/x \cos \theta + y \sin \theta = 1$ qui est un plan tangent à $(\mathcal{C})$

Conclusion : Toute droite D distant de Δ de 1 est incluse dans un plan tangent à $(\mathcal{C})$

(c) La réciproque est fausse, en effet soit D la droite $D \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = z \end{cases}$. La droite D est incluse dans le plan tangent $P/x \cos \omega + y \sin \omega = 1$ avec $\omega = 0$. Or $d(D, \Delta) = OH = \sqrt{10} \neq 1$ avec $H(1, 3, 0)$

4.

(a) Il existe un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé du plan $P_0 = O + \text{vect}(\vec{i}, \vec{j})$ tel que O' ait pour coordonnées $(1, 0)$. Le cercle Γ a pour équation dans ce repère $x^2 + y^2 = 1$ et le cercle Γ' a pour équation dans ce repère

$(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Soit $M(a, b) \in \Gamma$, la tangente en M à Γ a pour équation $T_{a,b}/ax + by = 1$. Soit $M'(a', b') \in \Gamma'$, la tangente en M' à Γ' a pour équation $T'_{a',b'}/(a' - 1)x + b'y = a'$.

On cherche donc 2 couples (a, b) et (a', b') tels que $T_{a,b} = T'_{a',b'}$. On fait 2 cas $a' = 0$ et $a' \neq 0$ et l'on trouve les 2 tangentes communes d'équation $T/y = 1$ et $T/y = -1$.

(b) 1er Cas : La droite D est parallèle à Δ et Δ' . Alors il y a exactement 2 points A et A' équidistant de O et O' dans le plan Π . Les 2 droites $A + \vec{\Delta}$ et $A' + \vec{\Delta}$ sont les 2 droites parallèles à Δ et Δ' et à 1 de Δ et Δ' .

2ème Cas : La droite D n'est pas parallèle à Δ . Avec les notations du 2., soit h_1 le projeté de O' sur $d = p(D)$. On a alors $d(D, \Delta) = Oh$ et $d(D, \Delta') = O'h_1$ et donc on doit avoir $\overrightarrow{hh_1}$ colinéaire à $\overrightarrow{OO'}$ et donc la droite d est parallèle à (OO') . Soient d_1 et d_2 les 2 seules droites du plan Π qui sont à 1 de la droite (OO') . Les droites solutions sont les droites de D dont la projection sur Π est d_1 ou d_2 .