

Partie I

I.A - Soit  $u \in ]-1, +\infty[ \setminus \{0\}$  et appliquons la formule de Taylor-Lagrange à  $x \rightarrow \ln(1+x)$ ,  $C^\infty$  sur  $] -1, +\infty[$  sur  $[0, u]$ . Il existe  $c \in ]0, u[$  tel que  $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2(1+c)^2}u^2$ . D'où :

$$\forall u \in ]-1, +\infty[, \ln(1+u) \leq u \text{ (l'inégalité est vraie pour } u=0)$$

En particulier si  $x \in [0, 1[$ , en substituant  $\begin{cases} x \text{ à } u \\ -x \text{ à } u \end{cases}$ , on obtient  $\begin{cases} \ln(1+x) \leq x \\ \ln(1-x) \leq -x \end{cases}$ , ce qui équivaut à :

$$\boxed{\forall x \in [0, 1[, x + \ln(1-x) \leq 0 \text{ et } x - \ln(1+x) \geq 0}$$

$$\begin{aligned} \text{I.B - } \forall n \geq 2, u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \leq 0 \text{ (d'après I.A)} \end{aligned}$$

D'où  $(u_n)$  est décroissante.

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \geq 0 \text{ (d'après I.A)} \end{aligned}$$

D'où  $(v_n)$  est croissante.

$$\forall n \geq 2, u_n - v_n = \frac{1}{n}. \text{ D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0.$$

On a montré que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  étant monotones, leur limite  $\gamma$  vérifie  $\gamma = \inf(u_n)$  et  $\gamma = \sup(v_n)$ .

$$\text{D'où : } \boxed{\forall n \geq 2, v_n \leq \gamma \leq u_n}$$

I.C - Grâce à une calculatrice, on peut calculer des valeurs approchées par excès de  $u_n$ , par défaut de  $v_n$  pour encadrer  $\gamma$  :

| $n$                                  | 2   | 3   | 4   | 5    | 6    |
|--------------------------------------|-----|-----|-----|------|------|
| valeur approchée de $u_n$ par excès  | 0.9 | 0.8 | 0.7 | 0.68 | 0.66 |
| valeur approchée de $v_n$ par défaut | 0.3 | 0.4 | 0.4 | 0.47 | 0.49 |

On a donc  $0.49 \leq \gamma \leq 0.66$ . D'où une valeur approchée de  $\gamma$  est 0.57 à  $10^{-1}$  près.

$$\begin{aligned} \text{I.D - L'on a } \forall n \geq 2, w_n &= -\ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

Donc  $\sum w_n$  converge.

$$\begin{aligned} \forall p \geq 2, \forall m \geq p+1, u_p - u_m &= \left( \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} - \ln(p) \right) - \left( \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - \ln(m) \right) \\ &= - \left( \sum_{n=p+1}^m \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=p+1}^m (\ln(n) - \ln(n-1)) \\ &= \sum_{n=p+1}^m \left( \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=p+1}^m w_n$$

$$u_p - \gamma = \sum_{n=p+1}^{+\infty} w_n$$

En faisant tendre  $m$  vers  $+\infty$ , on obtient

$$\text{I.E.1)} \left[ \forall k \geq 2, \int_{k-1}^k g(t) dt = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} \right) \right] \text{ (aire d'un trapèze)}$$

$$\text{I.E.2)} h \text{ affine sur } \left] -\infty, k - \frac{1}{2} \right[ , h(k-1) = f(k-1), h'(k-1) = f'(k-1) \text{ impliquent :}$$

$$\forall x \in \left] -\infty, k - \frac{1}{2} \right[ , h(x) - f(k-1) = f'(k-1)(x - k + 1) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \left] -\infty, k - \frac{1}{2} \right[ , h(x) = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{(k-1)^2}(x - k + 1)$$

$$h \text{ affine sur } \left[ k - \frac{1}{2}, +\infty \right[ h(k) = f(k), h'(k) = f'(k) \text{ impliquent :}$$

$$\forall x \in \left[ k - \frac{1}{2}, +\infty \right[ , h(x) - f(k) = f'(k)(x - k) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \left[ k - \frac{1}{2}, +\infty \right[ , h(x) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}(x - k). \text{ D'où l'unicité de } h.$$

