

## Corrigé du sujet Centrale MP 1 2018

1. On a par bilinéarité et symétrie du produit scalaire

$$\|a + b\|^2 = \langle a + b | a + b \rangle = \langle a | a \rangle + \langle a | b \rangle + \langle b | a \rangle + \langle b | b \rangle = \|a\|^2 + 2\langle a | b \rangle + \|b\|^2$$

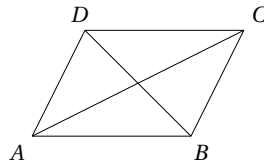
et  $\|a - b\|^2 = \|a\|^2 - 2\langle a | b \rangle + \|b\|^2$  de même, d'où

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

par addition. Si  $ABCD$  est un parallélogramme du plan, et qu'on note  $\overrightarrow{AB} = a$  et  $\overrightarrow{AD} = b$ , l'égalité ci dessus donne

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$$

ce qui signifie que la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses côtés.



2. En considérant  $a = u - v$  et  $b = u - v'$ , il vient

$$\|2u - v - v'\|^2 + \|v' - v\|^2 = 2(\|u - v\|^2 + \|u - v'\|^2) = 4\|u - v\|^2$$

et compte tenu de  $\|v' - v\|^2 > 0$  puisque  $v \neq v'$ , par croissance de la racine carrée et positivité de tous les termes

$$\|2u - v - v'\| < 2\|u - v\|$$

d'où finalement en divisant par 2

$$\left\| u - \frac{v + v'}{2} \right\| < \|u - v\|.$$

3.  $F$  étant non vide, la distance  $r = \inf_{x \in F} \|u - x\|$  de  $u$  à  $F$  est bien définie. Par définition de  $r$ ,  $F$  rencontre la boule fermée  $B$  de centre  $u$  et de rayon  $r + 1$ .  $K = B \cap F$  est donc non vide, fermé comme intersection de fermés, borné car inclus dans  $B$ , donc compact car  $E$  est de dimension finie. L'application

$$x \mapsto \|x - u\|$$

est alors continue sur  $K$ , donc atteint un minimum en un point  $v \in K$ . Comme  $v \in K$ , on a particulier  $v \in F$ , et  $v \in B$  donc  $\|u - v\| \leq r$ . Soit  $w \in F$ .

\* Si  $w \in K$ , alors  $\|u - w\| \geq \|u - v\|$  par définition de  $w$ .

\* Si  $w \in F \setminus K$ , alors  $w \notin B$  donc  $\|u - w\| > r + 1 > r \geq \|u - v\|$ .

On a donc bien  $\|u - w\| \geq \|u - v\|$  pour tout  $w \in F$ , comme voulu.

4. L'existence de  $v$  est assurée par la question précédente. Supposons que  $v' \in F$  vérifie également  $\|u - v'\| \leq \|u - w\|$  pour tout  $w \in F$  et  $v' \neq v$ . On a alors avec la question 2

$$\left\| u - \frac{v + v'}{2} \right\| < \|u - v\|$$

et  $\frac{v + v'}{2} \in F$  par convexité de  $F$ . Ceci est contradictoire avec la définition de  $v$ , et on a prouvé par l'absurde que  $v' = v$  et donc l'unicité de  $v$ .

5. Si  $a$  ou  $b$  est nul, l'inégalité requise est évidente, et l'on suppose donc  $a$  et  $b$  strictement positifs. La fonction  $\ln$  est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$  car dérivable et de dérivée  $x \mapsto \frac{1}{x}$  manifestement décroissante. Il vient, compte tenu de  $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab)$$

d'où par croissance de l'exponentielle

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

comme attendu.

6. Supposons d'abord comme suggéré que  $E(|X|^p) = E(|Y|^q) = 1$  : on a alors avec la question précédente  $|XY| \leq \frac{|X|^p}{p} + \frac{|Y|^q}{q}$  et par croissance et linéarité de l'espérance

$$E(|XY|) \leq \frac{E(|X|^p)}{p} + \frac{E(|Y|^q)}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dans le cas général, on distingue d'abord le cas où  $E(|X|^p) = 0$  :  $|X|^p$  étant positive, elle est presque sûrement nulle, donc  $|XY|$  aussi est le résultat s'ensuit. Il en va de même si  $E(|Y|^q) = 0$ , et on suppose donc ces deux espérances strictement positives : on peut alors poser  $X' = \frac{|X|^p}{E(|X|^p)^{\frac{1}{p}}}$ ,  $Y' = \frac{|Y|^q}{E(|Y|^q)^{\frac{1}{q}}}$ , qui vérifient par linéarité

$$E(|X'|^p) = E\left(\frac{|X|^p}{E(|X|^p)}\right) = \frac{E(|X|^p)}{E(|X|^p)} = 1$$

et  $E(|Y'|^q) = 1$  de même, d'où  $E(|X'Y'|) \leq 1$  puis

$$E(|XY|) \leq E(|X|^p)^{\frac{1}{p}} E(|Y|^q)^{\frac{1}{q}}$$

en multipliant tout par  $E(|X|^p)^{\frac{1}{p}} E(|Y|^q)^{\frac{1}{q}}$  et en exploitant encore une fois la linéarité de l'espérance.

7. On a par définition, puis en exploitant la  $\sigma$ -additivité, compte tenu de  $\{X = x\} = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq m \\ \text{disjointe}}} \{X = x\} \cap A_i$

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} \left( \sum_{i=1}^m xP(X = x; A_i) \right) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{x \in X(\Omega)} xP_{A_i}(X = x) \right) P(A_i) = \sum_{i=1}^m E(X|A_i)P(A_i)$$

comme voulu, en notant que ces sommes sont toutes deux finies ( $\Omega$  est un univers fini), ce qui valide les opérations effectuées.

8. Avec les notations de l'énoncé,  $X^2$  étant à valeurs dans  $\{y_1, \dots, y_n\}$  rangés dans l'ordre strictement croissants,  $t \mapsto P(X^2 \geq t)$  est bien définie, constante de valeur  $P(X^2 \geq y_{i+1})$  sur tous les intervalles  $]y_i, y_{i+1}[$  pour  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  ainsi que sur  $]0, y_1[$  (où elle vaut 1) et  $]y_n, +\infty[$  (où elle est nulle), donc en escalier sur tout segment de  $\mathbb{R}_+$ , donc continue par morceaux. Elle est par ailleurs nulle sur ce dernier intervalle, de sorte que

$$\int_0^{+\infty} P(X^2 \geq t) dt = \int_0^{y_n} P(X^2 \geq t) dt$$

puis par la relation de Chasles, les sauts aux bornes des intégrales n'influençant pas leur valeur

$$\int_0^{+\infty} P(X^2 \geq t) dt = \int_0^{y_1} P(X^2 \geq t) dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} P(X^2 \geq t) dt = \int_0^{y_1} 1 dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} P(X^2 \geq y_{i+1}) dt = y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} P(X^2 \geq y_{i+1})(y_{i+1} - y_i).$$

On en déduit par décalage d'indice

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} P(X^2 \geq t) dt &= y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} P(X^2 \geq y_{i+1})y_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} P(X^2 \geq y_{i+1})y_i \\ &= y_1 + \sum_{i=2}^n P(X^2 \geq y_i)y_i - \sum_{i=1}^{n-1} P(X^2 \geq y_{i+1})y_i \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} (P(X^2 \geq y_i) - P(X^2 \geq y_{i+1}))y_i + P(X^2 \geq y_n)y_n + (1 - P(X^2 \geq y_2))y_1. \end{aligned}$$

Or, pour tout  $i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ ,  $\{X^2 \geq y_{i+1}\} \subset \{X^2 \geq y_i\}$  donc

$$P(X^2 \geq y_i) - P(X^2 \geq y_{i+1}) = P(\{X^2 \geq y_i\} \setminus \{X^2 \geq y_{i+1}\}) = P(\{X^2 \geq y_i\} \cap \{X^2 < y_{i+1}\}) = P(X^2 = y_i).$$

En outre,  $1 - P(X^2 \geq y_2) = P(X^2 < y_2) = P(X^2 = y_1)$  et  $P(X^2 \geq y_n) = P(X^2 = y_n)$ . Il vient enfin

$$\int_0^{+\infty} P(X^2 \geq t) dt = \sum_{i=2}^{n-1} P(X^2 = y_i)y_i + P(X^2 = y_n)y_n + P(X^2 = y_1)y_1 = \sum_{i=1}^n P(X^2 = y_i)y_i = E(X^2).$$

Or, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\{X^2 \geq t\} = \{X \geq \sqrt{t}\}$  par stricte croissance de la racine carrée, et avec le changement de variable usuel  $t = u^2$

$$\int_0^{+\infty} P(X^2 \geq t) dt = \int_0^{+\infty} P(X \geq \sqrt{t}) dt = 2 \int_0^{+\infty} uP(X \geq u) du$$

ce qu'on voulait, le théorème de changement de variable assurant la convergence de cette dernière intégrale. *Remarque* : on a utilisé le théorème de changement de variable pour une intégrale de fonction continue par morceaux, ce que le programme ne permet pas a priori. Un découpage de l'intégrale selon une subdivision subordonnée à une telle fonction continue par morceaux montre que ce résultat est valide sans réelle restriction.

9. Avec ce qui précède et le caractère sous-gaussien

$$E(X^2) = 2 \int_0^{+\infty} tP(X \geq t) dt \leq 2a \int_0^{+\infty} te^{-bt^2} dt = 2a \left[ -\frac{e^{-bt^2}}{2b} \right]_0^{+\infty} = \frac{a}{b}$$

en notant que  $t \mapsto te^{-bt^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et négligeable à l'infini devant  $\frac{1}{t^2}$  par croissances comparées donc intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

10. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , par inégalité triangulaire

$$|X + \delta| \leq |X| + |\delta|$$

d'où  $\{|X + \delta| \geq t\} \subset \{|X| + |\delta| \geq t\} = \{|X| \geq t - |\delta|\}$  et donc

$$P(|X + \delta| \geq t) \leq P(|X| \geq t - |\delta|)$$

comme voulu.

11. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$a - \frac{1}{2}bt^2 + b(t - |\delta|)^2 = \frac{1}{2}bt^2 - 2bt|\delta| + a + b|\delta|^2$$

est un trinôme du second degré en  $t$ , de discriminant réduit

$$b^2\delta^2 - \frac{1}{2}b(a + b|\delta|^2) = \frac{1}{2}(b^2|\delta|^2 - ab) \leq 0$$

puisque  $|\delta| \leq \sqrt{\frac{a}{b}}$ . Il est donc positif sur  $\mathbb{R}$ , ce qu'on voulait.

12. On a par le caractère sous-gaussien de  $X$ , applicable lorsque  $t - |\delta| \geq 0$ , et avec les deux questions précédentes et la croissance de l'exponentielle

$$P(|X + \delta| \geq t) \leq P(|X| \geq t - |\delta|) \leq ae^{-b(t-|\delta|)^2} \leq ae^{a - \frac{1}{2}bt^2} = ae^a e^{-\frac{1}{2}bt^2}$$

comme voulu.

13. Si  $t \in [0, |\delta|]$ , on a toujours  $P(|X + \delta| \geq t) \leq P(|X| \geq t - |\delta|)$  avec  $t - |\delta| < 0$  si bien que

$$P(|X| \geq t - |\delta|) = P(|X| \geq 0) \leq a$$

par le caractère sous-gaussien. Or,  $|\delta| \leq \sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow a - b\delta^2 \geq 0$  et donc

$$a - b\frac{t^2}{2} \geq a - b\frac{\delta^2}{2} \geq a - b\delta^2 \geq 0$$

d'où  $\exp\left(a - b\frac{t^2}{2}\right) \geq 1$  et enfin

$$P(|X| \geq t - |\delta|) \leq ae^a e^{-\frac{1}{2}bt^2}.$$

14. Si  $C$  ne rencontre pas  $X(\Omega)$ ,  $P(X \in C) = 0$  et l'inégalité est triviale.

15. On note  $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$  la décomposition de  $u$  sur  $(e_1, \dots, e_n)$ . Comme  $u \in X(\Omega)$ , on a nécessairement  $u_i \in \{-1, 1\}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  par unicité de la décomposition sur une base. Il vient

$$\frac{1}{4}d(X, u)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(\varepsilon_i - u_i)^2}{4}.$$

et  $v_i = \frac{(\varepsilon_i - u_i)^2}{4}$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Il s'agit donc d'une variable de Bernoulli, et  $\{v_i = 1\} = \{u_i = \varepsilon_i\}$  donc  $P(v_i = 1) = \frac{1}{2}$ . Finalement,  $\frac{1}{4}d(X, u)^2$  est une somme de variables de Bernoulli indépendantes et de paramètre  $\frac{1}{2}$ , donc suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\frac{1}{2}$ .

16. Par la formule de transfert et celle du binôme

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, u)^2\right)\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{\frac{k}{2}} = \frac{1}{2^n} \left(1 + e^{\frac{1}{2}}\right)^n$$

et comme  $e^{\frac{1}{2}} < 3$  (largement...) on a bien

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, u)^2\right)\right) \leq \frac{1}{2^n} 4^n = 2^n.$$

17. Comme  $u \in C$ , par définition même,  $d(X, C) \leq d(X, u)$ . Par ailleurs,  $X(\Omega)$  ne rencontrant  $C$  qu'au point  $u$ , on a par indépendance

$$P(X \in C) = P(X = u) = P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} \{\varepsilon_i = u_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(\varepsilon_i = u_i) = \frac{1}{2^n}$$

