

CONCOURS INTERNE

et

SESSION DE 1988

CONCOURS D'ACCÈS À L'ÉCHELLE DE RÉMUNÉRATION DES PROFESSEURS CERTIFIÉS

## PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Matériel à fournir : feuilles de papier quadrillé  $5 \times 5$ .

L'objet du problème est l'étude de polynômes qui approchent la fonction cosinus sur un intervalle d'amplitude un quart de période. La périodicité de la fonction cosinus conduit naturellement à introduire des fonctions périodiques construites à partir de polynômes. Le problème présente un triple aspect : approximation de la fonction cosinus, suite de polynômes, fonctions périodiques. Il est divisé en cinq séquences ; les objectifs en sont précisés en tête de chacune d'elles. La séquence 2 n'intervient pas dans les séquences suivantes.

On note  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs et  $\mathbb{R}$  l'ensemble des réels ;  $|x|$  désigne la valeur absolue du réel  $x$ . Pour une fonction  $h$ , les symboles  $h'$ ,  $h''$ ,  $h'''$  désignent les dérivées première, seconde, troisième de  $h$ . Une fonction  $w$  est dite 2-périodique si elle est définie sur  $\mathbb{R}$  et si elle vérifie  $w(x+2) = w(x)$  pour tout réel  $x$  ; en particulier la fonction  $x \rightarrow \cos \pi x$  est 2-périodique.

## 1. Un encadrement de la fonction cosinus

Dans cette séquence, directement liée à des activités possibles en classe, un sujet d'étude est proposé et des démarches sont décrites. Il est demandé :

- 1.1. une solution, c'est-à-dire une justification claire (raisonnements, calculs, figures) de tous les points intermédiaires et des résultats indiqués ;
- 1.2. ensuite un bref commentaire à caractère didactique, comparant les méthodes décrites quant à leur intérêt et leur portée dans un travail en classe (consolidation de connaissances, acquisition de savoir-faire, mise en jeu de notions nouvelles).

L'objectif mathématique est d'établir l'encadrement

$$1 - 6x^2 + 4x^3 \leq \cos \pi x \leq 1 - 4x^2 \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

et d'évaluer la qualité de cet encadrement.

Pour établir l'encadrement on propose les deux méthodes suivantes :

## PREMIÈRE MÉTHODE

La résolution graphique dans l'intervalle  $[0, 1]$  de l'inéquation  $\sin \frac{\pi x}{2} \geq \sqrt{2} x$  conduit à la majoration de  $\cos \pi x$ .

La minoration de  $\cos \pi x$  équivaut, en posant d'abord  $X = \frac{1}{2} - x$ , à  $\sin \pi X \geq 3X - 4X^3$  pour  $0 \leq X \leq \frac{1}{2}$ .

On pose ensuite  $X = \sin t$ , où  $t$  décrit l'intervalle  $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$  ; on observe que, pour ces valeurs de  $t$ , on a

$$\pi \sin t \geq 3t \quad \text{et} \quad \sin(\pi \sin t) \geq \sin 3t.$$

On conclut en utilisant la relation  $\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$ .

## DEUXIÈME MÉTHODE

On pose  $y(x) = 1 - 4x^2 - \cos \pi x$  et  $z(x) = 1 - 6x^2 + 4x^3 - \cos \pi x$ . On étudie sur l'intervalle  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  les variations de  $y''$ , puis de  $y'$  ainsi que les variations de  $z''$ , puis de  $z'$  ; on en déduit

le signe de  $y$  et le signe de  $z$ .

Tournez la page S.V.P.

Pour évaluer la qualité de l'encadrement on étudie la fonction  $y - z$  et on représente sur un même graphique, à une échelle appropriée, les fonctions  $y - z$ ,  $y$  et  $z$ , en plaçant notamment les tangentes aux points d'abscisse  $0$ ,  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{2}$ .

Pour la suite on note  $Q$  le polynôme  $Q(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$  qui intervient explicitement dans les séquences 2 et 3.

## 2. Étude et caractérisation d'une fonction 2-périodique

Les propriétés de la fonction cosinus et les résultats de la séquence 1 suggèrent de construire à partir de polynômes des fonctions paires et 2-périodiques.

On considère dans cette séquence la fonction  $g$ , associée à  $Q$ , définie par les conditions :

$g$  est paire, 2-périodique et on a  $g(x) = Q(x)$  pour  $0 \leq x \leq 1$ .

- 2.1. a. Établir successivement qu'on a, pour  $0 \leq x \leq 1$ ,  $g(x) + g(1-x) = 0$ ,  $g(x) + g(x+1) = 0$ ,  
et  $g(x+j) = (-1)^j g(x)$  pour  $j$  élément de  $\mathbb{Z}$ .

Montrer que le point  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  est centre de symétrie de la représentation graphique de  $g$ .

Indiquer comment on obtient la représentation graphique de  $g$  à partir de la courbe donnant la représentation graphique de  $Q$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

- b. Montrer que  $g$  a une dérivée seconde continue sur  $\mathbb{R}$ .

Les deux questions suivantes conduisent à deux caractérisations de la fonction  $g$ .

- 2.2. a. On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctions  $s$  données par :

$$\begin{aligned} s(x) &= \alpha x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu & \text{pour } -1 \leq x < 0 \\ \text{et } s(x) &= \beta x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu & \text{pour } 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

où  $\alpha, \beta, \lambda, \mu$  et  $\nu$  sont des coefficients réels.

Montrer que toute fonction de  $\mathcal{S}$  a une dérivée seconde continue sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Trouver l'expression générale des fonctions  $s$  satisfaisant en outre à

$$s(1) = s(-1), \quad s'(1) = s'(-1), \quad s''(1) = s''(-1).$$

On vérifiera que l'ensemble de ces fonctions est un espace vectoriel de dimension 2.

- b. Décrire explicitement l'ensemble des fonctions réelles 2-périodiques ayant une dérivée seconde continue sur  $\mathbb{R}$  et dont la restriction à chaque intervalle  $]j, j+1[$  ( $j$  élément de  $\mathbb{Z}$ ) est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Montrer que  $g$  est l'unique telle fonction prenant la même valeur que  $\cos \pi x$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{Z}$ .

- 2.3. On note  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fonctions réelles 2-périodiques ayant une dérivée seconde continue sur  $\mathbb{R}$  et prenant la même valeur que  $\cos \pi x$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{Z}$ .

- a. Établir qu'on a :  $\int_{-1}^1 f''(x) dx = 0$  et  $\int_{-1}^1 |x| f''(x) dx = 4$  pour tout élément  $f$  de  $\mathcal{F}$ .

- b. On pose  $H(f) = \int_{-1}^1 [f''(x)]^2 dx$ , pour  $f$  élément de  $\mathcal{F}$ . Calculer  $H(f)$  lorsque  $f(x) = \cos \pi x$ .

La fonction  $g$  appartient aussi à  $\mathcal{F}$ . Calculer  $H(g)$ .

- c. Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{F}$ . À l'aide de l'égalité  $g''(x) = 24|x| - 12$  pour  $-1 \leq x \leq 1$ , calculer :

$$\int_{-1}^1 g''(x) [f''(x) - g''(x)] dx, \quad \text{en déduire qu'on a } H(f) = H(g) + H(f-g).$$

- d. Montrer que  $g$  est l'unique élément de  $\mathcal{F}$  rendant minimum la quantité  $H(f)$  lorsque  $f$  décrit  $\mathcal{F}$ .

## 3. Une suite de polynômes

3.1. Au polynôme  $Q$  défini à la séquence 1, on associe les trois polynômes  $P_1, P_2, P_3$  définis par :

$$P_1(x) = \frac{1}{24} Q''(x), \quad P_2(x) = \frac{1}{24} Q'(x), \quad P_3(x) = \frac{1}{24} Q(x).$$

Pour  $n = 1, 2, 3$ , montrer qu'on a  $P_n(x) + (-1)^n P_n(-x) = 2 \frac{x^n}{n!}$  et exprimer  $P_n(1-x)$  en fonction de  $P_n(x)$ .

3.2. On envisage plus généralement une suite  $(P_n)_{n \geq 1}$  de polynômes vérifiant pour tout  $n$ ,

$$P_n(x) + (-1)^n P_n(-x) = 2 \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad P_n(x) = (-1)^n P_n(1-x).$$

a. Que vaut, pour une telle suite,  $P_n(x) + P_n(x+1)$  ?

b. Montrer que, pour chaque  $n$ , il existe au plus un polynôme  $P_n$  vérifiant les conditions ci-dessus.

c. On admet provisoirement (cf. 4.3.b.) l'existence de la suite  $(P_n)$ .

Exprimer  $P'_n$  en fonction de  $P_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ) et calculer la dérivée  $n$ -ième de  $P_n$ . Utilisant la relation liant  $P_n(x+1)$  et  $P_n(x)$  et la formule de Taylor, montrer qu'on a :

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2} \left[ \frac{P_{n-1}(x)}{1!} + \dots + \frac{P_{n-k}(x)}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} \right].$$

Montrer la cohérence de ce résultat avec les expressions de  $P_n$  pour  $n = 1, 2, 3$ . Calculer  $P_4$  et  $P_5$ .

