

On utilisera dans ce problème, plusieurs fois, la propriété : ${}^t(P^{-1}) = ({}^tP)^{-1} = {}^tP^{-1}$.
On évitera ainsi d'écrire des parenthèses en préférant l'écriture : ${}^tP^{-1}$ aux deux autres.

I Questions préliminaires

I.A On a : $B = P^{-1}AP$.

I.B On a : $M = QNQ^{-1}$, d'où : $N = Q^{-1}MQ = Q^{-1}M(Q^{-1})^{-1}$.
 N est aussi semblable à M .

I.C On a encore : $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$, ce qui donne : $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$.
 C est aussi semblable à A .

On part maintenant de : $B = P^{-1}AP$, qu'on transpose : ${}^tB = {}^tP {}^tA {}^tP^{-1}$.

Ce qui prouve que tA et tB sont semblables.

I.D Cas où A est diagonale ou diagonalisable

I.D.1) Si A est diagonale, alors, $A = {}^tA = I^{-1} {}^tA I$.
 A et tA sont alors semblables.

I.D.2) Si A est diagonalisable, alors : $A = PDP^{-1}$
et aussi, en transposant : ${}^tA = {}^tP^{-1}D {}^tP$, car D est diagonale.
On a donc A et tA semblables toutes les 2 à D , et donc semblables.

II Cas $n = 2$

$$\text{II.A } {}^tAP = PA \text{ devient : } \begin{pmatrix} ax + cz & ay + ct \\ bx + dz & by + dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy & bx + dy \\ az + ct & bz + dt \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} cy = cz \\ ay + ct = bx + dy \\ az + ct = bx + dz \\ by = bz \end{cases}$$

A n'est pas diagonale, donc b et c ne sont pas tous les 2 nuls, d'où : $y = z$ en simplifiant la première ou la dernière ligne.

$$\text{Finalement : } {}^tAP = PA \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ ay + ct = bx + dy \end{cases}$$

II.B Si $c \neq 0$, on prend $t = 0$, $t = a - d$ et $y = -c = z$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ -c & a - d \end{pmatrix} \text{ est bien inversible et convient.}$$

Si $b \neq 0$, on prend $t = 0$, $x = a - d$ et $y = b = z$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & a - d \end{pmatrix} \text{ est bien inversible et convient.}$$

Dans tous les cas on a une matrice de passage P qui convient.

II.C Avec cette matrice P , on a : ${}^tAP = PA$ et donc : $A = P^{-1} {}^tAP$.
 A et tA sont bien semblables.

III Cas $n = 3$

III.A Questions préliminaires

III.A.1) Les limites de la fonction en $\pm\infty$ sont $\pm\infty$ ou $\mp\infty$ selon le signe du coefficient de plus haut degré. Cette fonction polynomiale change donc de signe et est bien sûr continue, elle s'annule donc au moins une fois.

III.A.2) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det({}^t(A - \lambda I_n)) = P_A(\lambda) = -\lambda^3 + \dots + \det A$

Les deux polynômes caractéristiques sont égaux et de degré 3, ils ont au moins une racine réelle.

III.A.3) Si $f(\vec{i}) = \lambda \vec{i}$, alors : $f(\alpha \vec{i}) = \lambda \alpha \vec{i} \in \text{Vect}(\vec{i})$.

Ceci prouve que $\text{Vect}(\vec{i})$ est stable par f .

Réciproquement, si $\text{Vect}(\vec{i})$ est stable par f , $f(\vec{i}) \in \text{Vect}(\vec{i})$

et donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, tel que : $f(\vec{i}) = \lambda \vec{i}$.

$\vec{i}$ est donc propre pour f .

On a bien l'équivalence demandée.

III.A.4) Le rang de $A - aI$ est celui de sa transposée ${}^tA - aI$. Les dimensions de leurs noyaux sont donc les mêmes. Ces noyaux sont les sous-espaces propres F et H , qui ont donc la même dimension.

III.A.5) $\vec{x} \cdot \vec{y} = {}^tXY$ entraîne : $f(\vec{x}) \cdot \vec{y} = {}^t(AX)Y = {}^tX {}^tAY$ et : $\vec{x} \cdot h(\vec{y}) = {}^tX {}^tAY$.

On a bien l'égalité demandée.

III.A.6) Soit : $\vec{v} \perp \vec{u}$ avec : $h(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$.

$\vec{v} \cdot h(\vec{u}) = \vec{v} \cdot \lambda \vec{u} = 0 = f(\vec{v}) \cdot \vec{u}$ d'où : $f(\vec{v}) \perp \vec{u}$.

$\Pi_{\vec{u}}$ est bien stable par f .

