CINP - Corrigé de Mathématiques I - Filière MP

Session 2022

Par M.TARQI

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées[1].

•••••••••••

Exercice

Q1. Si X est une variable aléatoire qui suit une loi géométrique, alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p(X = k) = (1-p)^{k-1}p$, d'où

$$\forall t \in]-1,1[, \quad G_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p(X=k)t^k = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}(t-pt)^k = \frac{p}{1-p}\frac{t-pt}{1-t+pt}$$

donc

$$G_X(t) = \frac{pt}{pt-t+1}.$$

Nous obtenons alors $G'_X(t) = \dfrac{p}{(pt-t+1)^2}$ et donc $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \dfrac{1}{p}$.

Q2. Il y a $10^4 = 10000$ codes possibles mais un seul "code secret". Donc la probabilité de tomber sur le bon code est $p = \dfrac{1}{10000}$.

Q3. Comme on essaie un code au hasard choisi par les codes non encore testés, X prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ où $n = 10000$. On remarque que $p(X = k) = p(X > k-1) - p(X > k)$, donc il suffit de calculer $p(X > k)$. L'événement $(X > k)$ est réalisé si, et seulement si, les k premiers essais ne conviennent pas. Notons A_i l'événement

« on fait au moins i essais et le i-ème ne convient pas »

Pour l'essai numéro i, il y a avait un code parmi $n-i+1$ qui convient, donc la probabilité que le code numéro i ne convient pas est donc $1 - \dfrac{1}{n-i+1} = \dfrac{n-i}{n-i+1}$. La formule des probabilités composées donne :

$$\begin{aligned}
p(X > k) &= p(A_k) && (1)\\
&= p(A_k/A_{k-1}) \times p(A_{k-1}/A_{k-2}) \times \ldots \times p(A_1) && (2)\\
&= \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i}{n-i+1} && (3)\\
&= \frac{n-k}{n} && (4)
\end{aligned}$$

1. medtarqi@yahoo.fr

D'où $p(X=k)=p(X>k-1)-p(X>k)=\dfrac{n-k+1}{n}-\dfrac{n-k}{n}=\dfrac{1}{n}$. Donc X suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1,2,...,n\}$, son espérance vaut donc $\mathbb{E}(X)=\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{10001}{2}$.

Q4. Les valeurs de X sont les entiers naturels non nuls $1,2,3,\ldots$ La probabilité que $X=k$ est alors, pour $k\in\mathbb{N}^*$, $p(X=k)=(1-p)^{k-1}p$ où $p=\dfrac{1}{10000}$. Donc X suit une loi géométrique de paramètre p. En particulier $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{p}=10000$.

Q5.

```
code=4714
n=int(import("taper un code a 4 chiffres:"))
k=1
while n!=code:
      n=int(import("taper un code a 4 chiffres:"))
      k=k+1
print("vous avez trouve le code en " +retrurn(k)+"essais")
```

Q6.

```
def crypte(n):
    L=m.copy()
    for i in range(len(L)):
        L[i]=(L[i]+5)%10
```

Problème : intégral de Fresnel

Partie I - intégrales fonction de leur bornes

Q7. La fonction $t\mapsto e^{it^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc sa primitive qui s'annule en 0 est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $H'(x)=e^{ix^2}$.

Q8. Soit $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} H(-x) &= \int_0^{-x} e^{it^2}\mathrm{d}t && (5)\\ &= -\int_0^{x} e^{iu^2}\mathrm{d}u \ \text{ (changement de variable } t=-u) && (6)\\ &= -H(x) && (7)\end{aligned}$$

Donc H est une fonction impaire.

Q9. D'après le cours, on sait que e^z est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ et que $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$, en particulier, $\forall t\in\mathbb{R}$, on a ;

$$e^{it^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^nt^{2n}}{n!}.$$

Maintenant, soit $x>0$ fixé. Si $t\mapsto\varphi_n(t)=\dfrac{i^nt^{2n}}{n!}$, alors $|\varphi_n(t)|=\dfrac{t^{2n}}{n!}\leq\dfrac{x^{2n}}{n!}$ ce qui montre que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}\varphi_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[0,x]$, donc on peut intégrer terme à terme la série :

$$H(x)=\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x \varphi_n(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

H étant impaire, donc le développement valable pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Q10. Par le changement de variable $u=t^2$, $H(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x^2}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.

Q11. A l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
H(x)-H\left(\sqrt{2\pi}\right) &= \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{x^2}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u && (8)\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-ie^{iu}}{\sqrt{u}}\right]_{2\pi}^{x^2}-\frac{1}{4}\int_{2\pi}^{x^2}\frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u && (9)\\
&= -i\frac{e^{ix^2}}{2x}+\frac{ie^{2\pi}}{2\sqrt{2\pi}}-\frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2}\frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u && (10)\\
&= -i\frac{e^{ix^2}}{2x}+\frac{i}{2\sqrt{2\pi}}-\frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2}\frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u && (11)
\end{aligned}$$

Q12. On a $\left|\displaystyle\int_{2\pi}^{x^2}\frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\right|\leq\displaystyle\int_{2\pi}^{x^2}\frac{\mathrm{d}u}{u^{\frac{3}{2}}}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^{\frac{3}{2}}}$ étant convergente, car elle vérifie le critère de Riemann. De plus $\displaystyle\lim_{x\to\infty}-i\frac{e^{ix^2}}{2x}=0$. D'où $H(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{it^2}\mathrm{d}t$ converge.

Q13. L'intervalle $[a,b]$ est discrétisé en n subdivisions (c'est-à-dire $n+1$ points), le pas de discrétisation est $h=\dfrac{b-a}{n}$, $a_{i+1}=a_i+h$, $a_0=a$ et $a_n=b$.

```
def I(f, a, b, n):
    s = 0
    h = float(b-a) / n
    x = a
    for i in range(0, n + 1):
        s=s+ f(x) * h
    return s
```

Q14.

```
def H(x, n):
    return I(lambda t:1j*(t**2),0,x,n
```

Partie II - Calcul des intégrales de Fresnel

Q15. On a $|e^{-x^2(t^2-i)}|=|e^{-(xt)^2}e^{ix^2}|=e^{-x^2t^2}$ et $|t^2-i|=\sqrt{t^4+1}$.

Q16. L'application $x \longmapsto \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ et la fonction à droite est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}$ et dominée indépendamment du paramètre x par une fonction intégrable, on en déduit la continuité de g sur $\mathbb{R}$.

Q17. Posons $g(x_n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ où $f_n(t) = \dfrac{e^{-x_n^2(t^2-i)}}{t^2-i}$.
Remarquons que l'intégrale considérée converge pour $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 0$.
De plus, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}.$$

La fonction à droite de l'inégalité est intégrable sur $\mathbb{R}$. On en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 0.$$

D'après la caractérisation séquentielle de la limite à l'infini, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Comme g est une fonction paire, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

Q18. • Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto f(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est continue par morceaux et intégrable puisque $|f(x,t)| = \dfrac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq \dfrac{1}{t^2}$.
• Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et de dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(t^2-i)}$.
• Pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable.
• Pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue
• Soit $[a,b] \subset]0,+_8[$. $\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}$, $\left|-2\,x\mathrm{e}^{-x^2(t^2-i)}\right| \leq \varphi(t)$ où $\varphi(t) = 2b\mathrm{e}^{-t^2a^2}$ qui est est intégrale sur $\mathbb{R}$.
Conclusion : g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $g'(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

Q19.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ g'(x) = -2t\mathrm{e}^{-it^2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2\,t^2}\mathrm{d}u = -2e^{ix^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{u^2}\mathrm{d}u = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}.$$

Comme il s'agit d'une fonction paire, alors g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}.$$

Q20. On a $X^2 - i = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X + e^{\frac{i\pi}{4}}\right)$, d'où la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{X^2-i} = \frac{\alpha}{X - e^{\frac{i\pi}{4}}} + \frac{\beta}{X + e^{\frac{i\pi}{4}}}$$

où

$$\alpha = \lim_{x\to e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{X + e^{\frac{i\pi}{4}}}{X^2-i} = \lim_{x\to e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{1}{x + e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1}{2e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2(1+i)}$$

et

$$\beta = \lim_{x \to -e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{X - e^{\frac{i\pi}{4}}}{X^2 - i} = \lim_{x \to e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{1}{x - e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{-1}{2e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{-\sqrt{2}}{2(1+i)}.$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} && (12)\\ &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}t - 1)}{(\sqrt{2}t - 1)^2 + 1} && (13)\\ &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1} = \pi\sqrt{2}. && (14)\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} && (15)\\ &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}t + 1)}{(\sqrt{2}t + 1)^2 + 1} && (16)\\ &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1} = \pi\sqrt{2}. && (17)\end{aligned}$$

Q21. En intégrant la relation de la question **Q19.** sur $[\varepsilon, x]$, puis en faisant tendre ε vers 0, on obtient :

$$g(0) - g(x) = 2\sqrt{\pi} \int_0^{x^2} e^{it^2} \mathrm{d}t.$$

D'où

$$\forall x > 0,\ \ g(x) = g(0) - 2\sqrt{\pi} \int_0^{x^2} e^{it^2} \mathrm{d}t = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi} H(x).$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, on a finalement :

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} \mathrm{d}t = \frac{g(0)}{2\sqrt{\pi}} = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

puis, par identification :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Partie III - Étude d'une série de fonctions

Q22.. Soit M un majorant de $(|b_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |(a_n - a_{n+1}) b_n| \leq |a_n - a_{n+1}| M,$$

ou encore

$$0 \leq |(a_n - a_{n+1}) b_n| \leq (a_n - a_{n+1}) M,$$

car $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Or, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n - a_{n+1})$ est de même nature que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: elle est donc convergente. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n - a_{n+1})M$ est une série à termes positifs convergente. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n - a_{n+1})b_n$ est absolument convergente, donc elle converge.

Q23. Puisque $x \in]0, 2\pi[$, alors $e^x \neq 1$ et par conséquent :

$$\sum_{p=1}^{n} e^{ipx} = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{ix}\frac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}}\frac{e^{\frac{-inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{-ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}} = e^{i(n+1)\frac{x}{2}}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Q24. Soit $x \in]0, 2\pi[$ fixé. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $b_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$ si $n \geq 1$ et $b_0 = 0$ et $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ avec $a_0 = 0$. D'après la question précédente $|b_n| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, de plus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc d'après ce qui précède, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(b_n - b_{n-1})$ converge, c'est-à-dire la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$ converge pour tout $x \in]0, 2\pi[$.

Q25. Pour $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ikx}}{\sqrt{k}}$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{e^{ix}-1}{ix}S_n(x) - \int_1^{n+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right)\right| && (18)\\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right| && (19)\\
&\leq \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leq C && (20)
\end{aligned}$$

où $C = \frac{1}{4}\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient l'inégalité demandée.

Q26. Soit $x > 0$ fixé. Utilisons le changement de variable $u = \sqrt{tx}$ dans l'intégrale définissant $I(x)$:

$$I(x) = \sqrt{x}\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \sqrt{x}\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{e^{iu^2}}{\sqrt{\frac{u^2}{\sqrt{x}}}} \times \frac{2u\mathrm{d}u}{x} = 2\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}e^{iu^2}\mathrm{d}u$$

D'où $\lim_{x\to 0^+} I(x) = 2\int_0^{+\infty}e^{iu^2}\mathrm{d}u = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$.

Q27. On a $e^{ix} = 1 + ix + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!}$, d'où $\frac{e^{ix}-1}{ix} = 1 + x\sum_{k=2}^{\infty} \frac{i^n x^{n-1}}{n!} = 1 + xg(x)$ où g est une fonction continue et par conséquent $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ix}-1}{ix} = 1$.
L'inégalité de la question **Q25.** entraine :

$$\forall x > 0, \quad \left| \frac{e^{ix}-1}{ix}\sqrt{x}S(x) - I(x) \right| \leq C\sqrt{x}$$

d'où $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}S(x) = \lim_{x\to 0^+} I(x) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$, donc

$$S(x) \sim \frac{1+i}{\sqrt{2x}}\sqrt{\pi}$$

au voisinage de 0^+.

•••••••••••