## 4. Une suite de fonctions périodiques

La question 4.1. de cette séquence prépare la construction d'une suite de fonctions périodiques qui est étudiée à la question 4.2. et qui est liée à la suite  $(P_n)$ .

4.1. On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des fonctions réelles  $a$ , continues sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant

$$a(x) = a(-x) \quad \text{et} \quad a(x) = -a(1-x)$$

pour tout  $x$  réel et on note  $\mathcal{B}$  l'ensemble des fonctions réelles  $b$ , continues sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant

$$b(x) = -b(-x) \quad \text{et} \quad b(x) = b(1-x)$$

pour tout  $x$  réel.

a. Montrer que toute fonction  $a$  de  $\mathcal{A}$ , ainsi que toute fonction  $b$  de  $\mathcal{B}$ , est 2-périodique.

b. À tout élément  $a$  de  $\mathcal{A}$ , on associe la fonction  $I(a)$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$I(a)(x) = \int_0^x a(t) dt,$$

et à tout élément  $b$  de  $\mathcal{B}$ , on associe la fonction  $J(b)$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$J(b)(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x b(t) dt.$$

Montrer que  $I$  est une application de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B}$  et  $J$  une application de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{A}$ .

c. On suppose que la restriction à l'intervalle  $[0, 1]$  d'une fonction  $a$  de  $\mathcal{A}$  est strictement croissante. Indiquer les variations de la restriction à ce même intervalle  $[0, 1]$  de chacune des fonctions

$$I(a), J \circ I(a), I \circ J \circ I(a) \quad \text{et} \quad J \circ I \circ J \circ I(a).$$

4.2.a. À partir de la fonction  $u_1$ , paire et 2-périodique, définie par :

$$u_1(x) = x - \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

on construit la suite de fonctions  $(u_n)_{n \geq 1}$ , par les formules :

$$u_{2m}(x) = \int_0^x u_{2m-1}(t) dt \quad \text{et} \quad u_{2m+1}(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x u_{2m}(t) dt,$$

pour  $m$  entier,  $m \geq 1$  et  $x$  réel.

Montrer que pour  $n \geq 2$ ,  $u_n$  est une fonction 2-périodique ayant une dérivée  $(n-1)$ -ième continue sur  $\mathbb{R}$  et dont la restriction à chaque intervalle  $[j, j+1]$  ( $j$  élément de  $\mathbb{Z}$ ) est un polynôme de degré  $n$ .

Indiquer l'allure de la représentation graphique de  $u_n$  selon les valeurs de  $n$ ; montrer qu'on a, pour

$$m \text{ entier, } m \geq 1, \quad (-1)^m u_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \quad \text{et} \quad (-1)^m u_{2m-1}(0) > 0.$$

b. On note  $R_n$  le polynôme vérifiant  $R_n(x) = u_n(x)$  pour  $0 \leq x \leq 1$ .

Montrer que, pour  $m$  entier,  $m \geq 1$ ,  $R_{2m}(x) - \frac{x^{2m}}{(2m)!}$  définit un polynôme impair et

$$R_{2m-1}(x) - \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \text{ définit un polynôme pair.}$$

Montrer que la suite  $(R_n)$  n'est autre que la suite  $(P_n)$  introduite à la séquence 3. (Cela établit l'existence de la suite  $(P_n)$ .)

### 5. Une suite de fonctions périodiques convergeant vers la fonction cosinus

5.1. À partir de la suite  $(u_n)$  décrite à la séquence 4, on définit la suite de fonctions  $(v_n)_{n \geq 1}$ , par les formules :

$$v_{2m}(x) = \frac{u_{2m}\left(x + \frac{1}{2}\right)}{u_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)} \quad \text{et} \quad v_{2m-1}(x) = \frac{u_{2m-1}(x)}{u_{2m-1}(0)}$$

pour  $m$  entier,  $m \geq 1$  et  $x$  réel.

Calculer explicitement  $v_2(x)$  et  $v_3(x)$  pour  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .

Indiquer l'allure de la représentation graphique de  $v_n$  pour  $n \geq 2$ .

5.2. Calculer, pour  $k$  entier,  $k \geq 0$ ,  $\int_{-1}^1 u_1(x) \cos(k\pi x) dx$ .

Montrer qu'on a :

$$u_1(x) = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

pour tout  $x$  réel.

En déduire un développement en série trigonométrique de  $u_{2m}$  et de  $u_{2m+1}$  ( $m$  entier,  $m \geq 1$ ).

Montrer que la suite  $(v_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $x - \cos \pi x$ .