

## CCP-Maths-1-Session 2015

**Correction proposée par El Amdaoui**  
**École Royale de l'Air-Marrakech.Maroc**

### EXERCICE I.

I.1. La fonction génératrice de  $X$  est donnée par :  $\forall t \in [-1, 1]$

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(t-1)}$$

- L'espérance de  $X$  est  $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \lambda$
- La variance de  $X$  est donnée par

$$\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'^2_X(1)$$

Avec  $G''_X(1) = \lambda^2$ . Donc, après substitution,  $\mathbb{V}(X) = \lambda$

### EXERCICE II.

On note  $I = ]0, +\infty[$  et on définit pour  $n$  entier naturel non nul et pour  $x \in I$ ,  $f_n = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$

II.1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f_n$  est définie et continue sur  $I = ]0, +\infty[$ .

- En 0, la fonction  $f_n$  est prolongeable par continuité en 0, voir que  $f_n \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -1$
- En  $+\infty$ , on a  $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \circ \left( \frac{1}{x^2} \right)$ ,  
donc  $f_n$  est intégrable sur  $I$  et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt &= \left[ \frac{e^{-nx}}{-n} + \frac{e^{-2nx}}{n} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0 \end{aligned}$$

En conséquence  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \right) = 0$

II.2. Soit  $x \in I$ , la série  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$  est combinaison linéaire de deux séries géométriques  $\sum_{n \geq 1} e^{-nx}$

et  $\sum_{n \geq 1} e^{-2nx}$  et chacune est de raison dans  $]0, 1[$ , donc elle est convergent et sa somme est la combinaison de deux sommes, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2nx} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - 2 \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \\ &= \frac{1}{e^x - 1} - 2 \frac{1}{e^{2x} - 1} = \frac{e^x + 1}{e^{2x} - 1} - \frac{2}{e^{2x} - 1} \\ &= \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{e^x + 1} \end{aligned}$$

L'application  $S : x \in I \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$  est continue sur  $I$ , prolongeable par continuité en 0 et

$S(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x} = \circ \left( \frac{1}{x^2} \right)$ , donc  $S$  est intégrable sur  $I$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx \\ &= \left[ -\ln(1 + e^{-x}) \right]_0^{+\infty} = \ln 2 \end{aligned}$$

**II.3.** La série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \right)$  est forcément divergente car sinon les assertions du théorème de convergence dominée seront vérifiées et en conséquence on aura l'égalité

$$0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \right) = \int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = 2$$

## PROBLÈME

### Partie I: Exemples et contre-exemples

**III.1.** S'il existe une suite de fonctions polynômes  $(P_n)$  convergeant uniformément sur  $]0, 1[$  vers  $h$ . Une telle suite est de fonctions continues et donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  admet une limite finie en 0 qui vaut  $P_n(0)$ , on conclut, ainsi que la suite  $(P_n(0))$  est convergente, la fonction  $h$  admet une limite finie en  $0^+$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ . Ce qui est absurde

**III.2.**  $\mathcal{P}_N$  est un sous-espace de dimension finie de l'espace vectoriel normé  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ , donc c'est un espace est complet. En particulier, il est fermé.

En conséquence une limite uniforme d'éléments de  $\mathcal{P}_N$  est un élément de  $\mathcal{P}_N$

**(III.2.a)** l'application  $N_1$  est bien définie sur  $\mathbb{R}[X]$  à valeurs positives, vérifiant pour  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

- $N_1(P) = 0$ , donne  $P$  est nul sur  $[-2, -1]$ , par infinité de racines, il est nul partout
- $N_1(\lambda P) = \sup_{x \in [-2, -1]} |\lambda P(t)| = |\lambda| \sup_{x \in [-2, -1]} |P(t)| = |\lambda| N_1(P)$
- Pour tout  $t \in [-2, -1]$ , on a

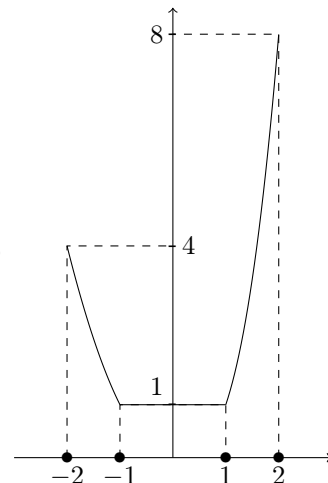
$$|P(t) + Q(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq N_1(P) + N_1(Q)$$

Donc, l'inégalité triangulaire  $N_1(P + Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$

**(III.2.b)** La fonction  $f$  est continue sur le segment  $[-2, 2]$ , d'après le théorème de Stone Weierstrass il existe une suite de fonctions polynômes  $(P_n)$  qui converge uniformément vers la fonction  $f$  sur  $[-2, 2]$ .