III.B Cas particulier

III.B.1) f possède une seule valeur propre réelle, avec un sous-espace propre de dimension 1, compte tenu du III.A.2) et du III.A.4), il en est de même pour h .

Il n'y a donc qu'une seule droite stable par h .

III.B.2) $\vec{j} \perp \vec{k} \Rightarrow \vec{j} \in \vec{k}^\perp$, et donc : $f(\vec{j}) \perp \vec{k}$ car $\Pi_{\vec{k}}$ est stable par f .

III.B.3) $f(\vec{i}) = a \vec{i}$ donne la première colonne de B .

$h(\vec{k}) = a \vec{k}$ donne la troisième colonne de tB et donc la troisième ligne de B .

$$\text{On a donc } B = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

B est donc triangulaire et a au moins 2 valeurs propres réelles (distinctes ou confondues), il a donc ses 3 valeurs propres réelles, en effet, les valeurs propres « complexes non réelles » vont « 2 par 2 ». Elles sont de plus égales. En effet, dans le cas contraire, il y aurait un autre sous-espace propre pour f et donc une autre droite vectorielle stable par f .

$$\text{On a donc } B = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ 0 & a & \cdot \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ il ne reste qu'à nommer les termes inconnus : } B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

III.B.4) $B - aI = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est de rang 2, et donc : $\begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$ aussi, elle est donc inversible, de déterminant

non nul et donc : $bd \neq 0$.

On a bien montré que b et d sont non nuls.

III.B.5) On calcule facilement : $BP = \begin{bmatrix} bc & bd & ab \\ bd & ad & 0 \\ ba & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et : $P {}^tB = \begin{bmatrix} bc & bd & ab \\ bd & ad & 0 \\ ba & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ce qui donne : $BP = P {}^tB$, et donc : ${}^tB = P^{-1}BP$.

B et tB sont donc semblables.

Par ailleurs, B et A sont semblables, et donc tB et tA le sont aussi (I.C).

Finalement A et tA sont semblables, toujours en utilisant le I.C.

III.C A possède une seule valeurs propre réelle 1, le sous-espace propre est de dimension 1 car $A - I$ est de rang 2. Ce sous-espace propre est engendré par $\vec{i}$.

$${}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ vérifie les mêmes propriétés mais son sous-espace propre est engendré par } \vec{k}, \text{ qui}$$

est bien orthogonal à $\vec{i}$.

A vérifie bien les hypothèses du II.B.

III.D On a toujours une valeur propre réelle au moins, et donc au moins une droite vectorielle stable par f au moins. On a donc au moins deux droites vectorielles stables par f . De plus, f n'est pas diagonalisable, et donc, on peut avoir :

- a valeur propre réelle triple, avec un sous espace propre de dimension 2 ;
- a et b valeurs propres réelles doubles et simples, avec des sous-espaces propres de dimension 1.

III.D.1) On va étudier les différents cas :

- a valeur propre réelle triple, sous-espace propre de dimension 2 : ce sous-espace propre est engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On complète cette famille libre en une base par $\vec{w}$.

Dans cette base, la matrice de f est triangulaire, et donc : $f(\vec{w}) = a\vec{w} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ est non nul et propre. Vect $(\vec{w}, \alpha\vec{u} + \beta\vec{v})$ est un plan (P) clairement stable par f . On prend comme droite (D) la droite engendrée par $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ de façon à faire une base avec les 2 vecteurs précédents.

- a valeur propre réelle double, b valeur propre réelle simple, avec des sous-espaces propres de dimension 1 : on prend une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où le premier vecteur est propre pour a et le second propre pour b , la matrice dans cette base est naturellement triangulaire.

On a : $f(\vec{w}) = a\vec{w} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. on prend : $\vec{w}' = \vec{w} - \frac{\beta}{b-a}\vec{v}$.

Alors, après un calcul simple : $f(\vec{w}') = a\vec{w}' + \alpha\vec{u}$. On a en fait cherché un vecteur $\vec{w}'$, somme de $\vec{w}$ et de k fois $\vec{v}$ qui vérifiait cette propriété.

La droite engendrée par $\vec{v}$ et le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{w}'$ sont clairement stables par f , ces trois vecteurs forment une base, la droite n'est pas incluse dans le plan.

Dans tous les cas, on a trouvé une droite (D) et un plan (P) stables par f et supplémentaires.

