

CCP, 2011, MP, Mathématiques I.

(5 pages)

Exercice 1

1. Soit, pour $n \geq 2$, $a_n = \frac{2}{n^2-1}$. On a $\forall n \geq 2$, $a_n > 0$ et $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^2-1}{n^2-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc, selon la règle de D'Alembert, $\underline{R=1}$.
2. Pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = b_n - c_n$ et, comme ci-dessus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = 1$ montre que les séries $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n+1}$ ont aussi comme rayon de convergence 1. On peut donc écrire, pour tout $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$,

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \left[\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2} \right]$$

soit $\forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, $S(x) = \frac{1-x^2}{x} \ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2}$ et $S(0) = 0$.

3. Pour $x \in]0, 1[$, $S(x) = \frac{1+x}{x} (1-x) \ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \frac{3}{2}$.

Exercice 2

1. Sur $]0, +\infty[$ l'équation homogène associée à (E) : $2xy' - 3y = 0$ a pour solutions les applications $x \mapsto C \exp\left[\frac{3}{2} \ln|x|\right] = C x^{3/2}$ avec $C \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Puis la méthode de variation de la constante permet d'écrire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sous la forme $y(x) = C(x) x^{3/2}$ avec C dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $2x^{5/2} C'(x) = x^{1/2}$ soit $C(x) = -\frac{1}{2x} + K$.

Ainsi les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont les fonctions $x \mapsto -\frac{\sqrt{x}}{2} + K x^{3/2}$ avec $K \in \mathbb{K}$.

2. Si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$, selon [1], il existe $K \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x > 0$, $y'(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{3K}{2}\sqrt{x}$ et donc $y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ ce qui interdit à y d'être dérivable en 0.

Donc l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$ est vide.

Problème

Question préliminaire

1. (a) $(i) \iff (ii)$.
 (b) $(i) \implies (ii)$.

Partie I

2. (a) $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, il suffit donc de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
 E contient clairement la fonction nulle donc $E \neq \emptyset$ et si $(f, g, \lambda) \in E \times E \times \mathbb{R}$, pour tout $x > 0$, les deux fonctions $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ et $t \mapsto g(t)e^{-xt}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto (f(t) + \lambda g(t))e^{-xt}$ l'est aussi donc $f + \lambda g \in E$. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

- (b) $F = C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et si $f \in F$, on a $\forall x > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+, |f(t)e^{-xt}| \leq \|f\|_\infty e^{-xt}$ et $t \mapsto e^{-xt}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ l'est aussi donc $f \in E$ et donc $F \subset E$. Donc F est un sous-espace vectoriel de E .

- (c) Par linéarité de l'intégrale sur $L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, pour tout $(f, g, \lambda) \in E \times E \times \mathbb{R}$,

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(f + \lambda g)(x) = \int_0^{+\infty} (f(t) + \lambda g(t))e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt + \lambda \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt = \mathcal{L}(f)(x) + \lambda \mathcal{L}(g)(x)$$

soit $\mathcal{L}(f + \lambda g) = \mathcal{L}(f) + \lambda \mathcal{L}(g)$. Donc $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(E, \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$.

3. (a) $\mathcal{U} \in F$ donc $\mathcal{U} \in E$ et $\forall x > 0, \mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty}$ soit $\forall x > 0, \mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \frac{1}{x}$.

- (b) $\diamond$ De même, $h_\lambda \in F$ car $\forall t \in \mathbb{R}_+, |h_\lambda(t)| \leq 1$ donc $h_\lambda \in E$.

$$\diamond \forall x > 0, \mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+\lambda)t} dt = \mathcal{L}(\mathcal{U})(x + \lambda) \text{ donc } \forall x > 0, \mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \frac{1}{x + \lambda} .$$

4. $\diamond \frac{t^n e^{-xt}}{e^{-\frac{xt}{2}}} = t^n e^{-\frac{xt}{2}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $\exists A > 0, \forall t \geq A, \frac{t^n e^{-xt}}{e^{-\frac{xt}{2}}} \leq 1$ soit $\exists A > 0, \forall t \geq A, t^n e^{-xt} \leq e^{-\frac{xt}{2}}$.

$\diamond g_n \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\forall x > 0, g_n(t)e^{-xt} = f(t)t^n e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(f(t)e^{-\frac{xt}{2}}\right)$ et $t \mapsto f(t)e^{-\frac{xt}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto g_n(t)e^{-xt}$ l'est aussi. Ainsi $g_n \in E$.

5. Déjà, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc $f' \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Puisque f est croissante, on a $f' \geq 0$ donc $\forall x > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+, f'(t)e^{-xt} \geq 0$ et, selon [1.a], il suffit de montrer que $\int_0^y f'(t)e^{-xt} dt$ a une limite finie quand y tend vers $+\infty$ pour avoir $f' \in E$. Or, par intégration par parties,

$$\int_0^y f'(t)e^{-xt} dt = \left[f(t)e^{-xt} \right] + x \int_0^y f(t)e^{-xt} dt = f(y)e^{-xy} - f(0) + x \int_0^y f(t)e^{-xt} dt .$$

Or $f \in E$ implique, d'après [1.a], $\forall x > 0$, $\int_0^y f(t)e^{-xt} dt \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x)$. D'autre part, f étant bornée $\forall x > 0$, $\forall y \geq 0$ $|f(y)e^{-xy}| \leq \|f\|_\infty e^{-xy} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$. La limite du membre de droite existe donc quand y tend vers $+\infty$ ce qui donne $\underline{f' \in E \text{ et } \forall x > 0, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)}$.

6. (a) Soit $a > 0$. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur $[a, +\infty[$, en posant pour $(x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+$, $\phi(x, t) = f(t)e^{-xt}$:

- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, l'application $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
- Pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+$, $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) = -tf(t)e^{-xt} = -g_1(t)e^{-xt}$ existe,
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t)$ continue sur $[a, +\infty[$,
- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, l'application $t \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$,
- $\forall x \in [a, +\infty[$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \right| \leq t|f(t)|e^{-at} = |g_1(t)|e^{-at}$ et, selon [4], $t \mapsto g_1(t)e^{-at}$ est intégrable car $g_1 \in E$,

donc $\mathcal{L}(f)$ est C^1 sur $[a, +\infty[$ et $\forall x \in [a, +\infty[$, $(\mathcal{L}(f))'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) dt = -\mathcal{L}(g_1)(x)$.

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, $\underline{\mathcal{L}(f) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } (\mathcal{L}(f))' = -\mathcal{L}(g_1)}$.

(b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^n sur $]0, +\infty[$ et $(\mathcal{L}(f))^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)$:
 → pour $n = 0$, puisque, selon [a], $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, à fortiori, $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^0 sur $]0, +\infty[$ et l'égalité est immédiate car $g_0 = f$;
 → si le résultat est vrai pour n , en appliquant [a] à g_n qui appartient à E d'après [4], on obtient que $\mathcal{L}(g_n)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $(\mathcal{L}(g_n))' = -\mathcal{L}(g_{n+1})$, car $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $tg_n(t) = g_{n+1}(t)$. On a donc $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^{n+1} sur $]0, +\infty[$ et $(\mathcal{L}(f))^{(n+1)} = (-1)^{n+1} \mathcal{L}(g_{n+1})$.

Ainsi $\underline{\mathcal{L}(f) \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{L}(f))^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)}$.

Partie II

7. (a) $f \in F$ donc $\forall x > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)e^{-xt}| \leq \|f\|_\infty e^{-xt}$ donc

$$\forall x > 0, |\mathcal{L}(f)(x)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt} dt \leq \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{\|f\|_\infty}{x},$$

d'après [3.a]. On en déduit que $\underline{\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$.

(b) On retrouve ici les hypothèses de la question [5]: f de classe C^1 , croissante et bornée. On a donc $\forall x > 0$, $x\mathcal{L}(f)(x) = \mathcal{L}(f')(x) + f(0)$. Mais, de plus, f' est bornée donc $f' \in F$ et donc, suivant [a], $\mathcal{L}(f')(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et donc $\underline{x\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(0)}$.

8. (a) On a $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f(t)| = |\ell| < |\ell| + 1$ et donc $\exists A \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \geq A$, $|f(t)| \leq |\ell| + 1$. D'autre part, f est continue sur le segment $[0, A]$ donc elle y est bornée. On a ainsi $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)| \leq \text{Max} \left(\sup_{u \in [0, A]} |f(u)|, |\ell| + 1 \right)$. Ainsi $\underline{f \in F}$.

(b) En effectuant le changement de variable $t = \frac{u}{a_n}$, on a

$$a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = a_n \int_0^{+\infty} f(t)e^{-a_n t} dt = a_n \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{a_n}\right) e^{-u} \frac{1}{a_n} du$$

soit $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} h_n(u) du$ avec $\forall u \in \mathbb{R}_+, h_n(u) = f\left(\frac{u}{a_n}\right) e^{-u}$.

(c) Comme le dit l'énoncé, utilisons le théorème de convergence dominée:

- $\forall n \in \mathbb{N}, h_n \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}_+, |h_n(u)| \leq \|f\|_\infty e^{-u}$ et $u \mapsto \|f\|_\infty e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
- $h_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} h$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $h(u) = \begin{cases} \ell e^{-u} & \text{si } u > 0 \\ f(0) & \text{si } u = 0 \end{cases}$ car $\frac{u}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ si $u > 0$,
- h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

On a donc $\int_0^{+\infty} h_n(u) du \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} h(u) du = \ell \int_0^{+\infty} e^{-u} du$ ce qui donne, avec le résultat du [b],
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

(d) Ceci est vrai pour toute suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ convergeant vers 0 donc la caractérisation séquentielle de la limite permet de conclure que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \mathcal{L}(f)(x) = \ell$ ce qui donne, si $\ell \neq 0$, $\mathcal{L}(f)(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\ell}{x}$.

9. (a) $\diamond$ Puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc aussi sur $[x, +\infty[$ pour $x \geq 0$, R est définie sur $\mathbb{R}_+$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}_+, R(x) = R(0) - \int_0^x f(t) dt$. Or, f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et c'est une primitive de f . On a donc R est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $R' = -f$.