$N_1(P_n - X^2) = N_1(P_n - f) \leq \|P_n - f\|_{[-2, 2]}^\infty$ , donc cette suite de polynômes  $(P_n)$  converge dans  $\mathbb{R}[X]$  muni de la norme  $N_1$  vers  $X^2$ .

De même  $N_2(P_n - X^3) = N_2(P_n - f) \leq \|P_n - f\|_{[-2, 2]}^\infty$ , donc cette suite de polynômes  $(P_n)$  converge dans  $\mathbb{R}[X]$  muni de la norme  $N_2$  vers  $X^3$



### Partie II: Application : un théorème des moments

**(III.2.a)** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on écrit  $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ . Par linéarité de l'intégrale, pour tout polynôme, on a :

$$\int_a^b P(x) f(x) dx = \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^k f(x) dx = 0$$

(III.2.b) La fonction  $f : x \mapsto f(x)$  est continue sur  $[a, b]$ . Donc, d'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant uniformément sur  $[a, b]$  vers  $f$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [a, b]$ , en écrivant

$$|f^2(x) - f(x)P_n(x)| = |f(x)(f(x) - P_n(x))|$$

et il en résulte que la suite  $(fP_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f^2$  sur  $[a, b]$ . D'après le théorème d'intégration des limites uniformes, il vient alors :

$$\int_a^b f^2(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)P_n(x) dx = 0$$

La fonction  $f^2$  étant continue positive sur le segment  $[a, b]$  d'intégrale nulle, donc  $f^2 = 0$ , ainsi la nullité de  $f$

III.3. Soit  $f \in F^\perp$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a  $(X^k | f) = \int_a^b x^k f(x) dx = 0$ . D'après la question précédente  $f = 0$ . Ainsi  $F^\perp = \{0\}$

L'égalité  $E = F \oplus F^\perp = F$  est fautive car elle existe des fonctions continues sur  $[a, b]$  sans qu'elles soient polynômes

(III.3.a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , l'application  $x \mapsto x^n e^{-(1-i)x}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . En  $+\infty$ , on a  $x^{n+2} e^{-(1-i)x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , donc l'application est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Les deux applications  $x \mapsto x^{n+1}$  et  $x \mapsto e^{-(1-i)x}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$  et  $x^{n+1} e^{-(1-i)x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , donc par une intégration par parties

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-(1-i)x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^{n+1} \left( \frac{-e^{-(1-i)x}}{1-i} \right)' dx \\ &= \underbrace{\left[ \frac{-x^{n+1} e^{-(1-i)x}}{1-i} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{n+1}{1-i} \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x} dx \\ &= \frac{n+1}{1-i} I_n \end{aligned}$$

Par une récurrence simple sur  $n \in \mathbb{N}$

- Pour  $n = 0$ , on a  $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-(1-i)x} dx = \frac{1}{1-i}$
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $I_{n+1} = \frac{n+1}{1-i} I_n$ . Or par hypothèse de récurrence  $I_n = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}}$ ,

$$\text{il vient donc } I_{n+1} = \frac{n+1}{1-i} \frac{n!}{(1-i)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{(1-i)^{n+2}}$$

Récurrence achevée

(III.3.b) Soit  $k \in \mathbb{N}$ , on écrit  $1-i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$  pour obtenir

$$(1-i)^{4k+4} = 2^{2k+2} e^{-i(k+1)\pi} = (-1)^{k+1} 2^{2k+2}$$

D'une autre part, la valeur de l'intégrale demandée est la partie imaginaire de celle de  $I_{4k+3}$ . Mais,  $I_{4k+3} = \frac{(4k+3)!}{(1-i)^{4k+4}} = (-1)^{k+1} \frac{(4k+3)!}{2^{2k+2}} \in \mathbb{R}$ , donc

$$\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin x dx = 0$$

(III.3.c) L'application  $u \mapsto x = \sqrt[4]{u}$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $]0, +\infty[$  sur lui-même. Par changement de variables

$$\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin x dx = \int_0^{+\infty} u^k e^{-\sqrt[4]{u}} \sin(\sqrt[4]{u}) du$$

Ainsi, l'application  $f : u \mapsto e^{-\sqrt[4]{u}} \sin(\sqrt[4]{u})$  répond bien à la question

(III.3.d) Si  $f$  est uniformément approchée sur  $[0, +\infty[$  par une suite de polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On tire que  $(\|P_n - f\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée et soit  $M$  un majorant d'une telle suite.

En outre la fonction  $f$  vérifie, par linéarité de l'intégrale, que  $\int_0^{+\infty} P_n(t)f(t) dt = 0$ .