III.D.2) Dans le premier cas, en prenant, par exemple quand (D) peut être engendrée par $\vec{u}$:

$$\vec{i} = \vec{u}, \vec{j} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \text{ et } \vec{k} = \vec{w},$$

$$\text{La matrice de } f \text{ dans cette base est : } B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Dans le deuxième cas, en prenant, par exemple : $\vec{i} = \vec{v}$, $\vec{j} = \vec{u}$ et $\vec{k} = \vec{w}'$, on obtient la base décrite par l'énoncé.

$$\text{La matrice de } f \text{ dans cette base est : } B = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & \alpha \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

On peut donc toujours trouver une base où la matrice a cette forme avec $\alpha \neq 0$.

$$\text{III.D.3) Après un calcul simple : } {}^tBQ = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & xa & ya \\ 0 & x\alpha + za & y\alpha + ta \end{bmatrix} \text{ et } QB = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & xa & x\alpha + ya \\ 0 & za & z\alpha + ta \end{bmatrix}.$$

Comme à la partie II, avec des calculs qui sont mêmes plus simples, l'égalité revient rapidement, compte tenu de $\alpha \neq 0$ à : $x = 0$ et $y = z$, t étant quelconque.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ est inversible et telle que : } {}^tBQ = QB, \text{ et donc : } B = Q^{-1} {}^tBQ.$$

On a donc B et tB semblables, mais aussi A et B semblables et donc tB et tA le sont aussi (I.C).
Finalement A et tA sont semblables, toujours en utilisant le I.C.

IV Un résultat utile...

IV.A Clairement, P a pour coefficients les parties réelles des coefficients de M , et Q les parties imaginaires.

IV.B Semblables dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$...

IV.B.1) On sait que : $PA = BP$ avec P inversible. Ecrivons : $P = P_1 + iP_2$, les parties réelle et imaginaire. On obtient : $(P_1 + iP_2)A = B(P_1 + iP_2) = P_1A + iP_2A = BP_1 + iBP_2$.

En égalant les parties réelles et imaginaires, il vient : $P_1A = BP_1$ et $P_2A = BP_2$, avec $P_1 + iP_2$ inversible, c'est à dire de déterminant non nul.

IV.B.2) La récurrence est inutile, en effet, le déterminant est polynomial de ses coefficients et g est donc un polynôme en x .

On a bien sûr : $g(i) \neq 0$, g n'est pas le polynôme nul sur $\mathbb{C}$.

Si $g(x) = 0$ pour tous les réels, on aurait un polynôme avec une infinité de racines, ce serait le polynôme nul, ce qui est impossible.

Et donc : g n'est pas le polynôme nul sur $\mathbb{R}$.

On a donc l'existence d'un réel x tel que $g(x) = \det(P_1 + xP_2) \neq 0$.

IV.B.3) De $P_1A = BP_1$ et $P_2A = BP_2$, on tire : $(P_1 + xP_2)A = B(P_1 + xP_2)$ avec $P_1 + xP_2$ réelle et inversible.

Et donc : $A = (P_1 + xP_2)^{-1} B (P_1 + xP_2)$, A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

V Cas général

V.A Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable. C'est donc toujours le cas quand on travaille sur $\mathbb{C}$.

V.B Cas $k = 0$

V.B.1) La matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ a la forme suivante : $B = \begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & \cdots & x \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, où les x sont

des coefficients inconnus.

Il est clair qu'à partir de $n = 2$, les $g(e_i)$ ¹ appartiennent à l'espace vectoriel engendré par les vecteurs précédents.

On a : $\text{Im}(g) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.

Et donc : $\text{Im}(g^2) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-2})$.

Par récurrence facile jusqu'au rang $n - 1$: $\text{Im}(g^k) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-k})$.

Ce qui donne : $\text{Im}(g^{n-1}) \subset \text{Vect}(e_1)$.

¹Assez bizarrement, dans cette question, les vecteurs ne sont pas fléchés.

Et enfin : $\text{Im}(g^n) = \{\vec{0}\}$.

g^n est bien l'application nulle.

Il existe donc bien un premier p tel que g^p est nul.

Si $p = 1$, alors $f = \alpha \text{id}$ est diagonalisable (!...) et donc A est semblable à tA .

Maintenant, $p \neq 1$.

Montrons que la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est libre.

Soit : $\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = \vec{0}$, on compose cette égalité par g^{p-1} , et on obtient : $\lambda_p g^{p-1}(\vec{u}_p) = \vec{0}$ car tous les autres vecteurs sont nuls.

Mais : $g^{p-1}(\vec{u}_p) = g^{p-1}(\vec{u}) = \vec{u}_1$.

Ainsi : $\lambda_p \vec{u}_1 = \vec{0}$ et enfin : $\lambda_p = 0$.

On reprend la relation : $\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_{p-1} \vec{u}_{p-1} = \vec{0}$, on compose maintenant par g^{p-2} pour obtenir : $\lambda_{p-1} = 0$...

Par récurrence assez facile, on finit par avoir : $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = \vec{0}$ qu'on compose par g pour obtenir $\lambda_2 = 0$.

Il reste : $\lambda_1 \vec{u}_1 = \vec{0}$ qui donne $\lambda_1 = 0$.

La famille est libre.

V.B.2) Ici, $p = n$.

La matrice de g sur la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est donc :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de f sur la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est donc : $B =$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Tandis que sur la base $(\vec{u}_n, \vec{u}_{n-1}, \dots, \vec{u}_1)$, la matrice de g est :

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Et donc sur la base $(\vec{u}_n, \vec{u}_{n-1}, \dots, \vec{u}_1)$, la matrice de f est :

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} = {}^tB$$

On a donc B et tB qui sont semblables. Mais A est semblable à B , donc tA et tB sont aussi semblables et enfin : A et tA sont semblables.

V.B.3) A partir de $k = p$, on a $U^k = 0$ et donc la $(k+1)^{\text{ème}}$ ligne de P est nulle.

Toutes les lignes de P à partir de la $(p+1)^{\text{ème}}$ sont donc nulles.

A priori, le rang de P est au plus p .

Maintenant, j et k sont entre 1 et p .

Le calcul des $g^{k-1}(\vec{u}_j)$ se fait donc comme à la question précédente.

Pour $k < j$, on a : $g^{k-1}(\vec{u}_j) = g^{k-2}(\vec{u}_{j-1}) = \dots = g(\vec{u}_{j-k+2}) = \vec{u}_{j-k+1}$.

Pour $k = j$, on a : $g^{k-1}(\vec{u}_k) = g^{k-2}(\vec{u}_{k-1}) = \dots = \vec{u}_1$.

Pour $k > j$, on a : $g^{k-1}(\vec{u}_j) = g^{k-j}(\vec{u}_1) = \vec{0}$.

La $k^{\text{ème}}$ ligne de P est la première ligne de U^{k-1} , c'est à dire la première ligne de la matrice de g^{k-1} .

Les p premiers termes de cette ligne sont donc les composantes sur $\vec{u}_1$ de $g^{k-1}(\vec{u}_j)$. C'est donc 0 sauf pour $j = k$, c'est à dire en colonne k , auquel cas c'est 1.

Le bloc des p premières lignes et colonnes de P est donc la matrice I_p .

P est donc de rang au moins p , donc exactement de rang p .

Par ailleurs, compte tenu de ce qu'on a déjà montré sur les lignes suivantes de P , nulles à partir de la $(p+1)^{\text{ème}}$, les p premières colonnes de P sont les p premières colonnes de I_n .

La restriction de h à W est donc l'identité. Ceci prouve que pour $\vec{v} \in W$, on a : $h(\vec{v}) = \vec{v}$.

W est de dimension p et le noyau de h de la dimension du noyau de P , c'est à dire $n - p$.

Il suffit de montrer que $W \cap \ker h = \{\vec{0}\}$.

Mais si $\vec{v} \in W \cap \ker h$, on a : $h(\vec{v}) = \vec{v}$, et $h(\vec{v}) = \vec{0}$, et donc : $\vec{v} = \vec{0}$.

W et $\ker h$ sont bien supplémentaires.

Reste à montrer qu'ils sont stables par g . Comme $f = g + \alpha id$, la stabilité par g impliquera la stabilité par f .

a) Si $\vec{v} \in W$, on a : $\vec{v} \in \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$.

Et donc : $\vec{v} \in \text{Vect}(g(\vec{u}_1), g(\vec{u}_2), \dots, g(\vec{u}_p)) = \text{Vect}(\vec{0}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{p-1}) \subset W$.

Ceci prouve que W est stable par g .

b) Si $\vec{v} \in \ker h$, on a, en travaillant dans la base des $\vec{u}_j$: $PV = 0$. Ceci est aussi vrai pour la première coordonnée de PV qui n'est que la première coordonnée de V , c'est à dire la première composante de $\vec{v}$ sur $\vec{u}_1$.

De la même façon, jusqu'au rang n , les coordonnées de PV sont nulles.

Par exemple, la deuxième coordonnée de PV est la première coordonnée de UV , c'est à dire la première coordonnée de $g(\vec{v})$ sur $\vec{u}_1$, qui est donc nulle.

Et la $n^{\text{ème}}$ coordonnée de PV est la première coordonnée de $U^{n-1}V$, c'est à dire la première coordonnée de $g^{n-1}(\vec{v})$ sur $\vec{u}_1$, qui est donc nulle.

Comme $g^n(\vec{v}) = \vec{0}$, on a encore la propriété au rang suivant.

Ceci prouve que $PUV = 0$, en travaillant avec UV au lieu de V . Et enfin, $g(\vec{v}) \in \ker h$.

V.C Cas où $k \neq 0$

V.C.1) La matrice de f sur $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure, il en est donc de même pour la matrice de $f - \alpha id$, qui n'est que celle de g .

Cette matrice a donc bien la forme demandée, on pourrait même ici remplacer les tailles k et $n - k$ de T_1 et T_2 par j et $n - j$ arbitrairement...

En prenant les dimensions données, il vient immédiatement que la matrice T_2 est strictement triangulaire supérieure. Il se produit avec T_2 ce qui se produisait avec T au V.B., en dimension $n - k$ au lieu de n , c'est à dire que $T_2^{n-k} = 0$ de la même façon qu'on avait $T^n = 0$.

Par ailleurs, T_1 est triangulaire supérieure, les termes de la diagonale étant tous non nuls... Elle est donc inversible.

V.C.2) On admet que la matrice de g^{n-k} dans la base $\mathcal{B}$ est bien : $\begin{bmatrix} T_1^{n-k} & B' \\ 0 & T_2^{n-k} \end{bmatrix}$.

T_1^{n-k} est inversible, donc de rang k , la matrice de g^{n-k} est donc de rang au moins k .

Mais aussi : $T_2^{n-k} = 0$, les $n - k$ dernières lignes de la matrice sont nulles, elle est de rang au plus k .

La matrice de g^{n-k} est donc de rang k , son noyau G est de dimension $n - k$.

V.C.3) Pour montrer que F et G sont supplémentaires, compte tenu des dimensions, il suffit de montrer que l'intersection est réduite au vecteur nul.

Soit $\vec{v} \in F \cap G$, alors $g^{n-k}(\vec{v}) = \vec{0}$ et comme la restriction de g^{n-k} sur F est un isomorphisme (T_1^{n-k} inversible), on a bien : $\vec{v} = \vec{0}$.

Il suffit donc de montrer que F et G sont stables par g . Comme on l'a déjà vu, $f = g + \alpha id$, la stabilité par g implique la stabilité par f .

Soit $\vec{v} \in G$, alors : $g^{n-k}(\vec{v}) = \vec{0}$, et donc : $g^{n-k}(g(\vec{v})) = g^{n-k+1}(\vec{v}) = g(\vec{0}) = \vec{0}$, c'est à dire : $g(\vec{v}) \in G$.

G est bien stable par g .

Par ailleurs, on a déjà presque utilisé le fait que la restriction de g sur F est un isomorphisme, puisque T_1 est inversible, ce qui prouve que F est stable par g .

V.D Récurrence

V.D.1) On a déjà vu plusieurs fois qu'il suffit de montrer que, dans une certaine base, la matrice de f , notée B , et sa transposée tB sont semblables. Cela montrera que A est semblable à tA (voir la première partie).

Dans une base obtenue en mettant bout à bout une base de F et une base de G , la matrice de

f est : $B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$. Clairement : ${}^tB = \begin{bmatrix} {}^tB_1 & 0 \\ 0 & {}^tB_2 \end{bmatrix}$.

B_1 et B_2 étant des matrices carrées de tailles respectives k et $n - k$. Celles ci étant strictement inférieures à n , ces matrices sont semblables à leurs transposées.

Ce qui donne : $B_1 = P_1^{-1} {}^tB_1 P_1$ et aussi : $B_2 = P_2^{-1} {}^tB_2 P_2$.

D'où : $B = \begin{bmatrix} P_1^{-1} {}^tB_1 P_1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1} {}^tB_2 P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^tB_1 & 0 \\ 0 & {}^tB_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$.

Mais : $\begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}^{-1}$.

Ce qui donne enfin : $B = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}^{-1} {}^tB \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$.

B et tB sont donc semblables, il en est de même pour A et tA .

V.D.2) Compte tenu du cas $n = 1$ qui est trivial, des cas $n = 2$ ou $n = 3$, on a largement l'amorce de la récurrence.

Par ailleurs, on a montré qu'on pouvait toujours trouver deux sous-espaces supplémentaires stables, et en utilisant la question précédente, la récurrence est démontrée.

A et tA sont donc toujours semblables, considérées, bien sûr, comme matrices à coefficients complexes pour pouvoir les triangulariser (Partie V).

V.E Maintenant, si A est réelle, elle est semblable à tA sur $\mathbb{C}$, donc sur $\mathbb{R}$ (Partie IV).