Soit  $h$  la fonction définie par :

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

. Alors  $h$  est une fonction affine sur

$$x \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{(k-1)^2}(x - k + 1) & \text{si } x < k - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}(x - k) & \text{si } x \geq k - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\left] -\infty, k - \frac{1}{2} \right[$  et sur  $\left[ k - \frac{1}{2}, +\infty \right[$  telle que  $h(k-1) = f(k-1)$ ,  $h'(k-1) = f'(k-1)$ ,  $h(k) = f(k)$  et  $h'(k) = f'(k)$  (de manière simple). D'où l'existence de  $h$ .

$$\text{I.E.3)} h \text{ est continue sur } \left] -\infty, k - \frac{1}{2} \right[ \text{ et sur } \left[ k - \frac{1}{2}, +\infty \right[ \text{ comme fonction affine sur ces inter-}$$

valles. En  $k - \frac{1}{2}$ , on a :

$$h\left(k - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} \text{ et } h \text{ est continue à droite en } k - \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow (k-\frac{1}{2})^-} h(x) = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2(k-1)^2}.$$

$$\text{Or } \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2(k-1)^2} \Leftrightarrow k(k-1)^2 + \frac{(k-1)^2}{2} = (k-1)k^2 + \frac{k^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow k^3 - 2k^2 + k + \frac{k^2 - 2k + 1}{2} = k^3 - k^2 + \frac{k^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{2}. \text{ Cette équation n'ayant de solution entière,}$$

la fonction  $h$  n'est pas continue en  $\frac{1}{2}$ .

$$\text{I.E.4)} \forall k \geq 2, \int_{k-1}^k h(t) dt = \int_{k-1}^{k-\frac{1}{2}} h(t) dt + \int_{k-\frac{1}{2}}^k h(t) dt$$

$$= \int_{k-1}^{k-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{(k-1)^2}(t - k + 1) \right) dt + \int_{k-\frac{1}{2}}^k \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}(t - k) \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2(k-1)^2}}_{h\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)^-\right)} + \underbrace{\frac{1}{k-1}}_{h(k-1)} + \underbrace{\frac{1}{k}}_{h(k)} + \underbrace{\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\left(k - \frac{1}{2} - k\right)}_{h\left(k-\frac{1}{2}\right)} \right)$$

$$= \frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k-1)^2}. \text{ D'où :}$$

$$\boxed{\forall k \geq 2, \int_{k-1}^k h(t) dt = \frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k-1)^2}}$$

I.F -  $f$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $f''(t) = \frac{2}{t^3}$ ; D'où  $f$  est convexe et l'arc de la représentation de  $f$  correspondant à l'intervalle  $[k-1, k]$  est situé sous la corde :  $\forall t \in [k-1, k]$ ,  $f(t) \leq g(t)$ .

De même,  $f$  étant convexe, le graphe de  $f$  est situé au-dessus de ses tangentes. On en déduit :

$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{(k-1)^2}(t-k+1) \leq f(t)$  et  $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}(t-k) \leq f(t)$ . Cela montre :  
 $\forall t \in [k-1, k]$ ,  $h(t) \leq f(t)$ .

Donc

$$\boxed{\forall t \in [k-1, k], h(t) \leq f(t) \leq g(t)}$$

I.G - L'inégalité précédente montre :

$$\forall k \geq 2, \int_{k-1}^k h(t) dt \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq \int_{k-1}^k g(t) dt \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k-1)^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} \right) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k-1)^2} \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} \right)}$$

$$\text{I.H - } \frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k-1)^2} \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k-1)^2} \leq w_k \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$\text{D'où } \forall p \geq 2, \forall m \geq p+1, \sum_{k=p+1}^m \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k-1)^2} \leq \sum_{k=p+1}^m w_k \leq \sum_{k=p+1}^m \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2p} - \frac{1}{2m} + \frac{1}{8m^2} - \frac{1}{8p^2} \leq \sum_{k=p+1}^m w_k \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{m} \right) \text{ et en faisant tendre } m \text{ vers } +\infty, \text{ on obtient}$$

:

$$\boxed{\frac{1}{2p} - \frac{1}{8p^2} \leq u_p - \gamma \leq \frac{1}{2p}}$$

I.I - On déduit de l'inégalité précédente :

$$u_p - \frac{1}{2p} \leq \gamma \leq u_p - \frac{1}{2p} + \frac{1}{8p^2}$$

Pour obtenir une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $\gamma$ , il suffit de rendre:

$$\frac{1}{8p^2} \leq 2 \times 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow p^2 \geq \frac{1000}{16} = 62.5$$

$$\Leftrightarrow p \geq 8. \text{ Or :}$$

$$0.5759 < u(8) - 1/16 \leq \gamma \leq u(8) - 1/16 + 1/512 < 0.5779 \text{ (calculatrice)}$$

Donc une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $\gamma$  est 0.5769.

## Partie II

$$\text{II.A - } \forall n \geq 1, \forall t \in [0, 1[, \frac{1-t^n}{1-t} = \sum_{i=0}^{n-1} t^i \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt = \int_0^1 \left( \sum_{i=0}^{n-1} t^i \right) dt \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt}$$

$$\text{II.B - Or } \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt = \int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{1-t} du \text{ (changement de variable } u = -t)$$

$$= \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x} dx \text{ (changement de variable } x = nu)$$

D'où :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} = \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x} dx}$$

$$\text{On a alors } u_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} - \ln(n)$$

$$= \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x} dx - \ln(n)$$

$$= \left( \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x} dx + \int_1^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x} dx \right) - \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x} dx - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x} dx$$

D'où :

$$\boxed{u_n = \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x} dx - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x} dx}$$

II.C.1) exp est convexe. d'où le graphe de l'exponentielle est situé au-dessus de celui de sa tangente au point d'abscisse 0 :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^x}$$

II.C.2) Soit  $x \in [0, n]$ . En substituant  $-\frac{x}{n}$  à  $x$  dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$1 - \frac{x}{n} \leq \exp\left(-\frac{x}{n}\right) \Leftrightarrow \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x} \text{ (car } u \rightarrow u^n \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+). \text{ Donc :}$$

$$\boxed{\forall x \in [0, n], \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}}$$

II.C.3) Soit  $x \in [0, n]$ . En substituant  $\frac{x}{n}$  à  $x$  dans l'inégalité II.C.2), on obtient :

$$1 + \frac{x}{n} \leq \exp\left(\frac{x}{n}\right) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x. \text{ D'où :}$$

$$\boxed{\forall x \in [0, n], \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x}$$

II.C.4)  $\forall u \in ]0, 1], \exists c \in ]0, u[, (1 - u)^n = 1 - nu + \frac{n(n-1)}{2}(1 - c)^{n-2}u^2$  (formule de Taylor-Lagrange). D'où :  $\forall u \in ]0, 1], 1 - nu \leq (1 - u)^n$  (qui est encore vrai pour  $u = 0$ ).

Si  $x \in [0, n], \frac{x^2}{n^2} \in [0, 1]$  et en substituant  $\frac{x^2}{n^2}$  à  $u$  dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$1 - n\frac{x^2}{n^2} \leq \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n. \text{ D'où :}$$

$$\boxed{\forall x \in [0, n], 1 - \frac{x^2}{n} \leq \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n}$$

II.C.5) II.C.2) montre  $\forall x \in [0, n], 0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ .

$$\begin{aligned} \text{En outre } \forall x \in [0, n], e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n &= e^{-x} \left(1 - e^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) \\ &\leq e^{-x} \left(1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) \text{ (d'après la question II.C.3))} \\ &\leq e^{-x} \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right) \\ &\leq e^{-x} \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) \text{ (d'après la question II.C.4)). D'où :} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0, n], 0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x} \frac{x^2}{n}}$$

II.D-  $x \rightarrow \frac{e^{-x}}{x}$  est continue sur  $[1, +\infty[$ ; en outre  $\forall x \in [1, +\infty[, \frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$  et  $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$  converge.

Donc  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$  converge.

De plus :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, u_n - \int_0^1 (1 - e^{-x}) \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx &= \int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}{x} dx - \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}{x} dx \\ &\quad - \int_0^1 (1 - e^{-x}) \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}{x} dx + \int_n^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx. \end{aligned}$$

Or  $\left| \int_0^1 \frac{e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}{x} dx \right| \leq \int_0^1 e^{-x} \frac{x}{n} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-x} x dx$  qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = 0$  car  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$  converge.

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \int_0^1 (1 - e^{-x}) \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\gamma = \int_0^1 (1 - e^{-x}) \frac{dx}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx}$$

Partie III

$$\begin{aligned}
 \text{III.A - } \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \varphi(x) &= \frac{1}{1 - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} - \frac{1}{x} \\
 &= \frac{1}{x} \left( \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{x}{2} - 1 + o(x) \right) \\
 &= \frac{1}{2} + o(1)
 \end{aligned}$$

D'où  $\varphi$  se prolonge par continuité en 0 par  $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ .

D'autre part  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$ ; donc  $\exists A > 0, \forall x \geq A, |\varphi(x)| \leq 2$  et  $\varphi$ , continue sur  $[0, A]$ , est bornée sur  $[0, A]$ .

Donc  $\varphi$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ .

III.B -  $x \rightarrow e^{-x}\varphi(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et  $x \geq A, |e^{-x}\varphi(x)| \leq 2e^{-x}$ ; or  $\int_A^{+\infty} 2e^{-x} dx$  converge.

Donc,  $\int_0^{+\infty} e^{-x}\varphi(x) dx$  converge.

III.C -  $x \xrightarrow{\psi} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}$  est continue sur  $[a, +\infty[$  ( $a > 0$ ).

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2\psi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{-x} - e^{-nx}) = 0$  (l'exponentielle l'emporte sur la puissance).

Donc  $I_n(a)$  existe pour tout  $a > 0$ .

$$\begin{aligned}
 \text{De plus, } I_n(a) &= \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_a^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{x} dx \\
 &= \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{na}^{+\infty} \left( \frac{e^{-u}}{\frac{u}{n}} \times \frac{1}{n} \right) du \quad (\text{changement de variable } u = nx \text{ valide dans la}
 \end{aligned}$$

seconde intégrale)

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^{na} \frac{e^{-x}}{x} dx \\
 &= \int_a^{na} \frac{1}{x} dx - \int_a^{na} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx \\
 &= \ln(n) - \int_a^{na} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx.
 \end{aligned}$$

On a montré :

$$\boxed{\forall a > 0, I_n(a) = \int_a^{na} \frac{e^{-x}}{x} dx = \ln(n) - \int_a^{na} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx.}$$

III.D -  $\psi$  (notation précédente) est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

En 0,  $\psi(x) = \frac{1 - x - 1 + nx + o(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} n - 1$  ( $n \geq 2$ ). Donc  $\int_0^1 \psi(x) dx$  converge; comme  $I_n(1)$  a un sens,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx \text{ converge.}}$$

$\forall a > 0, 0 \leq \int_a^{na} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx \leq \int_a^{na} dx$  (car  $0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$  pour  $x \geq 0$  (question II.C.1))

D'où  $0 \leq \int_a^{na} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx \leq (n - 1)a$  et  $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{na} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx = 0$ .

En faisant tendre  $a$  vers 0 dans l'identité obtenue en III.E, on démontre :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \ln(n)}$$

$$\begin{aligned} \text{III.E} - \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx}) \varphi(x) dx &= \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx}) \left( \frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{1 - e^{-x}} - \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \sum_{p=1}^{n-1} e^{-px} - \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \right) dx \quad (\text{somme des termes de la suite} \end{aligned}$$

géométrique de raison  $e^{-x}$ )

$$\begin{aligned} &= \sum_{p=1}^{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-px} dx - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx \quad (\text{intégrales toutes convergentes}) \\ &= \sum_{p=1}^{n-1} \left[ \frac{e^{-px}}{-p} \right]_0^{+\infty} - \ln(n) \\ &= \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - \ln(n) \\ &= v_n. \text{ On a montré :} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_n = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx}) \varphi(x) dx}$$

III.F - On déduit de la question précédente :

$\forall n \geq 2$ ,  $v_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} \varphi(x) dx - \int_0^{+\infty} e^{-nx} \varphi(x) dx$  (les intégrales convergent car  $\varphi$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ ).

$$\begin{aligned} \text{Or } \left| \int_0^{+\infty} e^{-nx} \varphi(x) dx \right| &\leq M \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx \quad (\text{où } M \text{ est un majorant de } |\varphi|) \\ &\leq M \left[ \frac{e^{-nx}}{-n} \right]_0^{+\infty} = \frac{M}{n}. \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} \varphi(x) dx = 0$  et comme  $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ ,

$$\boxed{\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x} \varphi(x) dx}$$

## Partie IV

IV.A -  $\ker \Phi = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(X+1) - P(X) = 0\}$ .

Soit  $P \in \ker \Phi$ ; posons  $Q = P - P(0)$ . On a alors  $Q(0) = 0$ . Supposons  $Q(p) = 0$  avec  $p \in \mathbb{N}$ .

Alors  $Q(p+1) = P(p+1) - P(0) = P(p) - P(0)$  (car  $P(p+1) - P(p) = 0$ )  
 $= 0$ .

$Q$  ayant une infinité de racines,  $Q$  est nul et  $P$  est constant. Réciproquement, un polynôme constant est bien dans  $\ker \Phi$ . Donc  $\boxed{\ker \Phi = \mathbb{R}_0[X]}$ .

$\ker \Phi_n \subset \ker \Phi = \mathbb{R}_0[X]$ ; d'autre part, tout polynôme constant est dans  $\ker \Phi_n$ . Donc  $\boxed{\ker \Phi_n = \mathbb{R}_0[X]}$ .

$\text{Im } \Phi_n = \text{Vect}\{\Phi(1), \Phi(X), \Phi(X^2), \dots, \Phi(X^n)\}$

$$= \text{Vect}\left\{1, 2X+1, \dots, \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k X^k\right\}$$

$$= \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ (la famille } 1, 2X+1, \dots, \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k X^k \text{ étant une famille de } n \text{ polynômes de degrés}$$

échelonnés de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , est libre donc une base de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ). Donc :

$$\boxed{\text{Im } \Phi_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

Soit  $Q \in \mathbb{R}[X]$ ; posons  $d^\circ(Q) = r$ . Alors  $Q \in \mathbb{R}_r[X] = \text{Im } \Phi_{r+1}$ . Donc :

$$\exists P \in \mathbb{R}_{r+1}[X], Q = \Phi_{r+1}(P) = \Phi(P).$$

$$\text{D'où } \boxed{\text{Im } \Phi = \mathbb{R}[X]}.$$

IV.B - D'après la question précédente,  $\forall p \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{R}[X], \Phi(P) = X^p$ . On a alors  $\Phi(P - P(0)) = \Phi(P) - \Phi(P(0)) = \Phi(P) = X^p$ .

Donc il existe un polynôme  $P_p = P - P(0)$  tel que  $\Phi(P_p) = X^p$  et  $P_p(0) = 0$ .

Soient 2 polynômes  $P_p$  et  $P'_p$  tels que  $\Phi(P_p) = X^p$  et  $\Phi(P'_p) = X^p$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \Phi(P_p - P'_p) &= 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, P_p - P'_p = \lambda \\ &\Rightarrow \lambda = P_p(0) - P'_p(0) = 0 \end{aligned}$$

D'où  $P_p = P'_p$  et il y a unicité de  $P_p \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\Phi(P_p) = X^p$  et  $P_p(0) = 0$ . On a montré :

$$\boxed{\exists! P_p \in \mathbb{R}[X], \Phi(P_p) = X^p \text{ et } P_p(0) = 0}$$

$$\text{IV.C.1) } \Phi(Q_p) = Q_p(X+1) - Q_p(X)$$

$$= P'_p(X+1) - P'_p(X) \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi(Q_p) = \begin{cases} pX^{p-1} & \text{si } p > 0 \text{ (car } P_p(X+1) - P_p(X) = X^p) \\ 0 & \text{si } p = 0 \end{cases}}$$

$$\text{IV.C.2) L'on a } \forall p \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} Q_p(0) = P'_p(0) - P'_p(0) = 0 \\ \Phi(\frac{Q_p}{p}) = X^{p-1} = \Phi(P_{p-1}) \end{cases}. \text{ Or il existe un polynôme unique } P_{p-1}$$

vérifiant  $P_{p-1}(0) = 0$  et  $\Phi(P_{p-1}) = X^{p-1}$ . D'où  $\frac{Q_p}{p} = P_{p-1}$ . On a montré :

$$\boxed{\forall p \geq 1, P_{p-1} = pQ_p}$$

IV.D - Déterminons  $P_0$ ; posons  $P_0 = aX + b$  puisque  $\text{Im } \Phi_1 = \mathbb{R}_0[X]$ .

$$P_0(X+1) - P_0(X) = 1 \Leftrightarrow a(X+1) + b - (aX + b) = 1$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

$$P_0(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0. \text{ Donc } \boxed{P_0 = X}$$

On a alors  $Q_1 = P_0$  (d'après IV.C.2)); d'où  $P'_1(X) - P'_1(0) = X \Leftrightarrow$

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P_1 = \frac{X^2}{2} + \alpha X + \beta; \text{ Comme } P_1(0) = 0, \beta = 0. \text{ Or le terme constant de } \Phi(X^2) \text{ vaut}$$



$$\text{D'où } \Phi(P_1) = \frac{\Phi(X^2)}{2} + \alpha\Phi(X) \Rightarrow \frac{1}{2} + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } \boxed{P_1 = \frac{X^2 - X}{2}}.$$

On a alors  $Q_2 = 2P_1$  (d'après IV.C.2)); d'où  $P_2'(X) - P_2'(0) = X^2 - X \Leftrightarrow$

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P_2 = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \alpha X + \beta$ ; Comme  $P_2(0) = 0, \beta = 0$ . Or le terme constant de  $\Phi(X^3)$  vaut 1.

$$\text{D'où } \Phi(P_2) = \frac{\Phi(X^3)}{3} - \frac{\Phi(X^2)}{2} + \alpha\Phi(X) \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Donc } \boxed{P_2 = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6}}.$$

On a alors  $Q_3 = 3P_2$  (d'après IV.C.2)); d'où  $P_3'(X) - P_3'(0) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{X}{2} \Leftrightarrow$

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P_3 = \frac{X^4}{4} - \frac{X^3}{2} + \frac{X^2}{4} + \alpha X + \beta$ ; Comme  $P_3(0) = 0, \beta = 0$ . Or le terme constant de  $\Phi(X^4)$  vaut 1.

$$\text{D'où } \Phi(P_3) = \frac{\Phi(X^4)}{4} - \frac{\Phi(X^3)}{2} + \frac{\Phi(X^2)}{4} + \alpha\Phi(X)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0.$$

$$\text{Donc } \boxed{P_3 = \frac{X^4}{4} - \frac{X^3}{2} + \frac{X^2}{4}}.$$

On a alors  $Q_4 = 4P_3$  (d'après IV.C.2)); d'où  $P_4'(X) - P_4'(0) = X^4 - 2X^3 + X^2 \Leftrightarrow$

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P_4 = \frac{X^5}{5} - \frac{X^4}{2} + \frac{X^3}{3} + \alpha X + \beta$ ; Comme  $P_4(0) = 0, \beta = 0$ . Or le terme constant de  $\Phi(X^5)$  vaut 1.

$$\text{D'où } \Phi(P_4) = \frac{\Phi(X^5)}{5} - \frac{\Phi(X^4)}{2} + \frac{\Phi(X^3)}{3} + \alpha\Phi(X)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-6 + 15 - 10}{30} = -\frac{1}{30}.$$

$$\text{Donc } \boxed{P_4 = \frac{X^5}{5} - \frac{X^4}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X}{30}}.$$

On a alors  $Q_5 = 5P_4$  (d'après IV.C.2)); d'où  $P_5'(X) - P_5'(0) = X^5 - \frac{5}{2}X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{X}{6} \Leftrightarrow$

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P_5 = \frac{X^6}{6} - \frac{X^5}{2} + \frac{5X^4}{12} - \frac{X^2}{12} + \alpha X + \beta$ ; Comme  $P_5(0) = 0, \beta = 0$ . Or le terme constant de  $\Phi(X^6)$  vaut 1.

$$\text{D'où } \Phi(P_5) = \frac{\Phi(X^6)}{6} - \frac{1}{2}\Phi(X^5) + \frac{5\Phi(X^4)}{12} - \frac{\Phi(X^2)}{12} + \alpha\Phi(X)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{5}{12} - \frac{1}{12} + \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0.$$

$$\text{Donc } \boxed{P_5 = \frac{X^6}{6} - \frac{X^5}{2} + \frac{5X^4}{12} - \frac{X^2}{12}}.$$

IV.E - Étudions  $P_5$  sur  $[0, 1]$ .

$$\forall x \in [0, 1], P_5'(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{x}{6}$$

$$= x(x-1) \left( x - \frac{1}{2} \right) \left( x^2 - x - \frac{1}{3} \right). \text{ Les racines de } x^2 - x - \frac{1}{3} \text{ sont } \frac{1 \pm \sqrt{\frac{7}{3}}}{2} \text{ et}$$

situées de part et d'autre de  $[0, 1]$ .

L'on en déduit le tableau de variations de  $P_5$  :

|           |   |                  |            |
|-----------|---|------------------|------------|
| $x$       | 0 | $\frac{1}{2}$    | 1          |
| $P_5'(x)$ | 0 | −                | 0          |
| $P_5(x)$  | 0 | $\searrow$       | $\nearrow$ |
|           |   | $-\frac{1}{128}$ | 0          |

D'où :

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], -\frac{1}{128} \leq P_5(x) \leq 0}$$

$$\begin{aligned}
\text{IV.F.1)} - I_{p+1}(k) &= \int_0^1 \frac{(p+1)P_p(t)}{(t+k)^{p+2}} dt \\
&= \left[ \frac{(p+1)P_p(t)}{-(p+1)(t+k)^{p+1}} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{P'_p(t)}{(t+k)^{p+1}} dt \\
&= \int_0^1 \frac{P'_p(t)}{(t+k)^{p+1}} dt \quad (\text{car } P_p(0) = 0 \text{ et } P_p(1) = P_p(0) = 0) \\
&= \int_0^1 \frac{Q_p(t) + P'_p(0)}{(t+k)^{p+1}} dt \\
&= \int_0^1 \frac{pP_{p-1}(t) + P'_p(0)}{(t+k)^{p+1}} dt \\
&= I_p(k) + P'_p(0) \int_0^1 \frac{1}{(t+k)^{p+1}} dt \\
&= I_p(k) + P'_p(0) \left[ \frac{1}{-p(t+k)^p} \right]_0^1. \text{ D'où :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, I_{p+1}(k) = I_p(k) + \frac{P'_p(0)}{p} \left( \frac{1}{k^p} - \frac{1}{(k+1)^p} \right)}$$

$$\begin{aligned}
\text{IV.F.2)} I_1(k) &= \int_0^1 \frac{t}{(t+k)^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{t+k} dt - \int_0^1 \frac{k}{(t+k)^2} dt \\
&= \ln \frac{k+1}{k} + k \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \\
&= \ln \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{I_1(k) = \ln \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} = w_{k+1}}$$