On a aussi

- $\forall n \in \mathbb{N}$ , l'application  $fP_n$  est continue sur  $[0, +\infty[$
- la suite  $(fP_n)$  converge simplement vers  $f^2$  qui est continue sur  $[0, +\infty[$
- Pour tout  $x \in [0, +\infty[$ , on a

$$|P_n(x)f(x)| \leq |P_n(x)f(x) - f^2(x)| + f^2(x) \leq M|f(x)| + f^2(x)$$

Avec  $f$  et  $f^2$  sont intégrables sur  $[0, +\infty[$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} P_n(t)f(t) dt = 0$$

Par le lemme des trois conditions :  $f^2$  continue, positive d'intégrale nulle, donc  $f^2 = 0$ , puis  $f = 0$

### Partie III: Exemple via un théorème de Dini

III.4.  $g_x$  est une application continue et dérivable sur  $I$  telle que

$$\forall t \in I, \quad g'_x(t) = 1 - t \geq 1 - \sqrt{x} \geq 0$$

$g_x$  est donc croissante sur  $I$  et  $g_x(I) = I$ , ce qui justifie la définition de  $(u_n)$ .

Montrons d'abord par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq \sqrt{x}$

Pour  $n = 0$ , c'est évident. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on

suppose que  $0 \leq u_n \leq \sqrt{x}$ , alors par la croissance de  $g_x$ , on obtient  $g_x(0) \leq u_{n+1} \leq g_x(\sqrt{x})$ ,

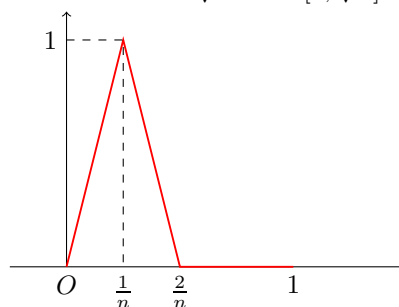
avec  $g_x(0) = \frac{1}{2}x \geq 0$  et  $g_x(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$ , on obtient les inégalités  $0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{x}$

Finalement  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(x - u_n^2) \geq 0$ , donc la suite  $(u_n)$  est croissante et puisque elle est majorée, elle converge. En notant  $\ell$  sa limite, il vient que  $\ell \in [0, \sqrt{x}]$  et par continuité de  $g_x$ ,  $\ell = g_x(\ell)$ . Cette dernière équation admet une seule solution  $\ell = \sqrt{x}$  dans  $[0, \sqrt{x}]$

III.5. On prend  $[a, b] = [0, 1]$  et pour  $n \geq 2$ , on considère l'application affine par morceaux  $f_n$  définie

$$x \mapsto \begin{cases} nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -nx + 2 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

La suite  $(f_n)$  de fonctions continues converge simplement vers la fonction nulle. Puisque  $f_n(\frac{1}{n}) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0$ , la convergence n'est pas uniforme



III.6. Application :

(III.6.a) Pour  $x \in [0, 1]$ , la suite  $(P_n(x))$  converge vers  $\sqrt{x}$ . Ainsi la suite de polynômes  $(P_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers  $\sqrt{\phantom{x}}$

(III.6.b)  $(P_n)$  est une suite croissante de fonctions continues convergeant simplement sur  $[0, 1]$  vers  $\sqrt{\phantom{x}}$  qui est continue sur  $[0, 1]$ . Donc, d'après le théorème de Dini, la convergence est uniforme

Partie IV: Démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

(III.6.a) Soit  $\alpha > 0$ . On sait que  $\mathbb{E}(S_n) = nx$  et  $\mathbb{V}(S_n) = nx(1-x)$ . Alors on fait appel à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, il vient

$$\mathbb{P}(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2\alpha^2} \leq \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}$$

Or pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a  $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ , alors

$$\mathbb{P}(|S_n - nx| > \alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

(III.6.b) Par application du théorème de Transfert, on a :

$$\begin{aligned} E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= B_n(f)(x) \end{aligned}$$

(III.6.a) La fonction  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  compact. D'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tous  $a, b \in [0, 1]$

$$|a - b| \leq \alpha \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon$$

Ainsi pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$ , alors  $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon$

(III.6.b) Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathbb{P}(S_n = k) \right| &\leq \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \left( \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(x)| \right) \mathbb{P}(S_n = k) \\ &\leq 2 \|f\|_\infty \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \mathbb{P}(S_n = k) \\ &\leq 2 \|f\|_\infty \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\right) \\ &\leq 2 \|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right) \end{aligned}$$

(III.6.c) On considère les deux ensembles  $I = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid \left|\frac{k}{n} - x\right| < \alpha\}$  et  $J = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \alpha\}$ . On a  $I \cup J = \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $I \cap J = \emptyset$ . Donc :

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &\leq \sum_{k \in I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| + \sum_{k \in J} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2 \|f\|_\infty \sum_{k \in J} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \|f\|_\infty \sum_{k \in J} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \|f\|_\infty \frac{1}{4n\alpha^2} \end{aligned}$$

Or  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq N \Rightarrow \|f\|_\infty \frac{1}{2n\alpha^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Donc  $\sup_{x \in [0, 1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ , ce qui donne la convergence uniforme de  $B_n(f)$  vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .