

## C.C.P. 2001, filière PSI, première épreuve

### Problème 1

#### • Partie I

1.1. La série géométrique  $\sum (-1)^k x^k$  converge si et seulement si  $x \in ]-1, 1[$  et dans ce cas sa somme est  $\frac{1}{1+x}$ .

1.2.  $R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$ . Au facteur  $\frac{-x}{1+x}$  près,  $\sum R_n(x)$  est encore une série géométrique de raison  $-x$ .

On en déduit la convergence de  $\sum R_n(x)$  et l'égalité  $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x) = -\frac{x}{(1+x)^2}$ .

2.1.  $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  converge d'après le théorème des séries alternées.

2.2.1. -  $\sum_{k=n}^m (-1)^k x^k = \sum_{k=n}^m (R_{k-1}(x) - R_k(x)) = R_{n-1}(x) - R_m(x)$ , par télescopage.

- D'où  $\left| \sum_{k=n}^m (-1)^k x^k \right| \leq |R_{n-1}(x)| + |R_m(x)| = \frac{|x|^n}{1+x} + \frac{|x|^{m+1}}{1+x} \leq 2$ .

2.2.2.  $n$  étant fixé, la suite de fonctions  $(R_{n-1} - R_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $I_0$  vers  $R_{n-1}$  et elle est, d'après l'inégalité du 2.2.1., dominée par la fonction constante de valeur 2, qui est intégrable sur  $I_0$ .

D'après le théorème de convergence dominée,  $\int_{I_0} (R_{n-1}(x) - R_m(x)) \, dx \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_{I_0} R_{n-1}(x) \, dx$ .

Compte tenu de l'égalité du 2.2.1. et de la linéarité de l'intégrale, il s'agit de la propriété demandée.

$$\int_{I_0} (-1)^k x^k \, dx = \frac{(-1)^k}{k+1}; \text{ on obtient ainsi } \int_{I_0} R_{n-1}(x) \, dx = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = r_n.$$

2.2.3.  $r_0 = \int_0^1 R_{-1}(x) \, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx = \ln 2$ . On retrouve la valeur connue de  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ .

2.2.4.  $\left| \sum_{n=0}^m R_{n-1}(x) \right| = \left| \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n x^n}{1+x} \right| = \frac{|1 - (-x)^{m+1}|}{(1+x)^2} \leq \frac{1 + |x|^{m+1}}{(1+x)^2} \leq 2$ .

2.2.5. Notons  $T_m = \sum_{n=0}^m R_{n-1} = R_{-1} + \sum_{n=0}^{m-1} R_n$ . La suite  $(T_m)$  converge simplement sur  $I_0$  vers  $R_{-1} + S$  et est dominée par la fonction constante de valeur 2, qui est intégrable sur  $I_0$ . Par le théorème de convergence dominée :

$$\sum_{n=0}^m \int_{I_0} R_{n-1} = \int_{I_0} T_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_{I_0} (R_{-1} + S) = \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^2} \right) \, dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} \, dx = \frac{1}{2}.$$

D'après 2.2.2., il en résulte que  $\sum r_n$  converge et que  $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n = \frac{1}{2}$ .

#### • Partie II

1.  $\sum_{k=1}^n k u_k = \sum_{k=1}^n k (R_{k-1} - R_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) R_k - \sum_{k=0}^n k R_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - n R_n = \sum_{k=0}^n R_k - (n+1) R_n$  ; par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{n-1} R_k - \sum_{k=1}^n k u_k = (n+1) R_n.$$

2. On applique la question précédente avec  $u_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  et on utilise les résultats de I.2.2.3. et I.2.2.5.

$$\sum_{k=1}^n (n-k) \frac{(-1)^{k+1}}{k} = n \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^n k u_k = n (\ln 2 - r_n) - \sum_{k=1}^n k u_k = n \ln 2 + r_n - \sum_{k=0}^n r_k = n \ln 2 - \frac{1}{2} + o(1).$$

3.1. D'après 1., pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^n k u_k \leq \sum_{k=0}^n R_k$ . Si la série  $\sum R_k$  converge, ses sommes partielles sont majorées ; il en est donc de même pour les sommes partielles de la série  $\sum k u_k$ , et cette dernière est donc aussi convergente.

3.2.  $0 \leq (n+1)R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1) u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k$ , qui tend vers 0 (reste de série convergente), donc  $\lim (n+1) R_n = 0$ .

3.3. On sait par 3.1. que, si  $\sum R_k$  converge, alors  $\sum k u_k$  converge. En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans l'égalité du 1. et en utilisant 3.2., on obtient la réciproque et en même temps l'égalité des sommes en cas de convergence.

4.  $k u_k(x) = \frac{1}{k^{x-1}}$ . D'après 3.3.,  $\sum R_n(x)$  converge si et seulement si  $x \in ]2, +\infty[$  et dans ce cas  $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x) = \zeta(x-1)$ .

5.1. Au facteur  $x$  près,  $\sum k a_k x^k$  est la série entière dérivée de  $\sum a_k x^k$ , donc son rayon de convergence est aussi  $\rho$  ; par conséquent cette série converge absolument pour  $x \in ]-\rho, \rho[$ .

$(n+1)|R_n(x)| = (n+1) \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| |x|^k$ , qui tend vers 0 par application de 3.2. à la série à termes positifs  $\sum |a_k| |x|^k$ . On en déduit que la suite  $((n+1)R_n(x))$  converge vers 0.

5.2. D'après la question précédente et l'égalité du 1.,  $\sum R_n(x)$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^k = x f'(x)$ .