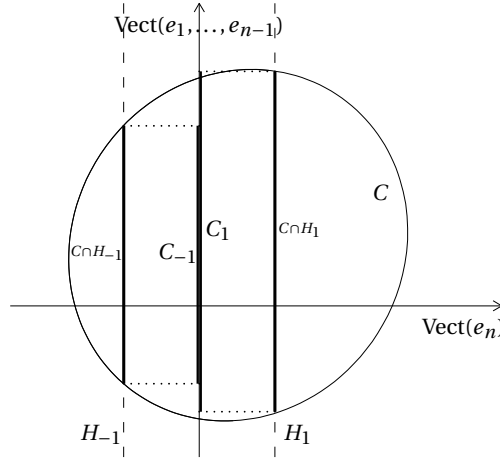
de sorte que

$$P(X \in C)E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right)\right) \leq P(X \in C)E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, u)^2\right)\right) \leq \frac{1}{2^n}2^n = 1$$

comme voulu.

18. Si  $n = 1$ ,  $X(\Omega)$  ne contient que deux vecteurs en tout,  $\varepsilon_1$  et  $-\varepsilon_1$ , et notre hypothèse revient donc à supposer que ces deux vecteurs sont dans  $C$ . On a alors  $P(X \in C) = 1$ ,  $d(X, C) = 0$ , et l'inégalité II.1 est donc triviale puisque son terme de gauche est égal à 1.

19. Soient  $x' \in E'$  et  $t \in \{-1, 1\}$ . On note  $x' = \sum_{k=1}^{n-1} x'_k e_k$  la décomposition de  $x'$  sur  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  (qui est une base de  $E'$ ). On a alors  $x' \in C_t$  si et seulement s'il existe  $x \in H_t \cap C$  tel que  $x' = \pi(x)$ , ou encore si et seulement s'il existe  $y \in E'$  tel que  $x' = \pi(y + te_i)$  et  $y + te_i \in C$ . L'égalité  $\pi(y + te_i) = y = x'$  par définition de  $\pi$  permet de conclure à l'équivalence souhaitée.



20. Soit  $t \in \{-1, 1\}$ .  $C_t \subset E'$  par définition même.

\* Par hypothèse sur  $C$ , il contient au moins deux points, l'un de dernière coordonnée 1 et l'autre de dernière coordonnée  $-1$ , autrement dit  $C \cap H_t \neq \emptyset$  et donc  $C_t = \pi(C \cap H_t) \neq \emptyset$ .

\*  $C_t = \tau^{-1}(C)$  où  $\tau : x \mapsto x + te_n$  est continue de  $E'$  dans  $E$  par continuité des opérations algébriques.  $C_t$  est donc fermé comme image réciproque de fermé par une application continue.

\* Pour tout  $(x', y') \in C_t^2$ , et tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on a  $(x' + te_n, y' + te_n) \in C^2$  donc

$$\lambda(x' + te_n) + (1 - \lambda)(y' + te_n) = \lambda x' + (1 - \lambda)y' + te_n \in C$$

par convexité de  $C$ , d'où  $\lambda x' + (1 - \lambda)y' \in C_t$ , et  $C_t$  est convexe.

21. On a

$$\{X \in C\} = \{X \in C; \varepsilon_n = 1\} \cup \{X \in C; \varepsilon_n = -1\} = \{X' + e_n \in C; \varepsilon_n = 1\} \cup \{X' - e_n \in C; \varepsilon_n = -1\} = \{X' \in C_1; \varepsilon_n = 1\} \cup \{X' \in C_{-1}; \varepsilon_n = -1\}.$$

Cette réunion est évidemment disjointe, et  $X = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i e_i$  est une fonction de  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$  donc indépendante de  $\varepsilon_n$  par le lemme des coalitions. Il vient comme voulu

$$P(X \in C) = P(X' \in C_1; \varepsilon_n = 1) + P(X' \in C_{-1}; \varepsilon_n = -1) = P(X' \in C_1)P(\varepsilon_n = 1) + P(X' \in C_{-1})P(\varepsilon_n = -1) = \frac{1}{2}(P(X' \in C_1) + P(X' \in C_{-1})).$$

22. On a  $Y_{\varepsilon_n} \in C_{\varepsilon_n}$  par définition, donc  $Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n \in C$ , et de même  $Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n \in C$ , de sorte que pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) \in C$  par convexité de  $C$ . On en déduit donc par définition de la distance d'un point à une partie que

$$d(X, C) \leq \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X\|.$$

23. On a  $X = X' + \varepsilon_n e_n$  par définition d'où

$$\|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X\| = \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X' - \varepsilon_n e_n\| = \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X') - 2\lambda\varepsilon_n e_n\|$$

et comme  $(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X') \in E'$  (puisque  $E'$  est un sous-espace) et  $-2\lambda\varepsilon_n e_n \in \text{Vect}(e_n) = E'^{\perp}$ , il vient par le théorème de Pythagore

$$\|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X') - 2\lambda\varepsilon_n e_n\|^2 = \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2 + 4\lambda^2$$

d'où la première inégalité voulue avec la question précédente par croissance du carré sur  $\mathbb{R}_+$ . On montre ensuite que  $x \mapsto \|x\|^2$  est convexe sur  $E$ .

\*  $\varphi : r \mapsto r^2$  est convexe sur  $\mathbb{R}$  car dérivable et de dérivée  $r \mapsto 2r$  visiblement croissante.

\* Pour tout  $(x, y) \in E^2$  de coordonnées respectives  $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$  sur  $(e_1, \dots, e_n)$ , et pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on a donc

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + (1-\lambda)y_i)^2 = \sum_{i=1}^n \varphi(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i) \leq \sum_{i=1}^n (\lambda \varphi(x_i) + (1-\lambda)\varphi(y_i)) = \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 + (1-\lambda) \sum_{i=1}^n y_i^2 = \lambda \|x\|^2 + (1-\lambda) \|y\|^2.$$

Ceci fournit

$$\|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2 \leq (1-\lambda)\|Y_{\varepsilon_n} - X'\|^2 + \lambda\|Y_{-\varepsilon_n} - X'\|^2$$

et donc la seconde inégalité voulue.

**24.** Par hypothèse,  $C \cap X(\Omega)$  contient au moins un vecteur de dernière coordonnée  $-1$ , autrement dit  $X(\Omega) \cap C \cap H_{-1} \neq \emptyset$ . Comme  $P(X = x) = \frac{1}{2^n}$  pour tout  $x \in X(\Omega)$ , on a bien en notant  $y$  un élément quelconque de  $X(\Omega) \cap C \cap H_{-1}$

$$p_- = P(X' \in C_{-1}) = P(X \in C \cap H_{-1}) \geq P(X = y) = \frac{1}{2^n} > 0.$$

**25.** Par croissance de l'espérance conditionnelle, avec 23

$$\begin{aligned} E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right)\right)\Big|_{\varepsilon_n = -1} &\leq e^{\frac{\lambda^2}{2}} E\left(\exp\left(\frac{1-\lambda}{8}d(X', C_{\varepsilon_n})^2 + \frac{\lambda}{8}d(X', C_{-\varepsilon_n})^2\right)\right)\Big|_{\varepsilon_n = -1} \\ &\leq e^{\frac{\lambda^2}{2}} E\left(\exp\left(\frac{1-\lambda}{8}d(X', C_{-1})^2 + \frac{\lambda}{8}d(X', C_1)^2\right)\right)\Big|_{\varepsilon_n = -1} \\ &\leq e^{\frac{\lambda^2}{2}} E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_{-1})^2\right)^{1-\lambda} \exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_1)^2\right)^\lambda\right)\Big|_{\varepsilon_n = -1}. \end{aligned}$$

Cependant,  $X'$  et  $\varepsilon_n$  sont indépendants, si bien que la loi conditionnelle de  $X'$  sachant  $\{\varepsilon_n = -1\}$  est la même que la loi de  $X'$ . Il vient bien

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right)\right)\Big|_{\varepsilon_n = -1} \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}} E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_{-1})^2\right)^{1-\lambda} \exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_1)^2\right)^\lambda\right).$$

**26.** Si  $\lambda \in ]0, 1[$ , avec l'inégalité de Hölder (question 6) appliquée à  $p = \frac{1}{\lambda}$  et donc  $q = \frac{1}{1-\lambda}$ , il vient directement

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right)\right)\Big|_{\varepsilon_n = -1} \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}} E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_{-1})^2\right)\right)^{1-\lambda} E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_1)^2\right)\right)^\lambda.$$

Le résultat reste valide par passage à la limite pour  $\lambda = 0$  et  $\lambda = 1$  par continuité du majorant selon  $\lambda$ .

**27.** On applique II.1 à  $E', X'$  et  $C_1$  qui vérifient bien toutes les hypothèses, dont le fait que  $\dim E' = n - 1$ . Il vient

$$P(X' \in C_1)E\left(\frac{1}{8}d(X', C_1)^2\right) \leq 1.$$

Or, sachant  $\{\varepsilon_n = 1\}$ , on a  $d(X, C) \leq d(X', C_1)$  avec 23, en prenant  $\lambda = 0$ . Il vient par croissance de l'espérance conditionnelle et indépendance de  $X'$  et  $\varepsilon_n$

$$P(X' \in C_1)E\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right)\Big|_{\varepsilon_n = 1} \leq P(X' \in C_1)E\left(\frac{1}{8}d(X', C_1)^2\right)\Big|_{\varepsilon_n = 1} = P(X' \in C_1)E\left(\frac{1}{8}d(X', C_1)^2\right) \leq 1$$

et donc

$$E\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right)\Big|_{\varepsilon_n = 1} \leq \frac{1}{p_+}$$

comme voulu.