$$\begin{aligned}
\text{IV.F.3)} I_6(k) &= I_5(k) + \frac{P'_5(0)}{5} \left( \frac{1}{k^5} - \frac{1}{(k+1)^5} \right) \\
&= I_5(k) \quad \text{car } P'_5(0) = 0 \\
&= I_4(k) - \frac{1}{120} \left( \frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4} \right) \quad \text{car } P'_4(0) = -\frac{1}{30} \\
&= -\frac{1}{120} \left( \frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4} \right) + I_3(k) + \frac{P'_3(0)}{3} \left( \frac{1}{k^3} - \frac{1}{(k+1)^3} \right) \\
&= -\frac{1}{120} \left( \frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4} \right) + I_3(k) \quad \text{car } P'_3(0) = 0 \\
&= -\frac{1}{120} \left( \frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4} \right) + \frac{1}{12} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) + I_2(k) \quad \text{car } P'_2(0) = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{120} \left( \frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4} \right) + \frac{1}{12} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) + P_1'(0) \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + I_1(k) \\
&= -\frac{1}{120} \left( \frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4} \right) + \frac{1}{12} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + I_1(k) \text{ car}
\end{aligned}$$

$$P_1'(0) = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{D'où : } \boxed{I_6(k) = -\frac{1}{120} \left( \frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4} \right) + \frac{1}{12} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + I_1(k)}$$

$$\text{IV.F.4) D'après IV.E, } -\frac{1}{128} \int_0^1 \frac{6}{(t+k)^7} dt \leq I_6(k) \leq 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{128} \left[ -\frac{1}{(t+k)^6} \right]_0^1 \leq I_6(k) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{-\frac{1}{128} \left[ \frac{1}{k^6} - \frac{1}{(k+1)^6} \right] \leq I_6(k) \leq 0}$$

IV.F.5) On obtient  $\Rightarrow$  alors :

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{128} \left[ \frac{1}{k^6} - \frac{1}{(k+1)^6} \right] \leq -\frac{1}{120} \left( \frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4} \right) + \\
&\quad \frac{1}{12} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \ln \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq 0 \Rightarrow \\
&-\frac{1}{128} \left[ \frac{1}{k^6} - \frac{1}{(k+1)^6} \right] + \frac{1}{120} \left( \frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4} \right) - \frac{1}{12} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&\quad \leq w_{k+1} \leq \frac{1}{120} \left( \frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4} \right) - \frac{1}{12} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \Rightarrow \\
&\sum_{p=n+1}^{+\infty} \left[ -\frac{1}{128} \left[ \frac{1}{(p-1)^6} - \frac{1}{p^6} \right] + \frac{1}{120} \left( \frac{1}{(p-1)^4} - \frac{1}{p^4} \right) - \frac{1}{12} \left( \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) \right] \leq \\
&\quad \sum_{p=n+1}^{+\infty} w_p \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{120} \left( \frac{1}{(p-1)^4} - \frac{1}{p^4} \right) - \frac{1}{12} \left( \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) \right] \Rightarrow \\
&\quad \boxed{-\frac{1}{128n^6} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{2n} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{2n}}
\end{aligned}$$

IV.F.6) On en déduit :

$$-\frac{1}{120n^4} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{2n} + u_n \leq \gamma \leq \frac{1}{128n^6} - \frac{1}{120n^4} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{2n} + u_n. \text{ Cherchons une valeur}$$

approchée de  $\gamma$  à  $10^{-11}$  près en rendant  $\frac{1}{128n^6} \leq 2 \times 10^{-11} \Leftrightarrow n^6 \geq \frac{10^{11}}{256} \Leftrightarrow n \geq 28$ .

Pour  $n = 28$ , on obtient :

$0.577\ 215\ 664\ 89 < \gamma < 0.577\ 215\ 664\ 92$ ; donc

les 10 premières décimales de  $\gamma$  sont 577215664 plus un 8 ou un 9. Pour conclure, il faut un encadrement plus fin; en prenant  $n = 38$  par exemple, on trouve que la dernière décimale est un 9.

∞∞∞∞∞∞∞∞∞

Rédigé par

Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI  
Lycée Chaptal, 6, allée Chaptal, 22000 St Brieuc  
Tel. 02 96 63 94 14  
Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr

à l'aide de Scientific Workplace