5.3.1.  $(a_k)$  est bornée donc  $\rho \geq 1$  ;  $(a_k)$  ne tend pas vers 0 donc  $\rho \leq 1$ . Finalement  $\rho = 1$ .

5.3.2.  $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin \frac{k\pi}{2} x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \cos \frac{k\pi}{2} x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n} = \frac{x}{1+x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$ .

On calcule  $f'(x) = \frac{1-x-x^2-x^3}{(1+x^2)^2}$ . Selon 5.2.,  $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x) = \frac{x(1-x-x^2-x^3)}{(1+x^2)^2}$ .

## Problème 2

### • Partie I

1.  $W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 3/8 \\ 1/2 & 0 & 3/8 & 0 \\ 0 & 3/8 & 0 & 5/16 \end{pmatrix}$ .

2.  $\det W_3 = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 3/8 \\ 0 & 3/8 & 0 \\ 3/8 & 0 & 5/16 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3/8 \\ 3/8 & 0 & 5/16 \end{vmatrix} = \frac{15}{256} - \frac{27}{512} + \frac{1}{2} \left( \frac{9}{128} - \frac{5}{64} \right) = \frac{30-27+18-20}{512} = \frac{1}{512}$ .

3.1.  $J_0 = \pi$  et  $J_1 = 0$ .

3.2. On intègre par parties :  $J_{m+2} = \int_0^\pi \cos^{m+1} t \cos t \, dt = (m+1) \int_0^\pi \cos^m t \sin^2 t \, dt = (m+1)(J_m - J_{m+2})$ .

Par conséquent  $J_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} J_m$ . Une récurrence évidente montre alors que  $J_{2p+1} = 0$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

3.3. Par récurrence,  $J_{2p} = \pi \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2p)} = \pi \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} = \frac{\pi}{2^{2p}} \binom{2p}{p}$ .

3.4. En distinguant deux cas suivant la parité de  $i+j$ , on constate que  $w_{i,j} = \frac{1}{\pi} J_{i+j}$ .

### • Partie II

1. Pour  $(j, k) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$ ,  $\langle e_j, e_k \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2 \cos jt \cos kt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(j+k)t + \cos(j-k)t) \, dt = \delta_{j,k}$ .

Cette égalité est évidemment encore valable si  $j = 0$  ou  $k = 0$ .

2. D'après 1., la famille  $(e_j)_{0 \leq j \leq m}$  est orthonormale ; elle est donc libre et c'est par conséquent une base de  $H_m(e)$ .

$$3. v_m(t) = \cos^m t = \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^m = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} e^{ikt} e^{-i(m-k)t} = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} e^{i(2k-m)t}.$$

$$v_m(t) \text{ étant réel, on a aussi } v_m(t) = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \cos(2k-m)t = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \cos(|2k-m|t).$$

Comme  $|2k-m| \leq m$ , cette égalité exprime  $v_m$  comme combinaison linéaire de  $(e_j)_{0 \leq j \leq m}$ , donc  $v_m \in H_m(e)$ .

De plus, le coefficient de  $e_m$  dans cette combinaison linéaire est obtenu pour  $k=0$  et  $k=m$  ; il est donc égal à 1

si  $m=0$  et à  $\frac{1}{2^m} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2^{m-1/2}}$  si  $m \geq 1$ . En conclusion :

$$v_m = \sum_{i=0}^m q_{i,m} e_i, \text{ avec } q_{0,0} = 1 \text{ et } q_{m,m} = \frac{1}{2^{m-1/2}} \text{ pour } m \geq 1.$$

4. D'après la question précédente,  $(v_k)_{0 \leq k \leq m}$  est une famille de vecteurs de  $H_m(e)$  dont la matrice dans la base  $(e_j)_{0 \leq j \leq m}$  de  $H_m(e)$  est triangulaire supérieure, avec pour termes diagonaux les  $q_{j,j}$ , qui sont non nuls.

Cette matrice est donc inversible, et par conséquent  $(v_k)_{0 \leq k \leq m}$  est aussi une base de  $H_m(e)$ , d'où  $H_m(v) = H_m(e)$ .

5. On peut écrire  $v_{m+1} = q_{m+1,m+1} e_{m+1} + r_{m+1} = \frac{e_{m+1}}{2^{m+1/2}} + r_{m+1}$ , avec  $r_{m+1} \in H_m(e)$ .

D'après 1.,  $e_{m+1} \in H_m(e)^\perp$ , donc  $\frac{e_{m+1}}{2^{m+1/2}}$  est le projeté orthogonal de  $v_{m+1}$  sur  $H_m(e)^\perp$ . Par conséquent :

$$d_m = d(v_{m+1}, H_m(e)) = \left\| \frac{e_{m+1}}{2^{m+1/2}} \right\| = \frac{1}{2^{m+1/2}}.$$

6.1.  $Q_n$  est triangulaire supérieure, donc  $\det Q_n = \prod_{i=0}^n q_{i,i} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2^{i-1/2}} = \frac{1}{2^{n^2/2}}$ .

6.2. D'après I.3.4. et compte tenu de l'orthonormalité de  $(e_k)_{0 \leq k \leq n}$ , on peut écrire :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, w_{i,j} = \frac{1}{\pi} J_{i+j} = \langle v_i / v_j \rangle = \sum_{k=0}^n q_{k,i} q_{k,j}.$$

On en déduit que  $W_n = {}^t Q_n Q_n$ , puis que  $\det W_n = (\det Q_n)^2 = \frac{1}{2^{n^2}}$ .