**28.** Avec la formule de l'espérance totale et tout ce qui précède, il vient en réutilisant l'hypothèse de récurrence pour  $E', X'$  et  $C_{-1}$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right) &= \frac{1}{2}E\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right)\Big|_{\varepsilon_n = 1} + \frac{1}{2}E\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right)\Big|_{\varepsilon_n = -1} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_+} + e^{\frac{\lambda^2}{2}} E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_{-1})^2\right)\right)^{1-\lambda} E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_1)^2\right)\right)^\lambda\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_+} + e^{\frac{\lambda^2}{2}} \frac{1}{p_-^{1-\lambda}} \frac{1}{p_+^\lambda}\right). \end{aligned}$$

29. On a

$$p_-^{1-\lambda} p_+^\lambda = p_+ \left( \frac{p_-}{p_+} \right)^{1-\lambda} = p_+ (1-\lambda)^{1-\lambda}$$

d'où avec l'inégalité précédente, comme souhaité

$$E\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right) \leq \frac{1}{2p_+} \left( \frac{1}{p_+} + e^{\frac{\lambda^2}{2}} (1-\lambda)^{\lambda-1} \right).$$

30. On pose

$$\varphi : x \mapsto \ln(2+x) - \ln(2-x) - \frac{x^2}{2} - (x-1)\ln(1-x)$$

qui est bien définie et de classe  $C^\infty$  sur  $[0, 1[$ , et pour tout  $x \in [0, 1[$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} - x - \ln(1-x) - 1 = \frac{x^2}{4-x^2} - x - \ln(1-x).$$

Or,  $\frac{x^2}{4-x^2} \geq 0$  et  $\ln(1-x) \leq -x$  par inégalité usuelle de concavité, donc  $\varphi'(x) \geq 0$  et  $\varphi$  est croissante. Comme  $\varphi(0) = 0$ , on en déduit que  $\varphi$  est positive, ce qu'on voulait.

31. Par croissance de l'exponentielle, pour tout  $x \in [0, 1[$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} (1-x)^{x-1} \leq \frac{2+x}{2-x}$$

puis en ajoutant 1 des deux côtés

$$1 + e^{-\frac{x^2}{2}} (1-x)^{x-1} \leq 1 + \frac{2+x}{2-x} = \frac{4}{2-x}$$

comme voulu.

32. Avec 29 et 31, il vient en utilisant 21

$$E\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right) \leq \frac{1}{2p_+} \frac{4}{1 + \frac{p_-}{p_+}} = \frac{2}{p_+ + p_-} = \frac{1}{P(X \in C)}$$

ce qui conclut l'hérédité en multipliant tout par  $P(X \in C)$ , puis la récurrence.

33. On a  $\{d(X, C) \geq t\} = \left\{ \exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right) \geq e^{\frac{t^2}{8}} \right\}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par stricte croissance de toutes les opérations effectuées, puis d'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable positive  $\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right)$

$$P(d(X, C) \geq t) = P\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right) \geq e^{\frac{t^2}{8}}\right) \leq e^{-\frac{t^2}{8}} E\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right) \leq \frac{e^{-\frac{t^2}{8}}}{P(X \in C)}$$

ce qui donne bien l'inégalité de Talagrand en multipliant tout par  $P(X \in C)$ .

34.  $g$  est continue par continuité de la norme et du produit matriciel, de sorte que  $C = g^{-1}([-\infty, r])$  est fermé comme image réciproque de fermé par une application continue. En outre, pour tout  $(M, M') \in C^2$  et tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on a par inégalité triangulaire

$$g(\lambda M + (1-\lambda)M') = \|(\lambda M + (1-\lambda)M')u\| \leq \lambda g(M) + (1-\lambda)g(M') \leq \lambda r + (1-\lambda)r = r$$

de sorte que  $\lambda M + (1-\lambda)M' \in C$  et  $C$  est convexe.

35. Soit  $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq d}} \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ , alors par inégalité de Cauchy Schwarz et en exploitant  $\|u\| = 1$

$$\|Mu\|^2 = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{\ell=1}^d m_{i,\ell} u_\ell \right)^2 \leq \sum_{i=1}^k \left( \sum_{\ell=1}^d m_{i,\ell}^2 \right) \left( \sum_{\ell=1}^d u_\ell^2 \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{\ell=1}^d m_{i,\ell}^2 = \|M\|_F^2$$

d'où le résultat par croissance de la racine carrée.