$\diamond$ On ne peut pas appliquer directement le résultat de la question [5] à R qui n'est pas croissante en général. Cependant, d'une part $R' = -f$ appartient à E car $f \in E$ (hypothèse de la partie), d'autre part, R est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0 \in \mathbb{R}$ donc R appartient à F selon [8.a] et la démonstration de l'égalité au [5] n'utilise que le caractère borné de la fonction f et le fait que f et f' soient dans E . Cette démonstration s'applique donc à R et donc $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x \mathcal{L}(R)(x)$.

(b) $\diamond$ On a déjà indiqué ci-dessus que $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = 0$ donc $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}_+, \forall t \geq A, |R(t)| \leq \varepsilon$.

$\diamond$ On a donc, pour $x > 0$, selon [a],

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| &= |x \mathcal{L}(R)(x)| = x \left| \int_0^{+\infty} R(t) e^{-xt} dt \right| \\ &\leq x \int_0^{+\infty} |R(t)| e^{-xt} dt \quad \text{car } R \in E \\ &\leq x \int_0^A |R(t)| e^{-xt} dt + x \int_A^{+\infty} |R(t)| e^{-xt} dt \\ &\leq x \int_0^A |R(t)| dt + x \int_A^{+\infty} \varepsilon e^{-xt} dt \quad \text{car } \mathcal{U} \in E \\ &\leq x \int_0^A |R(t)| dt + x \int_0^{+\infty} \varepsilon e^{-xt} dt \end{aligned}$$

soit $\forall x > 0, |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq x \int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon$.

(c) A étant fixé, $x \int_0^A |R(t)| dt \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} 0$ donc $\exists \eta > 0, \forall x \in]0, \eta[, 0 \leq x \int_0^A |R(t)| dt \leq \varepsilon$ donc $\forall x \in]0, \eta[, |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq 2\varepsilon$. Donc $\mathcal{L}(f)$ se prolonge en 0 par $\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

REMARQUE: Dans le cas où, comme ici, f est supposée intégrable sur $\mathbb{R}_+$, une simple application du théorème de convergence dominée donne le résultat ci-dessus. La démonstration proposée par l'énoncé a l'intérêt de s'appliquer aussi au cas où f n'est pas intégrable mais d'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ improprement convergente comme l'énoncé lui-même le souligne au [10.d].

Partie III

10. (a) La fonction f ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $\frac{\sin t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{ } 1$ et on a, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^1 f(t) dt + \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt \\ &= \int_0^1 f(t) dt + \cos(1) - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt + \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt \end{aligned}$$

car, d'une part, $|\frac{\cos x}{x}| \leq \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et, d'autre part, $\frac{\cos t}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc F admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.

(b) Si f était intégrable sur $\mathbb{R}_+$ alors $\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^{(N+1)\pi} |f(t)| dt \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{ } \int_0^{+\infty} |f(t)| dt$. Mais

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(n+1)\pi} dt = \int_0^\pi \frac{|\sin t|}{(n+1)\pi} dt = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

ce qui montre que $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge. Ainsi f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(c) $\diamond$ On peut écrire $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin t = \Im m(e^{it})$ donc

$$\begin{aligned} \int_0^X \sin t e^{-xt} dt &= \Im m \left(\int_0^X e^{(-x+i)t} dt \right) = \Im m \left(\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} \right]_0^X \right) = \Im m \left(\frac{e^{(-x+i)X} - 1}{-x+i} \right) \\ &= \Im m \left(\frac{(-x-i) \left[(\cos X + i \sin X) e^{-xX} - 1 \right]}{x^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne bien $\forall x > 0$, $\forall X > 0$, $\int_0^X \sin t e^{-xt} dt = -\frac{1}{x^2 + 1} \left[(\cos X + x \sin X) e^{-xX} - 1 \right]$.

$\diamond \sin \in F$ donc $\sin \in E$ donc pour tout $x > 0$, $t \mapsto \sin t e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

$\diamond$ En passant à la limite quand X tend vers $+\infty$ dans la formule ci-dessus, on obtient

$$\forall x > 0, \quad \int_0^{+\infty} \sin t e^{-xt} dt = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

(d) $\diamond f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ donc, selon [8.a], $f \in F$. Donc $f \in E$ et la question [6.a] donne $(\mathcal{L}(f))' = -\mathcal{L}(\sin)$ soit, d'après [c], $\forall x > 0$, $(\mathcal{L}(f))'(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}$. Ainsi, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que donc $\forall x > 0$, $\mathcal{L}(f)(x) = C - \text{Arctan } x$. Mais, selon la question [7], $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$ soit $C = \frac{\pi}{2}$. Finalement, $\forall x > 0$, $\mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } x$.

$\diamond$ Comme on en a fait la remarque à la fin de la question [9], l'intégrabilité de f n'est pas nécessaire pour obtenir le résultat du [9.c]: il est suffisant que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X f(t) dt$ existe pour cela. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan } x \right) = \frac{\pi}{2}$ ce qui donne $\ell = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

* * *
* *
*