36. Soit  $M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ . Si  $d(M, C) < t$ , alors il existe  $M' \in C$  tel que  $\|M - M'\|_F < t$  d'où

$$g(M) = \|Mu\| = \|(M - M' + M')u\| \leq \|(M - M')u\| + \|M'u\| \leq \|M - M'\|_F + g(M') < t + r$$

comme voulu.

**37.** On peut assimiler  $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}^{kd}$  ce qui permet d'appliquer l'inégalité de Talagrand à  $C$ , convexe fermé non vide (il contient la matrice nulle) et  $X$ , dont les coordonnées dans la base canonique de  $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$  (qui est orthonormale pour le produit scalaire canonique) sont bien des variables de Rademacher indépendantes. Or avec la question précédente

$$\{d(X, C) < t\} \subset \{g(X) < r + t\} \iff \{d(X, C) \geq t\} \supset \{g(X) \geq r + t\}$$

d'où comme souhaité

$$P(g(X) \leq r)P(g(X) \geq r + t) = P(X \in C)P(g(X) \geq r + t) \leq P(X \in C)P(d(X, C) \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{8}}.$$

**38.** Comme suggéré, on considère  $G: t \mapsto P(g(X) \leq t)$ .  $X(\Omega)$  est fini, donc  $g(X(\Omega))$  aussi, et en notant  $r$  le cardinal de cet ensemble, on peut l'énumérer sous la forme  $g(X(\Omega)) = \{y_1, \dots, y_r\}$  en supposant  $y_1 < \dots < y_r$ .  $G$  est croissante puisque  $\{g(X) \leq t\} \subset \{g(X) \leq s\}$  si  $t \leq s$  et par croissance de  $P$ . De plus,  $G$  est nulle sur  $]-\infty, y_1[$ , égale à 1 sur  $[y_r, +\infty[$ , et plus généralement constante égale à  $P(g(X) \leq y_i)$  sur chaque intervalle  $[y_i, y_{i+1}[$  pour  $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ . On peut alors poser  $j = \min \left\{ i \in \llbracket 1, r \rrbracket, G(y_i) \geq \frac{1}{2} \right\}$ ; cet ensemble étant non vide puisqu'il contient  $n$ .

\* On a déjà  $P(g(X) \leq y_j) = G(y_j) \geq \frac{1}{2}$  par définition de  $j$ .

\* On a de plus

$$P(g(X) \geq y_j) = 1 - P(g(X) < y_j) = 1 - P(g(X) \leq y_{j-1}) = 1 - G(y_{j-1}) \geq \frac{1}{2}$$

toujours par définition de  $j$  puisque  $G(y_{j-1}) < \frac{1}{2}$ .

$m = y_j$  est donc une médiane pour  $g(X)$ .

**39.** On a pour tout  $t > 0$  et toute médiane  $m$  de  $g(X)$

$$P(|g(X) - m| \geq t) = P(g(X) - m \geq t) + P(-g(X) + m \geq t) = P(g(X) \geq m + t) + P(g(X) \leq m - t)$$

et avec 37

$$P(g(X) \leq m)P(g(X) \geq m + t) \leq e^{-\frac{t^2}{8}} \Rightarrow P(g(X) \geq m + t) \leq \frac{1}{P(g(X) \leq m)} e^{-\frac{t^2}{8}} \leq 2e^{-\frac{t^2}{8}}$$

par définition de  $m$ . De même

$$P(g(X) \leq m - t) \leq \frac{1}{P(g(X) \geq m)} e^{-\frac{t^2}{8}} \leq 2e^{-\frac{t^2}{8}}$$

et donc comme attendu

$$P(|g(X) - m| \geq t) \leq 4e^{-\frac{t^2}{8}}.$$

**40.** Avec la question 8, on a directement

$$E((g(X) - m)^2) = 2 \int_0^{+\infty} tP(|g(X) - m| \geq t) dt \leq \int_0^{+\infty} 8te^{-\frac{t^2}{8}} dt = 32 \left[ -e^{-\frac{t^2}{8}} \right]_0^{+\infty} = 32.$$

**41.** On a

$$g(X)^2 = \|Xu\|^2 = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{\ell=1}^d \varepsilon_{i,\ell} u_\ell \right)^2$$

puis par linéarité de l'espérance

$$E(g(X)^2) = \sum_{i=1}^k E \left( \left( \sum_{\ell=1}^d \varepsilon_{i,\ell} u_\ell \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{\ell=1}^d \sum_{m=1}^d u_\ell u_m E(\varepsilon_{i,\ell} \varepsilon_{i,m}).$$

Pour  $(i, \ell, m) \in \llbracket 1, k \rrbracket \times \llbracket 1, d \rrbracket^2$ , si  $\ell \neq m$ , alors par indépendance

$$E(\varepsilon_{i,\ell} \varepsilon_{i,m}) = E(\varepsilon_{i,\ell})E(\varepsilon_{i,m}) = 0$$

tandis que si  $\ell = m$ ,  $E(\varepsilon_{i,\ell} \varepsilon_{i,m}) = E(\varepsilon_{i,\ell}^2) = 1$ . Il reste bien compte tenu de  $\|u\| = 1$

$$E(g(X)^2) = \sum_{i=1}^k \sum_{\ell=1}^d u_\ell^2 = \sum_{i=1}^k 1 = k.$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance, il vient directement

$$E(g(X)) = E(g(X) \times 1) \leq \sqrt{E(g(X)^2)E(1^2)} = \sqrt{k}.$$

42. On a immédiatement

$$E((g(X) - m)^2) = E(g(X)^2) - 2mE(g(X)) + m^2 = k - 2mE(g(X)) + m^2 \geq k - 2m\sqrt{k} + m^2 = (\sqrt{k} - m)^2$$

comme voulu.

43. L'inégalité 39 montre le caractère sous-gaussien de  $|g(X) - m|$  avec des constantes  $a = 4$  et  $b = \frac{1}{8}$ , de sorte que  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{32}$ . Avec 40 et 42, on a en particulier

$$(\sqrt{k} - m)^2 \leq 32.$$

Avec  $\delta = m - \sqrt{k}$ , la condition énoncée en 9 est donc vérifiée, et il vient bien avec 12 et 13 pour tout  $t > 0$

$$P(|g(X) - m + \delta| \geq t) = P(|g(X) - \sqrt{k}| \geq t) \leq 4e^4 e^{-\frac{t^2}{16}}.$$

44. On a directement avec la question précédente pour  $t = \varepsilon\sqrt{k}$

$$P(|g(X) - \sqrt{k}| \geq \varepsilon\sqrt{k}) = P\left(\left|\|A_k u\| - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq 4e^4 e^{-\frac{k\varepsilon^2}{16}}.$$

Or,  $\frac{k\varepsilon^2}{16} \geq 10 \ln(1/\delta)$  d'où

$$P\left(\left|\|A_k u\| - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq 4e^4 e^{10 \ln(\delta)} = 4e^4 \delta^{10}.$$

Or  $\varepsilon < 3$  et  $\delta < \frac{1}{2}$  donc  $4e^4 \delta^9 \leq \frac{4 \times 81}{2^9} = \frac{81}{128} < 1$  d'où finalement

$$P\left(\left|\|A_k u\| - 1\right| > \varepsilon\right) \leq P\left(\left|\|A_k u\| - 1\right| \geq \varepsilon\right) < \delta.$$

45. On a  $\overline{E_{i,j}} = \left\{\left|\|A_k u\| - 1\right| > \varepsilon\right\}$  et en appliquant le résultat de la question précédente à  $u = \frac{v_i - v_j}{\|v_i - v_j\|}$  qui est bien unitaire, on a directement

$$P(\overline{E_{i,j}}) < \delta.$$

46. Il vient par sous-additivité

$$P\left(\bigcap_{1 \leq i < j \leq N} E_{i,j}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \overline{E_{i,j}}\right) \geq 1 - \sum_{1 \leq i < j \leq N} P(\overline{E_{i,j}}) \geq 1 - \delta \sum_{1 \leq i < j \leq N} 1 = 1 - \frac{N(N-1)}{2} \delta$$

comme voulu.

47. On choisit  $\delta > 0$  tel que  $\frac{N(N-1)}{2} \delta < 1 \iff \delta < \frac{2}{N(N-1)}$ , par exemple (largement)  $\delta = \frac{1}{N^2}$ . On constate alors que

$$P\left(\bigcap_{1 \leq i < j \leq N} E_{i,j}\right) > 0$$

de sorte qu'il existe en particulier des valeurs de la variable aléatoire  $X$  telles que tous les événements  $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq N}}$  soient simultanément réalisés (on notera que par symétrie des rôles,  $E_{i,j} = E_{j,i}$ ), ce qui revient à dire que pour une telle valeur de  $X$ ,  $A_k$  est canoniquement associée à une  $\varepsilon$ -isométrie  $f$  pour  $(v_1, \dots, v_N)$ , et donc en particulier qu'un tel objet existe. Ce choix impose

$$k \geq 160 \frac{\ln(N^2)}{\varepsilon^2} = 320 \frac{\ln(N)}{\varepsilon^2}.$$

On constate donc que la constante  $c = 320$  convient, ce qui démontre le théorème de Johnson et Lindenstrauss.